Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III – A –
LISTA 7 - 2007-1
Integral de linha: miscelânea

1. Prove que a integral de linha $I = \displaystyle\int_{(1,-1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x+y)dy$ é independente do caminho e calcule o valor de I.

2. Se $\vec{F}(x,y,z) = y^2 \cos x\,\vec{\imath} + (2y \operatorname{sen} x + e^{2z})\vec{\jmath} + 2ye^{2z}\vec{k}$, prove que $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho e calcule a integral de $(\pi/2, -1, 1)$ a um ponto $P = (0, y^*, z^*)$ do plano yz.

3. Seja $\vec{F}(x,y,z) = \left(e^x \operatorname{sen} y + \dfrac{x}{x^2+y^2}, e^x \cos y + \dfrac{y}{x^2+y^2}, z^2\right)$. Mostre que o valor da integral do campo $\vec{F}$ ao longo de qualquer curva fechada C que não cruze com o eixo z é zero.

4. Seja C uma curva simétrica em relação ao eixo y, que vai do ponto $(-2,0)$ a $(2,0)$, como mostrado na Fig. 1. Sabendo-se que a área da região delimitada por C e pelo eixo x vale 5π, calcule $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y) = (x^2 + xy^3)\vec{\imath} + (2x+y)\vec{\jmath}$.

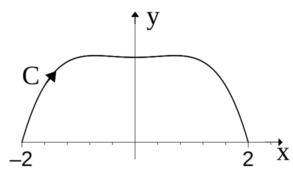

Fig. 1

5. Encontre todos os possíveis valores de $I = \displaystyle\oint_C \frac{(2x-y)dx + (2y+x)dy}{x^2+y^2}$, onde C é uma curva fechada qualquer que não passa pela origem.

Nos exercícios 6. a 16. **calcule a integral de linha** pelo método que lhe parecer conveniente.

6. $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = (xy, x^2+z, y^2-x)$ e C é a curva obtida como interseção da superfície cônica $x^2+y^2 = z^2$, $z \geq 0$, com a superfície cilíndrica $x = y^2$ de $(0,0,0)$ a $(1,1,\sqrt{2})$.

7. $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(0,0)} (e^x + y^2)dx + (x + \sqrt{1+y^7})dy$, onde C é formado por $x = 1$ e $y = x$.

8. $\displaystyle\oint_{C^+} (x+y)dx + xy\,dy$, onde C é a curva fechada determinada pelo eixo ox, pela reta $x = 2$ e pela curva $4y = x^3$.

9. $\displaystyle\int_C (x + 4\sqrt{y})\,ds$, onde C é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

10. $\displaystyle\int_{(4,0)}^{(0,0)} -xy(1+x)^{-1}dx + \ln(1+x)dy$, onde C é formado por $x + 2y = 4$, $x = 0$.

11. $\displaystyle\int_C \left(6xy^3 + 2z^2\right) dx + 9x^2y^2\,dy + (4xz+1)dz$ se C é a curva interseção das superfícies de equações $x^2+y^2 = 1$ e $2x + 7y - z = 0$, com projeção no plano xy no sentido anti-horário, de $(1,0,2)$ até $(-2,1,3)$.

12. $\displaystyle\oint_{C^+} (e^{x^2} + y)dx + (x^2 + \arctan\sqrt{y})dy$, onde C é a fronteira do retângulo de vértices: (1,2), (5,2), (5,4), (1,4).

13. $\displaystyle\oint_{C^+} xy(y\,dy - x\,dx)$ onde C é a fronteira do semi-disco $x^2+y^2 \leq a^2$, $x \geq 0$.

14. $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = (x^2-y^2, z^2-x^2+z, y^2-z^2)$ e C á a curva de interseção da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ com o plano $y=1$, percorrida no sentido anti-horário quando vista da origem.

15. $\int_C (2xyz+2x)\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz$, onde C é a interseção da superfície $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, com o plano $x+y=2$. Indique a orientação escolhida.

16. $\int_C \left(xy - \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(2x + \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)dy$, onde C é a semi-elipse $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$, $y\geq 0$, cuja orientação é aquela que indica um percurso sobre C de $(4,0)$ a $(-4,0)$.

17. Um arame tem a forma da curva obtida como interseção da porção da esfera $x^2+y^2+z^2=4$, $y\geq 0$ com o plano $x+z=2$. Sabendo-se que a densidade em cada ponto do arame é dada por $f(x,y,z)=xy$, calcule a massa total do arame.

18. Suponha uma força $\vec{F}(x,y,z)$ dirigida para a origem e com módulo inversamente proporcional à distância da origem. Prove que $\vec{F}$ é conservativo e determine uma função potencial para $\vec{F}$.

19. Seja a força $\vec{F}$ orientada a partir da origem e com módulo diretamente proporcional à distância da origem. Prove que $\vec{F}$ é conservativo e determine uma função potencial para $\vec{F}$.

Observação. Mais uma aplicação de integral de linha à Física: Momento de Inércia.

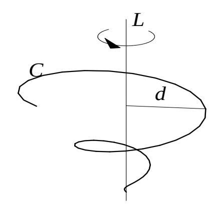

Fig. 2

O Momento de Inércia de um fio delgado C em relação a um eixo de rotação L é dado por

$$I = \int_C \rho(x,y,z)d^2(x,y,z)ds$$

onde ρ é a densidade de massa do fio e d é a distância de cada ponto do fio a L, como na Fig. 2.

Portanto, $I_x = \int_C \rho(x,y,z)\left(y^2+z^2\right)ds \quad I_y = \int_C \rho(x,y,z)\left(x^2+z^2\right)ds \quad I_z = \int_C \rho(x,y,z)\left(x^2+y^2\right)ds$

onde $I_x,\ I_y,\ I_z$ são os momentos de inércia em relação aos eixos Ox, Oy, Oz, respectivamente.

20. Seja um fio delgado com a forma da curva C interseção da superfície $x^2+y^2+z^2=5$, $z\geq 0$ com o plano $x+y=1$.
    (a) Dê uma parametrização para C e calcule o comprimento do fio;
    (b) Se a densidade em cada ponto é proporcional à sua distância ao plano xy, calcule o momento de inércia do fio em relação ao eixo z.

21. Considere um arame semicircular de raio a.
    (a) Mostre que o centróide está sobre o eixo de simetria a uma distância $2a/\pi$ do centro;
    (b) Mostre que o momento de inércia em relação ao diâmetro é $\frac{1}{2}Ma^2$, onde M é a massa do arame.

22. A base de uma cerca é uma curva C no plano xy definida por: $x(t)=30\cos^3 t$, $y(t)=30\,\mathrm{sen}^3 t$, $0\leq t\leq 2\pi$, e a altura em cada ponto $(x,y)\in C$ é dada por $f(x,y)=1+\dfrac{|y|}{3}$ (x e y em metros). Se para pintar cada m^2 um pintor cobra p reais, quanto o pintor cobrará para pintar toda a cerca?

23. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x,y,z)=(-y,x,z)$ para deslocar uma partícula ao longo da curva C interseção de $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geq 0$ com $x^2+y^2-ay=0$, orientada no sentido horário quando vista da origem.

24. Seja o campo vetorial $\vec{F}(x,y)=(2e^y\,\mathrm{sen}\,x\cos x + y^2e^x\cos y)\vec{\imath} + (e^y\,\mathrm{sen}^2 x + 2ye^x\cos y - y^2e^x\,\mathrm{sen}\,y + x)\vec{\jmath}$. Calcule o trabalho de $\vec{F}$ ao longo do semicírculo $x^2+y^2=\dfrac{\pi^4}{4}$, $y\geq 0$, que vai do ponto $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ ao ponto $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$.

25. Calcule o valor de $m \in \mathbb{R}$ para que o campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = \left(\dfrac{mxy^2}{2} - z^3, (m-2)yx^2, (1-m)xz^2\right)$ seja conservativo.

26. Em um movimento elíptico uma partícula de massa m é atraída para a origem com uma força $\vec{F} = -mc\vec{r}$, $c \geq 0$. Sabe-se a energia potencial é igual $-f$, f é a função potencial de $\vec{F}$ e $\vec{v} = \vec{r}'$ é o vetor velocidade. Ache a energia potencial e mostre que $\|\vec{v}\|^2 + c\|\vec{r}\|^2 =$cte.

27. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$, limitada pelas curvas $C_1 : \dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ e $C_2 : (x-1)^2 + y^2 = 1$. Sendo $\vec{F} = (P,Q)$ um campo diferenciável em $\mathbb{R}^2$, tal que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} - 3$, calcule $\displaystyle\oint_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sabendo que $\displaystyle\oint_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 3\pi$.

28. Seja $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2, tal que $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -3$. Considere o campo $\vec{F} = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \dfrac{-\partial\varphi}{\partial x}\right)$. Calcule $\displaystyle\oint_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é a curva formada por $y^2 = x^3$ e $y = x$.

29. Considere o campo $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ e a curva C de classe $\mathcal{C}^1$ por partes representada na Fig. 3.
Calcule o trabalho realizado por uma partícula sob a ação da força $\vec{F}$, para percorrer a curva C. Justifique a solução detalhadamente.
Obs. $\displaystyle\int_{C_a} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$, para qualquer circunferência C_a de raio a centrada na origem.

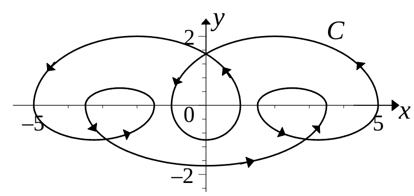

Fig. 3

30. Seja o campo $\vec{F} = (P,Q)$ de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Seja $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ em $\mathbb{R}^2$, exceto nos pontos $(4,0)$, $(0,0)$ e $(-4,0)$. Indiquemos por C_1, C_2, C_3 e C_4 as circunferências de equações: $(x-2)^2 + y^2 = 9$, $(x+2)^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 25$ e $x^2 + y^2 = 1$ respectivamente, orientadas no sentido anti-horário. Sabendo que $\displaystyle\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 11$, $\displaystyle\oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 9$ e $\displaystyle\oint_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 13$, calcule $\displaystyle\oint_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

RESPOSTAS DA LISTA 7

1. $\dfrac{25}{2}$
2. $y^* e^{2z^*} - 1$
4. $-10\pi + \dfrac{16}{3}$
5. $2\pi, -2\pi$ e 0
6. $\dfrac{4 + 10\sqrt{10}}{15}$
7. $\dfrac{1}{3}$
8. $-\dfrac{3}{7}$
9. $\dfrac{19}{6}\left(1+\sqrt{2}\right)$
10. 4
11. -31
12. 40
13. $\dfrac{\pi a^4}{4}$
14. 0
15. 4 de $(0,2,0)$ para $(2,0,0)$
16. 9π
17. 4
18. $-\dfrac{c}{2}\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$, $c \geq 0$
19. $\dfrac{c}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$, $c \geq 0$
20. para $0 \leq t \leq 2\pi$,
$x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}\cos t$,
$y = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}\operatorname{sen} t$
$z = \dfrac{a}{2} - \dfrac{a}{2}\operatorname{sen} t$
22. $900p$
23. $\dfrac{\pi a^2}{4}$
24. $\dfrac{\pi^3}{8}$
25. 4
26. Energia potencial $= \dfrac{mc\|\vec{r}\|^2}{2}$
27. 1
28. $\dfrac{3}{10}$
29. 4π
30. 7