uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III– A –
LISTA 4 - 2007-1
Integral tripla.

1. Calcule $\iiint_U z\, dx\, dy\, dz$, onde U é o tetraedro de vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ e $(1,0,1)$.

Nos exercícios 2. e 3. cada integral iterada representa uma integral tripla numa região R. Descreva R e calcule as integrais.

2. $\displaystyle\int_1^2 \int_y^{y^2} \int_0^{\ln x} ye^z\, dz\, dx\, dy$

3. $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^{1+x} \int_z^{x+z} x\, dy\, dz\, dx$

Use coordenadas cilíndricas para calcular as integrais dos exercícios 4. e 5.

4. $\displaystyle\iiint_S \sqrt{x^2+y^2}\, dV$, onde $S = \{(x,y,z);\ x^2+y^2 \le 9,\ 0 \le z \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$

5. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2}\, dz\, dy\, dx$

Use coordenadas esféricas para calcular as integrais dos exercícios 6. e 7.

6. $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$

7. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2+z^2\right)\, dz\, dy\, dx$

8. Calcule $\displaystyle\iiint_S z\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz$, $S = \{(x,y,z);\ (x-1)^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 4\}$.

9. Exprima a integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_{-r^2}^4 \frac{zr^3}{4+r\operatorname{sen}\theta}\, dz\, dr\, d\theta$ como integral iterada em coordenadas retangulares.

10. Exprima a integral $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_{3\pi/4}^{\pi} \int_0^1 \rho^5 \cos\theta \operatorname{sen}^2\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$ como integral iterada em coordenadas retangulares.

11. Exprima a integral $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-r^2}} r^2 \operatorname{sen}\theta\, dz\, dr\, d\theta$ como integral iterada em coordenadas esféricas.

12. Calcule, usando coordenadas esféricas, $\displaystyle\iiint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dV$, onde S é o sólido acima do cone $z = -\sqrt{3x^2+3y^2}$ e interior à esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$.

13. Calcule a integral de $f(x,y,z) = z$ sobre a região limitada pelo cone $z = \sqrt{2x^2+2y^2}$ e pelo semi-hiperbolóide $z = \sqrt{x^2+y^2+1}$.

14. Calcule $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_1^{\sqrt{2-x^2-y^2}} \frac{z}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\, dz\, dy\, dx$.

15. Calcule $\displaystyle\int_1^2 \int_0^x \int_0^{x^2+y^2} \frac{z}{(x^2+y^2)^2}\, dz\, dy\, dx$.

16. Calcule $\displaystyle\iiint_S \cos\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}\, dV$, $S=\{(x,y,z),\ 1\le x^2+y^2+z^2\le 36\}$.

17. Calcule $\displaystyle\iiint_S \operatorname{sen} z\ dV$, $S=\left\{(x,y,z);\ 0\le z\le 4x^2+4y^2,\ 0\le x\le y\le\sqrt{1-x^2},\ x\le\sqrt{2}/2\right\}$.

Nos exercícios 18. e 19. exprima a integral dada em coordenadas cilíndricas e em coordenadas esféricas.

18. $\displaystyle\iiint_S \sqrt{81-x^2-y^2-z^2}\ dx\,dy\,dz$, S é o sólido interior ao cilindro $x^2+y^2=4$, entre $z=0$ e $z=6-\sqrt{x^2+y^2}$.

19. $\displaystyle\iiint_S \sqrt[3]{x^2+y^2-1}\ dx\,dy\,dz$, $S=\left\{(x,y,z);\ z\le\sqrt{(x^2+y^2)/3},\ x^2+y^2+z^2\le 12\right\}$.

20. Sejam $0<k<R$ constantes. Calcule o volume da porção da esfera $\left\{(x,y,z);\ k\le z\le\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right\}$.

21. Use a mudança de variáveis $x=au,\ y=bv,\ z=cw,\quad a,b,c$ constantes positivas, para provar que o volume do elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ é igual a $\frac{4}{3}\pi abc$.

22. Sejam T a transformação linear $T(u,v,w)=(2u+v-2w,u+2v+2w,2u-v+w)=(x,y,z)$, R_{uvw} uma região do espaço no sistema uvw, $R_{xyz}=T(R_{uvw})$ e f uma função real integrável. Calcule $\displaystyle\iiint_{R_{uvw}} f\ du\,dv\,dw$, sabendo-se que $\displaystyle\iiint_{R_{xyz}} f\ dx\,dy\,dz=3$.

23. Encontre a massa do sólido limitado pelos cilindros $z=\sqrt{x}$ e $y=x^2$ e pelos planos $x=1,\ y=0$ e $z=0$ cuja densidade varia com o produto das distâncias aos três planos coordenados.

24. Determine o centro de massa de um cone (o sólido) circular reto de base R e altura h, cuja densidade é proporcional à distância até a base do cone.

Algumas observações sobre definições e nomenclaturas da Física:

Obs.1 Diz-se que um corpo sólido é homogêneo quando a densidade de massa ρ é constante.

Obs.2 Centróide é o centro de massa de um corpo sólido homogêneo.

Obs.3 Sabe-se que o momento de inércia I de uma partícula de massa m em relação a um eixo E ou a um ponto P é dado pela fórmula $I=mr^2$, sendo r a distância da partícula ao eixo E ou ao ponto P. Usando Soma de Riemann, é possível provar que para um corpo sólido S que tem densidade de massa contínua, o momento de inércia I de S em relação aos eixos coordenados e a origem O são calculados pelas fórmulas, em relação:

ao eixo x, $\displaystyle I_x=\iiint_S (y^2+z^2)\,\rho(x,y)\ dx\,dy\,dz$; ao eixo y, $\displaystyle I_y=\iiint_S (x^2+z^2)\,\rho(x,y)\ dx\,dy\,dz$;

ao eixo z, $\displaystyle I_z=\iiint_S (x^2+y^2)\,\rho(x,y)\ dx\,dy\,dz$; à origem O, $I_O=\dfrac{1}{2}(I_x+I_y+I_z)$.

25. Calcule, em função da massa M, o momento de inércia do cubo homogêneo em relação a um eixo que contém uma das arestas.

26. Considere o cilindro homogêneo S de massa M, onde $S=\left\{(x,y,z);\ (x-a)^2+y^2\le a^2,\ 0\le z\le h\right\}$.
    (a) Calcule o momento de inércia em relação à reta $x=a, y=0$.
    (b) Calcule o momento de inércia em relação ao eixo z. (Dê as respostas em função de a e M)

27. Calcule o centróide do tetraedro limitado pelos planos $x=0$, $y=0$, $z=0$ e $x+y+z=1$.

28. Calcule o centróide da região limitada pela esfera $\rho=a$ e pelo cone $\varphi=a$.

RESPOSTAS DA LISTA 4

1. $1/24$
2. $47/24$
3. $1/12$
4. 18π
5. $\pi/30$
6. π
7. $16\pi/5$
8. $256/9$
9. $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-x^2-y^2}^{4}\frac{z\left(x^2+y^2\right)}{4+y}dz\,dy\,dx$
10. $\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{-\sqrt{x^2+y^2}} x\left(x^2+y^2+z^2\right)dz\,dy\,dx.$
11. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{5}\rho^3\,\mathrm{sen}^2\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\ \ d\rho\,d\varphi\,d\theta.$
12. $8\pi+4\pi\sqrt{3}$
13. $\pi/4$
14. $\pi/24$
15. $3/4$
16. $\dfrac{4\pi}{3}(\,\mathrm{sen}\,(216)-\,\mathrm{sen}\,(1))$
17. $\dfrac{\pi}{8}\left(1-\dfrac{\mathrm{sen}\,(4)}{4}\right)$
18. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{6-r} r\sqrt{81-r^2-z^2}\ dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\arctan\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{6}{\mathrm{sen}\,\varphi+\cos\varphi}} f\ d\rho\,d\varphi\,d\theta\ +$
$\displaystyle +\int_0^{2\pi}\int_{\arctan\left(\frac{1}{2}\right)}^{\pi/2}\int_0^{2\csc\varphi} f\ d\rho\,d\varphi\,d\theta,\qquad f=\rho^2\sqrt{81-\rho^2}\,\mathrm{sen}\,\varphi$
19. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{3}\int_{-\sqrt{12-r^2}}^{r/\sqrt{3}} r\sqrt[3]{r^2-1}\ dz\,dr\,d\theta+\int_0^{2\pi}\int_3^{2\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{12-r^2}}^{\sqrt{12-r^2}} r\sqrt[3]{r^2-1}\ dz\,dr\,d\theta\ =$
$\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\int_0^{2\sqrt{3}}\sqrt[3]{\rho^2\,\mathrm{sen}2\varphi-1}\ \rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\ d\rho\,d\varphi\,d\theta$
20. $\dfrac{2\pi}{3}\left(R^3-\dfrac{3}{2}kR^2+R^3\right)$
22. $\dfrac{1}{7}$
23. $\dfrac{k}{28}$
24. $\left(0,0,\dfrac{3h}{5}\right)$
25. $\dfrac{2a^2}{M}$
26. (a) $\dfrac{Ma^2}{2}$ (b) $\dfrac{3Ma^2}{2}$
27. $\dfrac{1}{4}(1,1,1)$
28. $\dfrac{3a}{8}\ (0,0,1+\cos a)$