uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III – A –

LISTA 5 - 2007-1

Parametrização de curvas
Integral de linha de campo escalar
Integral de linha de campo vetorial

Nos exercícios 1. a 15. para a curva $\mathcal{C}$ dada encontre pelo menos uma parametrização de $\mathcal{C}$. Se achar que é preciso, desenhe primeiro a curva. Nos exercícios cuja orientação não é dada, indique a orientação correspondente a sua parametrização.

1. $\mathcal{C}$ é a união dos segmentos de reta que ligam os pontos $(0,0)$, $(2,0)$, $(3,2)$, $(0,4)$, $(0,0)$, $\mathcal{C}$ orientada nesta ordem.
2. $\mathcal{C}$ é a parte da parábola de equação $y^2 = x$ de $(4,-2)$ a $(4,2)$.
3. $\mathcal{C}$ é a semi-elipse inferior de equação $9x^2 + 4(y-3)^2 = 36$. Escolha a orientação.
4. $\mathcal{C}$ é representada explicitamente como gráfico da função $f(x) = 1 - |1-x|$ de $(0,0)$ até $(2,0)$.
5. $\mathcal{C}$ é representada implicitamente pela curva de nível 1 da função $f(x,y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$. Escolha a orientação.
6. $\mathcal{C}$ é o arco de circunferência $x^2+y^2 = 4, x \geq 0$, situado entre as retas $y = -\sqrt{2}$ e $y = \sqrt{3}$. Escolha a orientação.
7. $\mathcal{C}$ é a curva formada pelos segmentos de reta que unem os pontos $(1,0,0)$, $(0,-2,0)$, $(0,3,2)$, $(1,0,0)$, $\mathcal{C}$ orientada nesta ordem.
8. $\mathcal{C}$ é a união dos segmentos de reta que unem os pontos de interseção do plano $x - y + 2z = 4$ com os três eixos coordenados. Escolha a orientação.
9. $\mathcal{C}$ é a interseção da superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $z - y = 2$, orientada como na Fig. 1.
10. $\mathcal{C}$ é a interseção da das superfícies de equações $x^2+y^2+z^2 = a^2$ e $y + z = a$, onde $a > 0$ e constante, orientada como na Fig. 2.
11. $\mathcal{C}$ é a interseção das superfícies de equações $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Escolha a orientação.

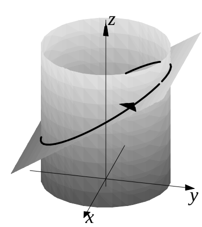

Fig. 1

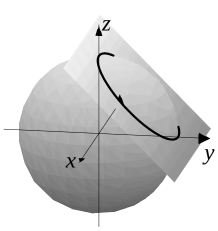

Fig. 2

12. $\mathcal{C}$ é a interseção das superfícies de equações $x^2+y^2 = z$ e $x^2+(y-1)^2 = 1$, cuja projeção no plano xy tem sentido anti-horário.
13. $\mathcal{C}$ é a interseção das superfícies dadas por $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + z^2 = 4$, situada no primeiro octante, orientada no sentido crescente de y.
14. $\mathcal{C}$ é a interseção das superfícies dadas por $z = 5 - y^2$, $z \geq 1$ e $x + z = 5$. Escolha a orientação.
15. $\mathcal{C}$ é a interseção das superfícies dadas por $x^2+y^2+z^2 = 2(x+y)$ e $x+y = 2$. Escolha a orientação.

Calcule as integrais de linha de campo escalar dos exercícios 16. a 19.

16. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (x^2+y^2)ds$, onde $\vec{r}(t) = (t,t)$, $-1 \leq t \leq 1$ é uma parametrização de $\mathcal{C}$.
17. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} xyz\; ds$, onde $\vec{\gamma}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ é uma parametrização de $\mathcal{C}$.
18. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} xy\; ds$, onde $\mathcal{C}$ é o quadrado $|x| + |y| = 1$.

19. $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} xy\; ds$, onde $\mathcal{C}$ é o arco da elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, com $x \geq 0,\; y \geq 0$, a e b constantes positivas.

20. Um fio tem a forma da curva $\mathcal{C}$obtida como interseção do parabolóide $z = x^2 + \frac{1}{2}y^2$ com o plano $x + z = 2$;

    (a) Esboce o fio e apresente uma parametrização para $\mathcal{C}$.

    (b) Ache o comprimento do fio.

21. Encontre a área da superfície lateral acima da curva $\mathcal{C} = \big\{(x, y, z); y = 1 - x^2, z = 0\big\}$, de (1,0,0) a (0,1,0) e abaixo do gráfico de $z = f(x, y) = xy$.

22. Deseja-se construir uma peça de zinco que tem a forma da superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, compreendida entre os planos $z = 0$ e $x + y + z = 2,\; z \geq 0$. Se o metro quadrado do zinco custa M reais, calcule o preço total da peça.

23. Um pedaço de arame tem a forma da curva $\mathcal{C}$ interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y) - 1$ com o plano $y + z = 2$. Calcule a massa do arame se a densidade é dada por $\rho(x, y, z) = x^2$.

    Obs. O centro de massa de um fio com parametrização $\vec{\sigma} : [a, b] \to I\!R^3$ de classe $\mathcal{C}^1$ por partes e densidade contínua $\rho(x, y, z)$ é o ponto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ dado por
    $\overline{x} = \dfrac{\int_{\mathcal{C}} x\, dm}{\int_{\mathcal{C}} dm},\ \overline{y} = \dfrac{\int_{\mathcal{C}} y\, dm}{\int_{\mathcal{C}} dm},\ \overline{z} = \dfrac{\int_{\mathcal{C}} z\, dm}{\int_{\mathcal{C}} dm}$, onde $dm = \rho(x, y, z)ds$ é o elemento de massa.

24. Calcule o centro de massa do fio $\vec{\sigma}(t) = (t, t, t)$, $0 \leq t \leq 1$, com densidade $\rho(x, y, z) = xyz$.

25. A forma de um fio delgado no plano coordenado xy coincide com a parte da parábola $y = 4 - x^2$ entre $(-2, 0)$ e (2,0). Determine a massa e o centro de massa se a densidade no ponto (x, y) é diretamente proporcional à sua distância ao eixo y.

Nos exercícios 26. a 28 calcule as integrais de linha de campo vetorial $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

26. $\vec{F}(x, y) = x^2\vec{\imath} + 2xy\vec{\jmath}$ e $\mathcal{C}$ é a semi-elipse superior de semi-eixos $a = 2,\; b = 3$, de $(2, 0)$ para $(-2, 0)$.

27. $\vec{F}(x, y, z) = 2y\vec{\imath} + z\vec{\jmath} + 3y\vec{k}$ e $\mathcal{C}$ é a interseção de $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$ e $z = x + 3$, orientada no sentido anti-horário quando vista da origem.

28. $\vec{F}(x, y, z) = (2y, z, x)$, $\mathcal{C}$: interseção das superfícies $x^2 + 4y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1,\; y \geq 0$ e $z \geq 0$, sendo o sentido de percurso do ponto (1,0,0) para o ponto $(-1, 0, 0)$.

29. Calcule $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} dx + ydy + dz$, e $\mathcal{C}$ é a interseção das superfícies de equações $y = x$ e $z = x^2 + y^2, z \leq 2$ e o sentido de $\mathcal{C}$ é de $(-1, -1, 2)$ para $(1, 1, 2)$.

30. Calcule $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} 4zdx - 2xdy + 2xdz$, onde $\mathcal{C}$ é a interseção de $x^2 + y^2 = 1$ com $z = y + 1$, orientada no sentido anti-horário quando vista de $(0, 2, 0)$.

31. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ ao mover uma partícula ao longo do quadrado limitado pelos eixos coordenados e pelas retas $x = a$ e $y = a,\; a > 0$, a constante, no sentido anti-horário.

32. Considere uma partícula deslocando-se de $A = (0, 0, 0)$ para $B = (1, 1, 1)$, ao longo da curva $\mathcal{C}$ definida por $\vec{\sigma}(t) = (t, t^2, t^3)$, sob a ação da força $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 - y)\vec{\imath} + (y^2 - z)\vec{\jmath} + (z^2 - x)\vec{k}$. Determine o trabalho realizado por essa força no deslocamento.

33. Se um objeto move-se em um campo de forças $\vec{F}$ de tal modo que, em cada ponto (x, y, z), seu vetor velocidade seja ortogonal a $\vec{F}(x, y, z)$, mostre que o trabalho realizado por $\vec{F}$ sobre o objeto é 0.

RESPOSTAS DA LISTA 5

1. $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$
   Uma parametrização de $\mathcal{C}$ pode ser dada pela parametização de cada uma das quatro curvas, por exemplo,
   $\mathcal{C}_1 : \vec{r}_1(t) = (2t, 0)$, $0 \leq t \leq 1$;
   $\mathcal{C}_2 : \vec{r}_2(t) = (2+t, 2t)$, $0 \leq t \leq 1$;
   $\mathcal{C}_3 : \vec{r}_3(t) = (3-3t, 2+2t)$, $0 \leq t \leq 1$;
   $\mathcal{C}_4 : \vec{r}_4(t) = (0, 4-4t)$, $0 \leq t \leq 1$.
   Outra parametrização de $\mathcal{C}$:
   $$\vec{r}(t) = \begin{cases} (2t,0) & \text{se} \quad 0 \leq t < 1 \\ (t+1, 2t-2) & \text{se} \quad 1 \leq t < 2 \\ (9-3t, 2t-2) & \text{se} \quad 2 \leq t < 3 \\ (0, 16-4t) & \text{se} \quad 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$
2. $\vec{r}(t) = (t^2, t)$, $-2 \leq t \leq 2$
3. Com orientação de $(-2,3)$ para $(2,3)$:
   $\vec{r}(\theta) = (2\cos\theta, 3 + 3\,\text{sen}\,\theta)$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$
   Com orientação de $(2,3)$ para $(-2,3)$:
   $\vec{r}(\theta) = (2\,\text{sen}\,\theta, 3 + 3\cos\theta)$, $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$
4. $\vec{r}(t) = \begin{cases} (t,t), & \text{se} \quad 0 \leq t < 1 \\ (t, 2-t), & \text{se} \quad 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$
5. Com orientação no sentido anti-horário:
   $\gamma(t) = (\cos^3 t, \text{ sen}^3 t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
   Com orientação no sentido horário:
   $\gamma(t) = (\text{ sen}^3 t, \cos^3 t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
6. Com orientação no sentido anti-horário:
   $\gamma(t) = (2\cos t, 2\text{ sen}\,t)$, $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$.
   Com orientação no sentido horário:
   $\gamma(t) = (2\,\text{sen}\,t, 2\cos t)$, $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right]$.
7. $\vec{r}(t) = \begin{cases} (1-t, -2t, 0) & \text{se} \quad 0 \leq t < 1 \\ (0, 5t-7, 2t-2) & \text{se} \quad 1 \leq t < 2 \\ (t-2, 9-3t, 6-2t) & \text{se} \quad 2 \leq t < 3 \end{cases}$
8. $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$, com a projeção de $\mathcal{C}$ no plano xy no sentido horário:
   $\mathcal{C}_1 : \vec{r}_1(t) = (4-4t, -4t, 0)$, $0 \leq t \leq 1$;
   $\mathcal{C}_2 : \vec{r}_2(t) = (0, 4t-4, 2t)$, $0 \leq t \leq 1$;
   $\mathcal{C}_3 : \vec{r}_3(t) = (4t, 0, 2-2t)$, $0 \leq t \leq 1$;
   $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$, com a projeção de $\mathcal{C}$ no plano xy no sentido anti-horário:
   $\mathcal{C}_1 : \vec{r}_1(t) = (4-4t, 0, 2t)$, $0 \leq t \leq 1$;
   $\mathcal{C}_2 : \vec{r}_2(t) = (0, -4t, 2-2t)$, $0 \leq t \leq 1$;
   $\mathcal{C}_3 : \vec{r}_3(t) = (4t, 4t-4, 0)$, $0 \leq t \leq 1$;
9. $\vec{r}(t) = (\cos t, \text{ sen}\,t, 2 + \text{ sen}\,t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
10. $\gamma(t) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\text{ sen}\,t, \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\text{ sen}\,t\right)$, $t \in [0, 2\pi]$.
11. $\gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t, \frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}t, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $t \in [0, 2\pi]$.
12. $\gamma(t) = (\cos t, 1 + \text{ sen}\,t, 2 + 2\text{ sen}\,t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
13. $\gamma(t) = (2\cos t, 2\text{ sen}\,t, 2\text{ sen}\,t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
14. $\gamma(t) = (t^2, t, 5-t^2)$, $-2 \leq t \leq 2$.
15. $\gamma(t) = (1 + \cos t, 1 - \cos t, \sqrt{2}\,\text{sen}\,t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
16. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$
17. $\dfrac{-\pi\sqrt{2}}{2}$
18. 0
19. $\dfrac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$
20. (a) $\gamma(t) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos t, \frac{3}{\sqrt{2}}\text{ sen}\,t, \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\cos t\right)$, $0 \leq t \leq 2\pi$;
    (b) $3\sqrt{2}\pi$.
21. $\dfrac{1}{120}\left(25\sqrt{5} - 11\right)$
22. $(8 + 6\pi)M$
23. $\dfrac{5\sqrt{2}\pi}{4}$
24. $\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$
25. $M = \dfrac{k(17^{3/2}-1)}{6}$, $\overline{x} = 0$, $\overline{y} = \dfrac{17^{5/2} - 41}{10(17^{3/2}-1)}$
26. $\dfrac{56}{3}$
27. $18\pi\sqrt{2}$ ou$-18\pi\sqrt{2}$ conforme orientação escolhida
28. $\dfrac{4 + 10\sqrt{2}}{15}$
29. 2
30. 4π
31. $2a^3$
32. $-\dfrac{-29}{60}$