Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III – A –

LISTA 6 - 2007-1

Teorema de Green
Campos conservativos
Teorema das quatro eqivalências

1. Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções de classe $\mathcal{C}^1$ tais que $f(x) < g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
   Seja C a fronteira da região $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; c \leq y \leq d, f(y) \leq x \leq g(y)\}$, C com orientação positiva.
   <u>**Se**</u> $U \in \mathbb{R}^2$ tal que $U \supset D$, U aberto e $Q : U \longrightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo em U, parametrize C, indique a integral de linha a seguir como integral de uma variável, indique a integral dupla a seguir como integral iterada e <u>**prove a igualdade**</u> $\displaystyle\oint_{C^+} Q(x, y)dx = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\ dxdy.$

<u>**Use o Teorema de Green**</u> para resolver os exercícios 2. a 11.

2. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ ao mover uma partícula ao longo do quadrado limitado pelos eixos coordenados e pelas retas $x = a$ e $y = a$, $a > 0$, a constante, no sentido anti-horário.

3. Calcule $\displaystyle\int_C \left(-2y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$, onde C é a fronteira de D, orientada positivamente e $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \geq 1 \text{ e } 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}$.

4. Calcule $\displaystyle\int_C \left(-2y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$, onde C é a fronteira de D, orientada positivamente e $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \geq 1,\ 4x^2 + 9y^2 \leq 36 \text{ e } y \geq 0\}$.

5. Calcule $\displaystyle\int_C \left(-2y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$, onde $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, orientada de $(0, -1)$ para $(0, -2)$,
   $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0\}$, $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0,\ 1 \leq y \leq 2\}$ e
   $C_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 4x^2 + 9y^2 = 36,\ x \geq 0\}$.

6. Calcule $\displaystyle\oint_C (x^2 - y \tan y)dy$, onde $C : (x - a)^2 + y^2 = a^2$, C no sentido anti-horário, a constante.

7. Calcule $\displaystyle\oint_C xy(3xy\, dx + 7x\, dy)$, $C : 10x^2 + 17y^2 = 29$, C no sentido anti-horário.

8. Calcule $\displaystyle\oint_C (e^{x^4} - y^3)dx + (x^3 + e^{y^5})dy$, onde C é dada por $\vec{\sigma}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

9. Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$, onde C é a curva da Fig. 1.

10. Suponha $\vec{F} = (P, Q)$ de classe $\mathcal{C}^1$ em $D = I\!R^2 - \{(0, 0), (1, 1)\}$. Suponha que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ em D. Calcule $\displaystyle\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sabendo que $\displaystyle\oint_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1$ e $\displaystyle\oint_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2$, onde C, C_1 e C_2 são as curvas da Fig. 2.

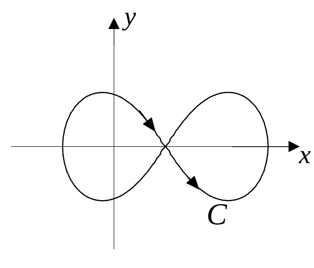

Fig. 1

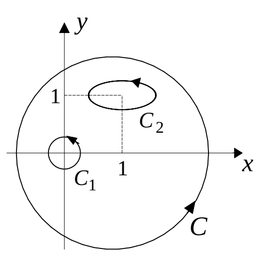

Fig. 2

11. Seja $U \subset I\!R^2$, limitada pelas curvas $C_1 : \dfrac{(x - 2)^2}{4} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ e $C_2 : (x - 1)^2 + y^2 = 1$. Sendo $\vec{F} = (P, Q)$ um campo diferenciável em $I\!R^2$, tal que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} - 3$, calcule $\displaystyle\oint_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sabendo que $\displaystyle\oint_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 3\pi.$

12. Seja A a área de uma região R limitada por uma curva C simples, fechada, de classe $\mathcal{C}_1$ por partes.

    Prove que: $$A = \oint_{C^+} x\,dy = -\oint_{C^+} y\,dx = \frac{1}{2}\oint_{C^+} x\,dy - y\,dx$$

13. Use uma das fórmulas do exercício precedente para calcular a área da região limitada pela curva $C: x = a\cos^3 t,\ y = a \text{ sen}^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

Nos exercícios 14. a 20. determine o rotacional do campo vetorial $\vec{F}$ dado e, se possível, encontre uma função potencial φ do campo $\vec{F}$. Conclua se o campo $\vec{F}$ é ou não é conservativo.

14. $\vec{F}(x,y) = \big(6x^2y^2 - 14xy + 3,\ 4x^3y - 7x^2 - 8\big)$, $\quad\vec{F}$ definido em $\mathbb{R}^2$.

15. $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{1}{y^2}\right)\vec{\imath} + \left(\dfrac{2x}{y^3}\right)\vec{\jmath}$, $\quad\vec{F}$ definido em $\mathbb{R}^2$ tal que $y \neq 0$.

16. $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right)\vec{\imath} + \left(\dfrac{1-2x}{y^3}\right)\vec{\jmath}$, $\quad\vec{F}$ definido em $\mathbb{R}^2$ tal que $xy \neq 0$.

17. $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)\vec{\imath} + \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)\vec{\jmath}$, $\quad\vec{F}$ definido em $\mathbb{R}^2$ tal que $x > 0$.

18. $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{(x-1)^2+y^2}\right)\vec{\imath} + \left(\dfrac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\right)\vec{\jmath}$, $\quad\vec{F}$ definido em $\mathbb{R}^2$ tal que $(x,y) \neq (1,0)$.

19. $\vec{F} = \big(e^{y+2z}, xe^{y+2z}, 2xe^{y+2z}\big)$, $\quad\vec{F}$ definido em $\mathbb{R}^3$.

20. $\vec{F} = \big(y^2 + yz,\big)\,\vec{\imath} + (2xy + xz,)\,\vec{\jmath} + (y + xy)\,\vec{k}$, $\quad\vec{F}$ definido em $\mathbb{R}^3$.

Nos exercícios 21. a 25. prove que, para algum sub-conjunto U do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, o **campo vetorial** dado é **conservativo** e use este fato na resolução dos exercícios.

21. Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = (x,1,2)$ e C é a interseção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ com o plano $z = 2x + 2y - 1$.

22. Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = (1,y,1)$ e C é a interseção das superfícies $y = x$ e $z = x^2 + y^2$, $z \le 2$ e o sentido é de $(-1,-1,2)$ para $(1,1,2)$.

23. Calcule $\displaystyle\int_{(1,1,0)}^{(0,0,2)} dx + dy + dz$, ao longo da curva C de interseção das superfícies $y = x^2$ e $z = 2 - x^2 - y^2$.

24. Calcule $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(0,\pi/2)} e^x \operatorname{sen} y\ dx + e^x \cos y\ dy$.

25. Calcule $\displaystyle\int_{(-1,1)}^{(\sqrt{3},\sqrt{3})} \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F} = \left(\dfrac{2xy}{y^2+x^4}\right)\vec{\imath} + \left(\dfrac{-x^2}{y^2+x^4}\right)\vec{\jmath}$ definido em $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ y > 0\big\}$.

26. Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{yx^2dx - x^3dy}{(x^2+y^2)^2}$, onde C é a curva dada pela equação $\dfrac{x^2}{4} + \left(y - \dfrac{1}{3}\right)^2 = 1$, percorrida no sentido anti-horário. Aplique o **teorema das quatro equivalências** para resolver os exercícios 27. a 30.

27. Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{yx^2dx - x^3dy}{(x^2+y^2)^2}$, onde C é a curva dada pela equação $\dfrac{x^2}{4} + (y-2)^2 = 1$, percorrida no sentido anti-horário.

28. Seja $\vec{F}(x,y) = \big(2xy^3 - y^2\cos x, 1 - 2y \operatorname{sen} x + 3x^2y^2\big)$. Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde C é o arco da parábola $2x = \pi y^2$ de $P_1(0,0)$ até $P_2\Big(\dfrac{\pi}{2}, 1\Big)$.

29. Seja C qualquer caminho unindo qualquer ponto na circunferência $x^2+y^2=a^2$ a qualquer ponto na circunferência $x^2+y^2=b^2,\ b>a$. Seja $\vec{F}(x,y)=5\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3(x,y)$. Mostre que $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ tem sempre o valor b^5-a^5.

30. Seja $I=\displaystyle\int_C \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx+\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dy$.

    (a) Se C é uma circunferência de raio a, calcule I usando a definição de integral de linha.
    (b) Prove que $I=0$ para qualquer curva fechada C que não passa pela origem.
    (c) Calcule I para a curva C: $x^2+(y-2)^2=1,\ x\geq 0$, percorrida no sentido anti-horário.

RESPOSTAS DA LISTA 6 (com indicação ou resumo de algumas resoluções)

1. Análoga à demonstração feita em aula para $\displaystyle\oint_{C^+} P(x,y)dx=\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\ dxdy$.

2. $2a^3$
3. 10π
4. 5π
5. -5π
6. $2\pi a^3$
7. 0
8. $\dfrac{3\pi}{2}$
9. -2π
10. 3
11. 18π
13. $\dfrac{3\pi a^2}{8}$

14. rot $\vec{F}=\vec{0}$; $\varphi(x,y)=2x^3y^2-7x^2y+3x-8y$; $\vec{F}$ é conservativo

15. rot $\vec{F}=\left(0,0,\dfrac{4}{y^3}\right)\neq\vec{0}\Rightarrow\nexists$ função potencial $\Rightarrow \vec{F}$ não é conservativo.

16. rot $\vec{F}=\vec{0}$; $\varphi(x,y)=\dfrac{2x^2-2y^2-x}{2xy^2}$; $\vec{F}$ é conservativo.

17. rot $\vec{F}=\vec{0}$; $\varphi(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}, x>0$; $\vec{F}$ é conservativo em $(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x>0$.

18. rot $\vec{F}=\vec{0}$; $\vec{F}$ não tem função potencial pois as candidatas seriam
    $\varphi(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x-1}+C$, que não está definida nos pontos da reta $(x,y)=(1,y), y\neq 0$ e
    $\varphi(x,y)=\operatorname{arccot}\dfrac{x-1}{y}+C$, que não está definida nos pontos da reta $(x,y)=(x,0), x\neq 1$.
    Logo $\Rightarrow \vec{F}$ não é conservativo.

19. rot $\vec{F}=\vec{0}$; $\varphi(x,y,z)=xe^{y+2z}$; $\vec{F}$ é conservativo.

20. rot $\vec{F}=(1,0,0)\neq\vec{0}\Rightarrow\nexists$ função potencial $\Rightarrow\vec{F}$ não é conservativo.

21. 0
22. 2
23. 0
24. 1
25. $\pi/12$
26. $-\pi$
27. 0
28. $\dfrac{\pi^2}{4}$
30. (a) 0 (c) $2/3$