uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III – A –
LISTA 8 - 2007-1
Superfícies parametrizadas
Área de superfície
Integral de superfície de campo escalar

Nos exercícios 1. a 4. esboce as superfícies de parametrizações dadas.

1. $\varphi(u,v) = (u, v, 2-u),\ 0 \leq u \leq 1,\ -u \leq v \leq u.$

2. $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, 4 - r\,\text{sen}\,\theta),\ 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

3. $\varphi(u,v) = (2\cos u, 2\,\text{sen}\,u, v),\ 0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v \leq 4 - 2\,\text{sen}\,u.$

4. $\varphi(\phi,\theta) = (\,\text{sen}\,\phi\,\cos\theta, 3\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, 2\cos\phi),\ 0 \leq \phi \leq \pi,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$

Parametrize a superfície S dos exercícios 5. a 10.

5. S: porção do plano $x + y + z = 4$, situada no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

6. S: porção do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ entre os planos $x + y + z = 4$ e $z = 16$.

7. S: porção da semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0$, situada no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 2y$.

8. S: obtida pela rotação da curva $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $0 \leq y \leq 2$, em torno do eixo y.

9. S: obtida pela rotação em torno do eixo z da curva $z = e^x,\ y = 0,\ x \geq 0$.

10. S: obtida pela rotação em torno do eixo x da curva $z = 0$ e $y = \dfrac{1}{x},\ x > 0$.

11. Seja S uma superfície parametrizada por $\varphi(u,v) = (v\cos u, v\,\text{sen}\,u, 1 - v^2)$, $0 \leq u \leq 2\pi,\ v \geq 0$.
    (a) Identifique esta superfície. Com essa parametrização S é regular?
    (b) Trace as curvas em S definidas por $\varphi\,(u_0, v)$ e $\varphi\,(u, v_0)$, onde
    (i) $u_0 = 0$ (ii) $u_0 = \pi/2$ (iii) $v_0 = 0$ (iv) $v_0 = 1$
    (c) Encontre um vetor tangente à curva definida por $\varphi(0, v)$, no ponto $\varphi(0, 1)$.
    (d) Encontre um vetor tangente à curva definida por $\varphi(u, 1)$, no ponto $\varphi(0, 1)$.
    (e) Encontre as equações paramétricas da reta normal e a equação do plano tangente a S em $\varphi(0, 1)$.

12. Dada a esfera de raio 2, centrada na origem, encontre a equação do plano tangente a ela no ponto $(1, 1, \sqrt{2})$, considerando a esfera como:
    (a) Parametrizada via corrdenadas esféricas;
    (b) Uma superfície de nível de $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$;
    (c) O gráfico de $g(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ que descreve S numa vizinhança de $(1, 1, \sqrt{2})$.

13. (a) Encontre uma parametrização para o hiperbolóide de uma folha $x^2 + y^2 - z^2 = 25$.
    Sugestão: use seno e cosseno hiperbólico.
    (b) Encontre um vetor normal à esta superfície.
    (c) Em qualquer ponto (x_0, y_0, z_0) da curva de interseção do plano $z = 0$ com a superfície, encontre a equação do plano tangente à essa superfície .
    (d) Mostre que se x_0 e y_0 é tal que $x_0^2 + y_0^2 = 25$ então as retas $(x,y,z) = (x_0, y_0, 0) + t\,(-y_0, x_0, 25)$ e $(x,y,z) = (x_0, y_0, 0) + t\,(y_0, -x_0, 25)$ estão contidas tanto no hiperbolóide quanto no plano tangente encontrado em (c).

Nos exercícios 14. e 15. encontre um vetor unitário normal à superfície dada por suas equações paramétricas e identifique-a.

14. $\begin{array}{l} x = \operatorname{sen} v \\ y = u \\ z = \cos v \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} 0 \leq v \leq 2\pi \\ -1 \leq u \leq 3 \end{array}$

15. $\begin{array}{l} x = (2 - \cos v)\cos u \\ y = (2 - \cos v)\operatorname{sen} u \\ z = \operatorname{sen} v \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} -\pi \leq u \leq \pi \\ -\pi \leq v \leq \pi \end{array}$

16. Encontre a área do gráfico de $f(x,y) = \dfrac{2}{3}\left(x^{3/2} + y^{3/2}\right)$, $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$.

17. Deseja-se construir uma peça de zinco que tem a forma da superfície de equação $z = 1 - x^2$, compreendida entre os planos $y = 0$, $z = 0$, e o cilindro $z = 1 - y^2$, $y \geq 0$. Se o metro quadrado do zinco custa A reais, calcule o preço total da peça.

18. Seja S a superfície obtida pela rotação da curva $y = 0, z = x^2, 0 \leq x \leq 4$, em torno do eixo z. Encontre uma parametrização para S e calcule a área da porção de S entre os cilindros $x^2+y^2 = 1$ e $x^2+y^2 = 4$.

19. Seja S a superfície de revolução obtida pela rotação do gráfico de $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ (f' contínua) em torno do eixo x. Usando a fórmula da área de superfície $A(S) = \displaystyle\iint_S dS$,

    (a) Prove que $A(S) = 2\pi \displaystyle\int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$ (esta fórmula foi vista em Cálculo II !)

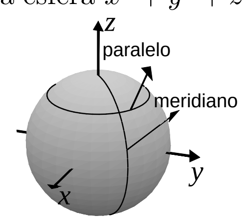
    (b) Observe que $A(S) = 2\pi \displaystyle\int_C |f(x)|ds$, onde C é parametrizada por $\vec{r}(t) = (t, f(t))$, $a \leq t \leq b$.

Calcule a área e faça um esboço das superfícies dadas nos exercícios 20. a 23.

20. Superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ limitada pelo plano $z = 0$ e pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

21. Superfície do sólido limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pela parte superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

22. Superfície da esfera de raio a centrada na origem limitada por 2 paralelos e 2 meridianos, sabendo que o ângulo entre os meridianos é α e a distância entre os planos que contém os paralelos é h.



23. O gráfico de $z = xy$, $(x,y) \in D$, onde D, em coordenadas polares, é o subconjunto do plano limitado por $r^2 = \cos(2\theta)$, $-\dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$.

Calcule as **integrais de superfície de campo escalar** dos exercícios 24. a 27.

24. $\displaystyle\iint_S \left(x^2 + y^2\right) dS$, onde $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

25. $\displaystyle\iint_S (xyz)\, dS$, onde S é o triângulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

26. $\displaystyle\iint_S \left(y^2 + z^2\right) dS$, onde S é a superfície do sólido limitado pela parte superior da esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ e pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

27. $\displaystyle\iint_S z^2 dS$, onde S é a fronteira do cubo $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$.

28. Seja S a superfície obtida girando-se a curva plana $z = 1 - x^2,\ 0 \le x \le 1$ em torno do eixo z. Calcule $\displaystyle\iint_{S_1} \frac{|xy|}{x^2+y^2}\,dS$, onde S_1 é a porção de S no interior de $x^2 + y^2 = y$.

29. Seja S uma superfície fechada, tal que $S = S_1 \cup S_2$, onde S_1 e S_2 são as superfícies de revolução obtidas pela rotação em torno do eixo z das curvas $C_1:\ z = 1 - x,\ 0 \le x \le 1$ e $C_2:\ z = 0,\ 0 \le x \le 1$, respectivamente.

   Se $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ é a densidade de S, calcule a massa M de S. $\qquad (M = \displaystyle\iint_S \rho(x,y,z)dS)$

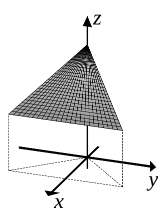
30. Seja S uma esfera de raio R centrada na origem.

   (a) Argumente por simetria que $\displaystyle\iint_S x^2 dS = \iint_S y^2 dS = \iint_S z^2 dS$

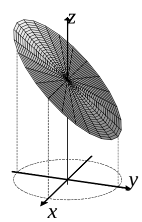
   (b) Use este fato para calcular “sem muito esforço”, as integrais $\displaystyle\iint_S x^2 dS$ e $\displaystyle\iint_S \left(x^2+y^2\right) dS$.

RESPOSTAS DA LISTA 8 (com resumo ou indicação de algumas resoluções)

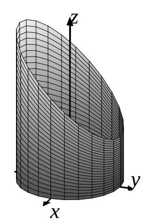
1.



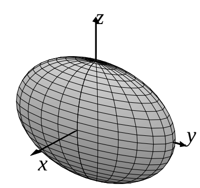
2.



3.



4.



5. $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, 4 - r\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta),\quad 0 \le r \le 4,\quad 0 \le \theta \le 2\pi$
   ou $\varphi(x,y) = (x, y, 4 - x - y)$ com $x^2 + y^2 \le 16$

6. $\varphi(u,v) = (4\cos u, 4\,\mathrm{sen}\,u, v),\ u \in [0, 2\pi],\ 4 - 4\cos u - 4\,\mathrm{sen}\,u \le v \le 16$

7. $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, \sqrt{4 - r^2}),\ 0 \le r \le 2\,\mathrm{sen}\,\theta,\ 0 \le \theta \le \pi$
   ou $\varphi(x,y) = (x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2})$, com $x^2 + y^2 \le 2y$

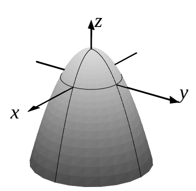
8. $\varphi(u,v) = ((4 - u^2)\,\mathrm{sen}\,v, u, (4 - u^2)\cos v),\ u \in [0,2],\ v \in [0, 2\pi]$

9. $\varphi(u,v) = (v\cos u, v\,\mathrm{sen}\,u, e^v),\ u \in [0, 2\pi],\ v \ge 0$

10. $\varphi(t,\theta) = \left(\dfrac{1}{t}, t\cos\theta, t\,\mathrm{sen}\,\theta\right),\quad t > 0,\quad 0 \le \theta \le 2\pi$

11. (a) Parabolóide. S não é regular apenas em $(0,0,1)$.

   (b)



   (c) $(1, 0, -2)$

   (d) $(0, 1, 0)$

   (e) reta normal: $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 0 \\ x = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

   plano tangente: $2x + z = 2$

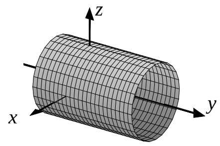
12. (a) (b) e (c) equação geral do plano: $x + y + \sqrt{2}\,z = 4$

13. (a) $\varphi(u,\theta) = (5\cosh u\cos\theta, 5\cosh u\,\mathrm{sen}\,\theta, 5\,\mathrm{senh}\,u),\quad u \in \mathbb{R},\quad 0 \le \theta \le 2\pi$

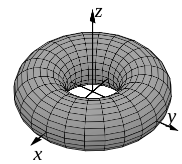
   (b) $\vec{n} = \left(\cosh^2 u\cos\theta, \cosh^2 u\,\mathrm{sen}\,\theta, -\,\mathrm{senh}\,u\cosh u\right)$

   (c) $x_0 x + y_0 y = 25$

14. $\vec{n} = (-\operatorname{sen} v, 0, -\cos v)$



15. $\vec{n} = (\cos u \cos v,\, \operatorname{sen} u \cos v, -\operatorname{sen} v)$



16. $\dfrac{4}{15}\left(9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1\right)$

17. $\left(5\sqrt{5} - 1\right) A/6$

18. (a) $\varphi(t,\varphi) = (t\cos\theta, t\operatorname{sen}\theta, t^2), 0 \le t \le 4, 0 \le \theta \le 2\pi$ (b) $\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\pi/6\right)$

19. (a) Suponha que f se anula em um número finito de pontos do intervalo $[a,b]$. Sejam $c_2, c_3, \cdots c_{n-1}$ os únicos pontos do interior de $[a,b]$ para os quais a função se anula.

Podemos escrever $[a,b] = [c_1,c_2] \cup [c_2,c_3] \cup \cdots \cup [c_{n-1},c_n]$. Como f é contínua em $[a,b]$, concluimos:
para alguns dos valores de $i = 1\cdots n-1$, tem-se $\{f(c_i) \ge 0, f(c_{i+1}) \ge 0,\ f(x) > 0,\ \forall x \in (c_i, c_{i+1})\}$
para os valores restantes de i, tem-se $\{f(c_i) \le 0, f(c_{i+1}) \le 0,\ f(x) < 0,\ \forall x \in (c_i, c_{i+1})\}$.
$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$, onde para cada $i = 1\cdots n$, S_i é a superfície de revolução obtida pela rotação do intervalo $[c_i, c_{i+1}]$ em torno do eixo x. Logo $\displaystyle\iint_S dS = \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_i} dS$

Se $f(x) \ge 0,\ \forall x \in [c_i, c_{i+1}]$ então $S_i:\ \ \varphi(x,\theta) = (x, f(x)\cos\theta, f(x)\operatorname{sen}\theta)$ em $D_i : \begin{cases} c_i \le x \le c_{i+1} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial x} = (f(x)f'(x), -f(x)\cos\theta, -f(x)\operatorname{sen}\theta) \text{ e } \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\| = \sqrt{(f(x))^2\left(1 + (f'(x))^2\right)} \qquad (*)$$

Se $f(x) \le 0,\ \forall x \in [c_i, c_{i+1}]$ então $S_i : \varphi(x,\theta) = (x, -f(x)\cos\theta, -f(x)\operatorname{sen}\theta)$ em $D_i : \begin{cases} c_i \le x \le c_{i+1} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial x} = (f(x)f'(x), -f(x)\cos\theta, -f(x)\operatorname{sen}\theta) \text{ e } \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\| = \sqrt{(f(x))^2\left(1 + (f'(x))^2\right)} \qquad (**)$$

Por hipótese, $f'(x)$ é contínua, logo, para todo $i = 1\cdots n$, temos que $\varphi(x,\theta)$ é de classe $\mathcal{C}^1$.

Por (*) e (**), para todo $i = 1\cdots n$, temos $\left\|\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \times \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right\| = |f(x)|\sqrt{\left(1 + (f'(x))^2\right)} \ne 0$ se $f(x) \ne 0$.

Logo, para todo $i = 1\cdots n$, φ é regular no interior de D_i e

$$\iint_{S_i} dS = \int_0^{2\pi}\int_{c_i}^{c_{i+1}} |f(x)|\sqrt{\left(1 + (f'(x))^2\right)}dxd\theta = 2\pi\int_{c_i}^{c_{i+1}} |f(x)|\sqrt{\left(1 + (f'(x))^2\right)}dx$$

.

Logo a área de $S = A = \displaystyle\iint_S dS = \sum_{i=1}^{n}\iint_{S_i} dS = \sum_{i=1}^{n}\left(2\pi\int_{c_i}^{c_{i+1}} |f(x)|\sqrt{\left(1 + (f'(x))^2\right)}dx\right)$

$$A = 2\pi\sum_{i=1}^{n}\int_{c_i}^{c_{i+1}} |f(x)|\sqrt{\left(1 + (f'(x))^2\right)}dx = \int_a^b |f(x)|\sqrt{\left(1 + (f'(x))^2\right)}dx$$

20. 8

21. $\left(4 - \sqrt{2}\right)\dfrac{\pi}{2}$

22. $ah\alpha$

23. $\left(\dfrac{10}{9} - \dfrac{\pi}{6}\right)$

24. $\dfrac{8\pi a^4}{3}$

25. $\dfrac{\sqrt{3}}{120}$

26. $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{163} + \dfrac{4}{3} - \dfrac{7\sqrt{2}}{12}\right)$

27. $\dfrac{28}{3}$

28. $\dfrac{25\sqrt{5} - 11}{120}$

29. $\left(1 + \sqrt{2}\right)\dfrac{2\pi}{3}$

30. (a) A esfera tem o mesmo comportamento para os eixos x, y e z. Logo o resultado numérico é o mesmo para as três integrais, só muda a notação para os eixos.

(b) $\displaystyle\iint_S x^2 dS = \frac{1}{3}\iint_S \left(x^2 + x^2 + x^2\right) dS = \frac{1}{3}\iint_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dS = \frac{1}{3}\iint_S \left(a^2\right) dS = \frac{4\pi a^4}{3}$

$\displaystyle\iint_S \left(x^2 + y^2\right) dS = \iint_S \left(x^2 + x^2\right) dS = 2\iint_S x^2 dS = \frac{8\pi a^4}{3}$