uff Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

Cálculo III – A –
LISTA 9 - 2007-1
Integral de superfície de campo vetorial

Calcule a **integral** $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ dos exercícios 1. a 7.

1. $\vec{F}(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}(x,y,z)$ e S é a esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, com vetor normal $\vec{n}$ exterior.

2. $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}, S$: superfície cilíndrica $x^2+y^2=1$, limitada superiormente pelo plano $x+y+z=2$ e inferiormente pelo plano $x+y+z=1$, vetor normal $\vec{n}$ apontando para fora de S.

3. $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{\imath}-xy\vec{\jmath}+z\vec{k}, S$: superfície cilíndrica $x^2+z^2=R^2$, limitada pelos planos $y=1$ e $x+y=4$, vetor normal $\vec{n}$ apontando para fora de S.

4. $\vec{F}(x,y,z) = x^2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k},\ S$: fronteira do cubo $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$, vetor normal $\vec{n}$ exterior.

5. $\vec{F}(x,y,z) = (z^2-x,-xy,3z)$ e S é a superfície do sólido (= fronteira do sólido) limitado por $z=4-y^2,\ x=0, x=3$ e o plano xy, vetor normal $\vec{n}$ exterior.

6. $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ e S é a superfície do sólido $W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x^2+y^2\le 1 \text{ e } x^2+y^2+z^2\le 4\right\}$, vetor normal $\vec{n}$ exterior.

7. $\vec{F}(x,y,z) = \left(-3xyz^2, x+2yz-2xz^4, yz^3-z^2\right)$e S é a união da superfície $x^2+y^2=1, 0\le z\le 1$ com $z=0, x^2+y^2\le 1$, indicando a orientação escolhida.

8. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x,y,z) = -y\vec{\imath}+x\vec{\jmath}+f(x,y,z)\vec{k}$, através da superfície fechada S : lata cilíndrica com fundo e com tampa dada por $x^2+y^2=1,\ a\le z\le b$ e $x^2+y^2\le 1,\ z=a$ e $x^2+y^2\le 1,\ z=b$, sabendo-se que f é contínua, $f(x,y,a)=A$ e $f(x,y,b)=B$, onde A e B são constantes, com $\vec{n}$ apontando para fora de S.

9. Sejam $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ contínua em S.

   S parametrizada por $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ (u,v)\in D$, onde D é compacto com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$ por partes, φ de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $U\supset D$, orientada segundo o vetor $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\times\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}$.

   Uma notação também usada para $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ é $\iint_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$.

   Use a definição de integral de superfície de campo vetorial e o teorema da mudança de variáveis para integral dupla para justificar essa notação.

10. Calcule $\iint_S -xz^2dydz + (2-y)z^2dzdx + \left(y+zx^2\right)dxdy$, onde $\vec{n}$ aponta no sentido de afastamento da origem e S é a porção do cilindro $x^2+z^2=4,\ x\ge 0,\ z\ge 0$, compreendida entre os planos $x-y=2$ e $2x+y=4$.

RESPOSTAS DA LISTA 9

1. 4π
2. 2π
3. $6\pi R^2$
4. 1
5. 16
6. $\left(8-3\sqrt{3}\right)4\pi$
7. π , normal exterior a S
8. $(B-A)\pi$
9.
10. 4