

**CENTRO DE ESTUDOS GERAIS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA  
PARA PROFESSORES DO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO**

**JOICE CAMARGO DOS SANTOS**

**NÚMEROS REAIS: UM DESAFIO NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

**NITERÓI**  
2007

**JOICE CAMARGO DOS SANTOS**

**NÚMEROS REAIS: UM DESAFIO NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática para Professores de Ensino Fundamental e Médio, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Especialista.

Orientador: Prof. Dr. WANDERLEY MOURA REZENDE

Niterói  
2007

**JOICE CAMARGO DOS SANTOS**

**NÚMEROS REAIS: UM DESAFIO NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática para Professores de Ensino Fundamental e Médio, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Especialista.

Aprovada em 08 de agosto de 2007.

**BANCA EXAMINADORA**

---

**Prof. Dr. WANDERLEY MOURA REZENDE - Orientador**  
**Universidade Federal Fluminense**

---

**Prof. Dr. CARLOS EDUARDO MATHIAS MOTTA**  
**Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro**

---

**Profa. Dra. CYBELE TAVARES MAIA VINAGRE**  
**Universidade Federal Fluminense**

Niterói  
2007

## AGRADECIMENTOS

Todo cristão deveria ter um espírito de gratidão. Reconheço que este trabalho não foi feito sozinho. Assim, agradeço de antemão, a todos que contribuíram com sua dedicação para que este trabalho fosse realizado.

Primeiramente a Deus pelo seu amor eterno na minha vida.

Aos meus pais Jorge e Nilcea que sempre me apoiaram.

Ao meu irmão, família e amigos por me acompanhar.

Ao meu esposo Alan por me incentivar.

Ao meu professor orientador Wanderley Moura Rezende pela sua responsabilidade e competência.

A todos os professores e a coordenação do curso de Especialização em Matemática para Professores do Ensino Fundamental e Médio da UFF.

Em fim, “*Em todo o tempo ama o amigo; e na angústia nasce o irmão.*”  
(Provérbios 17:17) .

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>6</b>
<b>CAPÍTULO 1 – BREVE HISTÓRICO DO CONCEITO DOS NÚMEROS REAIS</b>	<b>10</b>
A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS: O PROBLEMA DA MEDIDA .....	10
A CRISE: A EXISTÊNCIA DOS INCOMENSURÁVEIS .....	12
EUDOXO E A SOLUÇÃO PARA CRISE .....	14
DA ARITMÉTICA/GEOMETRIA PARA A ARITMÉTICA/ÁLGEBRA .....	15
DO INFINITÉSIMO PARA A NOÇÃO DE LIMITE .....	16
CONTINUIDADE E NÚMEROS IRRACIONAIS .....	18
O CONCEITO DE CORTE .....	19
<b>CAPÍTULO 2 – NÚMEROS REAIS: O CONTEXTO PEDAGÓGICO .....</b>	<b>21</b>
<b>CAPÍTULO 3 – A PESQUISA.....</b>	<b>30</b>
3.1 – O MAPA COMO INSTRUMENTO METODOLÓGICO .....	30
3.2 – OBJETIVO.....	34
3.3 – OS LIVROS DIDÁTICOS.....	34
3.4 – A SIMBOLOGIA .....	38
<b>CAPÍTULO 4 –OS MAPAS .....</b>	<b>39</b>
<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>60</b>
<b>OBRAS CITADAS .....</b>	<b>63</b>
<b>OBRAS CONSULTADAS .....</b>	<b>65</b>

## RESUMO

O tema “números reais” é tratado desde a sétima série do ensino fundamental. Por outro lado, sabemos que a evolução histórica deste conceito não foi tão simples assim. Para a construção dos números reais foi imprescindível o desenvolvimento do Cálculo e um aprofundamento de suas idéias fundamentais, como a noção de limite e o conceito de continuidade. Diante disso, surgem naturalmente as seguintes questões: Como apresentar esse tema no ensino básico de matemática? O que se pode fazer a esse respeito, tendo em vista que os alunos não dispõem dos conhecimentos do Cálculo? Como os livros didáticos abordam tal assunto? Assim, tendo o mapa como instrumento metodológico, realizamos uma investigação de como alguns livros didáticos atuais de matemática desenvolvem esse tema. Foram obtidos como produto desta monografia 21 mapas que permitem fazer uma boa reflexão sobre o tema.

Palavra-chave: Números reais, educação básica, mapas.

## ABSTRACT

The subject *real numbers* is taught since the 7<sup>th</sup> grade school. In despite of this, we know that the historical evolution of this concept was not so simple. For the construction of the *real numbers*, the development of *Calculus* and a careful study of its fundamentals concepts, as the knowledge of *limit* and the concept of *continuity* were essential. In face of this, the following questions naturally appear: How to present this subject in Mathematics basic teaching? What can it be done since the students don't have the knowledge of *Calculus*? How do educational books treat this subject? So, having the map as a methodological instrument, we carried out an investigation into how some recent educational Mathematics books develop this subject. As the result of this work, it were obtained 21 maps that allow a good reflection on the subject.

Keywords: Real numbers, basic education, maps.

## INTRODUÇÃO

Esta monografia tem sua origem no projeto de pesquisa “*Proposta de Emergência das Idéias Básicas do Cálculo no Ensino Básico de Matemática*”, do prof.º. Wanderley Moura Rezende. Nesta monografia, serão discutidos aspectos relacionados ao ensino dos números reais na educação básica. Tema de natureza complexa, mas bastante presente nas salas de aulas do ensino básico.

Sabe-se que a evolução histórica dos números reais se deu desde a “descoberta” pelos gregos dos segmentos incomensuráveis até construção axiomática realizada por Dedekind no século XIX. Cerca de 2500 anos foram necessários para que tal empreendimento fosse realizado. A participação e o desenvolvimento das idéias do Cálculo e da Análise foram fundamentais para que a construção definitiva dos números reais se efetivasse. Diante disso surge a seguinte questão: como vencer o desafio da construção dos números reais na educação básica, uma vez que não dispomos das contribuições do Cálculo e da Análise?

Algumas pesquisas, no âmbito da educação matemática, têm sinalizado sobre algumas dificuldades na compreensão dos números reais – ou mesmo de alguns elementos do seu campo semântico – que aparecem no ensino de matemática, tanto no nível superior quanto na educação básica. (Dias, 2002), (Penteado, 2004) e (Rezende, 1994) e (Rezende, 2003), por exemplo, são alguns desses trabalhos.

Penteado (2004), em sua dissertação de mestrado, identificou, por exemplo, as seguintes dificuldades com relação ao tema: a concepção de que duas grandezas são sempre comensuráveis, a interpretação de que as propriedades atribuídas à reta real continuavam válidas mesmo sem os números irracionais, a não distinção da cardinalidade dos naturais e a dos reais, a não identificação das representações  $1,999\dots$  e  $2$  como sendo a de um mesmo número, a confusão entre número e sua aproximação atribuindo o mesmo significado a ambos, etc.

Rezende (2003) observa, em sua tese de doutorado, que o cenário pedagógico que se apresenta em torno do número irracional não é diferente do cenário desenvolvido pelos matemáticos do Renascimento com relação a este conceito. O caráter “nebuloso” do

número irracional, por exemplo, tão presente nesse período histórico, aparece com bastante frequência nas atitudes de nossos alunos. Segundo o autor, a privação a que se submetem nossos estudantes é, em verdade, muito maior: “*escondem deles inclusive os problemas motivadores e as dificuldades intrínsecas à construção do significado do número irracional*”. O professor complementa o seu argumento, citando a **fórmula** da soma de uma progressão geométrica infinita ou a **regra prática** que determina a razão geratriz de uma dízima periódica como exemplos de fuga dos processos infinitos tão necessários para a construção do campo semântico dos números reais.

Ao que parece, os números irracionais continuam “nebulosos” na educação básica. Mas como podemos romper as amarras que são impostas aos elementos históricos necessários à construção dos números reais na educação básica?

Os PCN têm consciência desse grande desafio. O documento reconhece que o estudo dos números irracionais na educação básica tem se limitado quase que exclusivamente ao ensino do cálculo com radicais e que o trabalho com estes números pouco tem contribuído para que os alunos desenvolvam o seu conceito. Partindo da premissa de que a idéia de número irracional, nessa fase do aprendizado, não é seguramente intuitiva, o texto julga inadequado um tratamento formal no estudo desses números. Partindo desse pressuposto, o documento sugere algumas ações relacionadas ao tema a serem desenvolvidas na 7ª série do Ensino Fundamental e no 1º ano do Ensino Médio. São elas:

- ampliar e consolidar os significados dos números racionais a partir dos diferentes usos em contextos sociais e matemáticos e reconhecer que existem números que não são racionais;
- analisar, interpretar, formular a resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações, envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais aproximados por racionais;
- estabelecer razão aproximada entre a medida do comprimento de uma circunferência e seu diâmetro;
- identificar um número irracional como um número de representação decimal infinita, e não-periódica, e localizar alguns deles na reta numérica, com régua e compasso;

- apresentar situações-problemas, em particular algumas vinculadas à Geometria e medidas, cujas soluções não são dadas por números racionais (caso do pi, da  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  etc.);

Percebe-se claramente pelos pontos citados acima que os PCN sugerem uma abordagem superficial a respeito do tema. E na sala de aula, como o professor aborda as questões referentes ao ensino de números reais com os seus alunos? Será que ele leva em conta as orientações dadas pelos PCN? E os livros didáticos? Será que consideram as diretrizes traçadas pelos PCN para o ensino de números reais?

Diante disto, resolvemos investigar como o tópico “número real” é abordado nos livros didáticos nacionais destinados à educação básica. Fizemos esta opção pelo livro didático como fonte de pesquisa por acreditar no grande poder de influência que este exerce na ação docente. O livro didático não representa efetivamente o universo da sala de aula, mas é, com efeito, uma boa aproximação para ela.

Para realizar o processo de investigação faremos uso do *mapa* como instrumento metodológico. Em termos cartográficos, o mapa é um instrumento que serve para a nossa orientação, que mostra apenas o que é relevante para o reconhecimento de um terreno ou para o percurso de um trajeto. Segundo Loch (2006), os mapas da cartografia têm características típicas que os classificam e representam elementos selecionados em um determinado espaço geográfico, de forma reduzida, utilizando escala, projeção e simbologia cartográfica.

Inspirado na funcionalidade dos mapas cartográficos, Boaventura Santos (2000) sugere o mapa como o instrumento de análise do “novo” tipo de conhecimento que se anuncia fruto da transição paradigmática da ciência moderna para o conhecimento pós-moderno. Esta “re-significação” da idéia de mapa no terreno da epistemologia, além de original, segundo Rezende, é uma das maiores contribuições de Santos às investigações do novo conhecimento paradigmático que se apresenta. Segundo o sociólogo, a principal característica estrutural dos mapas reside em que, para desempenharem adequadamente as suas funções, estes têm inevitavelmente de distorcer a realidade (Santos, 2000).

São três os mecanismos principais da ação de mapear: a escala, a projeção e a simbolização. Uma breve discussão sobre as principais características desses mecanismos

da ação de mapear será realizada no terceiro capítulo desta monografia. Neste capítulo observa-se também uma descrição dos procedimentos e elementos de nossa pesquisa.

No capítulo 4 apresentamos, enfim, os resultados do mapeamento realizado. Foram construídos 21 mapas que descrevem como os livros didáticos nacionais abordam o tema *número real*.

Já nos dois capítulos iniciais, desenvolvemos revisões bibliográficas sobre o tema (número real) tanto no seu processo histórico de evolução (capítulo 1) como no contexto pedagógico (capítulo 2).

## CAPÍTULO 1 – BREVE HISTÓRICO DO CONCEITO DE NÚMEROS REAIS

### A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS: O PROBLEMA DA MEDIDA

Medir é uma operação que, em geral, realizamos com bastante frequência no nosso dia-a-dia. Medimos comprimentos, o tempo, o peso, etc. Mas o que é medir? Ora, como sabemos, medir consiste em comparar duas grandezas da mesma espécie – dois comprimentos, dois volumes, etc.

Segundo Caraça (1998), o ato de medir compreende três fases e três aspectos distintos: a escolha da unidade; a comparação com a unidade; a expressão do resultado dessa comparação por um número.

Os matemáticos gregos tratavam a questão da medida usando o conceito de grandezas comensuráveis, que significa “medidas simultaneamente”.

Suponhamos que queremos medir o segmento AB tendo como unidade o segmento CD, da figura a seguir:

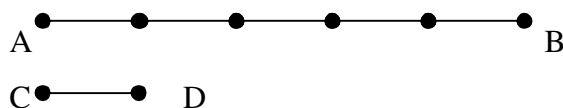


Figura 1: Exemplo dos segmentos AB e CD

Para isto, bastaríamos responder a seguinte pergunta: *quantas vezes CD cabem em AB?* Assim, o problema torna-se bastante simples, basta contarmos para concluir que

$\overline{AB} = 5 \cdot \overline{CD}$  ou de outro modo,  $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = 5$ , em que 5 é propriamente a resposta.

Agora, suponhamos que queremos saber: *quantas vezes EF cabem em AB?*

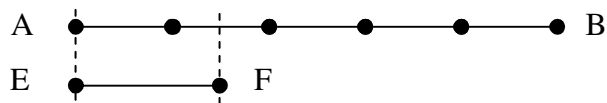


Figura 2: Exemplo dos segmentos AB e EF

Para responder essa pergunta os gregos escolheram outra unidade (subunidade, melhor dizendo) para realizarmos o processo de comparação. Seja GH tal subunidade.

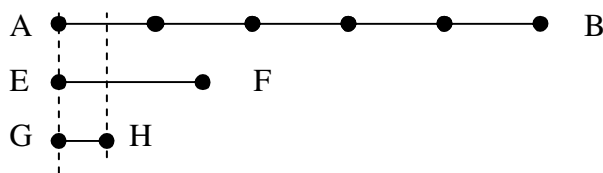


Figura 3: Exemplo dos segmentos AB, EF e GH

Para simplificar nossa exposição consideremos  $\overline{GH} = u$ . Assim, temos que:

$$\overline{EF} = 3 \cdot \overline{GH} = 3u \text{ e } \overline{AB} = 10 \cdot \overline{GH} = 10u \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{10u}{3u} = \frac{10}{3}$$

O que nos leva concluir que  $\overline{AB} = \frac{10}{3} \cdot \overline{EF}$ , isto é, AB é  $\frac{10}{3}$  de EF.

Se escolhêssemos uma subunidade ainda menor, por exemplo,  $\overline{MN} = \frac{\overline{GH}}{2}$ , obteríamos como medida uma razão equivalente a anterior. De fato, neste caso teríamos:

$$\overline{EF} = 3 \cdot \overline{GH} = 3 \cdot 2 \cdot \overline{MN} = 6 \cdot \overline{MN} \text{ e } \overline{AB} = 10 \cdot \overline{GH} = 10 \cdot 2 \cdot \overline{MN} = 20 \cdot \overline{MN}$$

Logo  $\overline{EF} = 6 \cdot \overline{MN}$  e  $\overline{AB} = 20 \cdot \overline{MN} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{20 \cdot \overline{MN}}{6 \cdot \overline{MN}} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$

De fato, podemos concluir então que:

- a) a medida  $\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}}$  não depende da unidade  $u$  escolhida.
- b) e que, uma vez encontrarmos uma razão  $\frac{m}{n}$  que expressa a medida

$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}}$ , sempre é possível encontrarmos uma razão irredutível à anterior.

Eis aí a origem do campo racional. Surge a partir do processo de medir. No entanto, uma questão fundamental ainda precisa ser respondida: será que esse instrumento é realmente eficiente? Quer dizer, será que o campo racional é suficiente para realizarmos as nossas medidas? A princípio, os gregos acreditavam que sim. Acreditavam que, dada uma

grandeza A e um padrão de mesma espécie B, sempre era possível encontrar uma subunidade  $u$  de modo que  $A = mu$ ,  $B = nu$  e, por conseguinte  $A = \frac{m}{n}B$ , em que  $\frac{m}{n}$ , uma razão irredutível, representava exatamente a medida de A em relação a B.

Contudo os gregos, mais precisamente os pitagóricos, descobriram algo perturbador: existiam grandezas não comensuráveis.

## A CRISE: A EXISTÊNCIA DOS INCOMENSURÁVEIS

Em Crotona, uma colônia grega situada no sul da Itália, Pitágoras, nascido por volta de 572 a.C., fundou a famosa escola pitagórica voltada ao estudo de filosofia, matemática e ciências naturais. Uma irmandade permeada de ritos secretos e cerimônias. Os pitagóricos, ao que tudo indica, foram os responsáveis por um dos momentos mais críticos da matemática: a prova de que há segmentos não comensuráveis.

Tal fato foi verificado no problema que estabelece uma comparação o lado do quadrado e sua diagonal. Considere o quadrado ABCD. Seja BC a diagonal e AB um dos lados do quadrado.

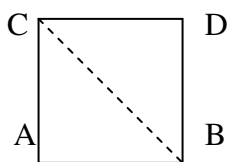


Figura 4: Um quadrado ABCD com diagonal AC.

Suponhamos, inicialmente, como os gregos, que exista uma subunidade  $u$  suficientemente pequena de tal modo que  $\overline{BC} = m.u$  e  $\overline{AB} = n.u$ , sendo  $\frac{m}{n}$  irredutível.

Logo  $\overline{BC} = \frac{m}{n} \overline{AB}$ . Como o triângulo ABC é retângulo e isósceles, temos que:

$(\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 = 2.(\overline{AB})^2$ . Substituindo agora o valor de BC na equação acima, obtemos:

$$\left(\frac{m\overline{AB}}{n}\right)^2 = 2(\overline{AB})^2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2}(\overline{AB})^2 = 2(\overline{AB})^2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2$$

Isto é,  $m^2$  é par.

Se  $m^2$  é par, então  $m$  é par. Logo  $m = 2k$ ,  $k$  um número inteiro.

Mas como  $\frac{m}{n}$  é irredutível, temos que  $n$  é ímpar.

No entanto, ao substituir  $m = 2k$ , podemos observar  $(2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n^2$  é par  $\Rightarrow n$  é par. Assim,  $n$  deve ser simultaneamente par e ímpar. Mas, como diria Caraça, tal coisa é uma “monstruosidade aritmética”.

Estamos diante de um problema. Como resolvê-lo? Onde está (se é que existe algum) o erro? No Teorema de Pitágoras? No instrumento de medida criado? Eis que estamos de um dilema: o famoso dilema de Pitágoras. É nesse contexto que surgem os ditos segmentos incomensuráveis. A diagonal de um quadrado unitário e um de seus lados são segmentos incomensuráveis; isto é, não existe uma razão irredutível de inteiros  $\frac{m}{n}$  que expresse sua medida. Tal fato é consequência da prova anterior e assim nasceu a medida da diagonal do quadrado que é um número irracional  $\sqrt{2}$ .

Podemos imaginar a consternação que esta descoberta provocou entre os pitagóricos, já que ela perturbava a filosofia básica da escola, de que tudo dependia dos números inteiros. "Tão grande foi o escândalo lógico que por algum tempo se fizeram esforços para manter a questão em sigilo. Conta a lenda que o pitagórico Hipaso (ou talvez outro) foi lançado ao mar pela ação ímpia de revelar o segredo a estranhos ou (de acordo com outra versão) que ele foi banido da comunidade pitagórica, sendo-lhe ainda erigido um túmulo, como se estivesse morto." (Eves, 2004).

Segundo Rezende (2003), esta crise influenciou o destino da própria matemática grega, de modo que esta tentativa de estabelecer pontes entre a geometria e a aritmética e, mais especificamente, entre grandezas contínuas e discretas, foi abandonada pelos matemáticos gregos que se seguiram. Cabe ressaltar, entretanto, que os números irracionais (segmentos incomensuráveis) ainda apareceram nos trabalhos de Platão e Euclides.

## EUDOXO E A SOLUÇÃO PARA CRISE

Foi um matemático grego chamado Eudoxo, um discípulo de Platão, que, por volta de 370 a.C., resolveu tal problema fazendo uso da Teoria das Proporções, que pode ser encontrada no livro V dos Elementos de Euclides:

*Duas magnitudes podem de ser comparadas quando um múltiplo de cada uma delas for maior do que a outra.*

Segundo essa definição, um comprimento e uma área não são magnitudes comparáveis. No entanto, a diagonal do quadrado é maior do que seu lado e, por sua vez, é menor do que o dobro deste lado. Segundo Eudoxo, 1 e  $\sqrt{2}$  são comparáveis, através da seguinte construção geométrica.

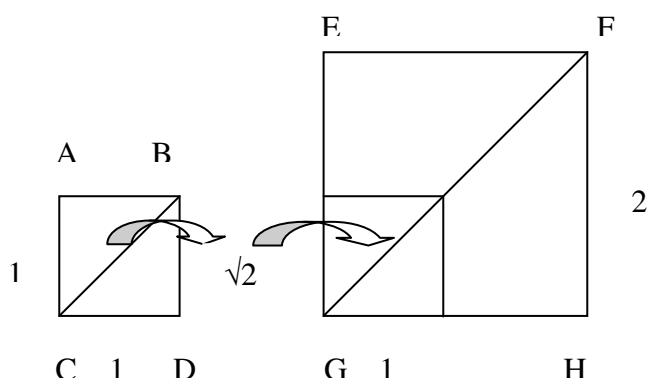


Figura 5: Dois quadrados ABCD e EFGH com diagonal respectivamente BC e FG.

Observando o desenho temos um quadrado ABCD com lado igual 1 e o outro quadrado EFGH com lado igual 2. Note que o triângulo CBD e o triângulo GFH, são semelhantes. Logo, podemos concluir que 1 está para  $\sqrt{2}$  assim como  $\sqrt{2}$  está para 2.

Apesar da grande contribuição de Eudoxo, é possível que este tratamento geométrico dado para o problema atrasou o desenvolvimento de novos campos numéricos. Afinal a questão de se obter um número associado a cada segmento, representando sua medida, não foi tratado de forma direta. Somente muito tempo depois, a

questão foi retomada e definitivamente resolvida. Expandindo o conjunto dos números racionais.

Cabe ressaltar que os gregos consideraram como números apenas os racionais, desenvolvendo-se paralelamente uma teoria geométrica das grandezas que se encontra no seu maior grau de aperfeiçoamento nos Elementos de Euclides.

Platão (428/7 – 348/7 a.C.) o grande filósofo de Atenas, já tinha percebido este abismo entre a geometria e a aritmética, e sugerido, por conseguinte, que a solução do problema da medida das “quantidades incomensuráveis” seria alcançada através de uma construção axiomática do conceito de número, independente de qualquer base geométrica. Platão, no entanto, não dá uma resposta direta aos paradoxos de Zenão e ao problema da incomensurabilidade (Rezende , 2003).

## DA ARITMÉTICA/GEOMETRIA PARA A ARITMÉTICA/ÁLGEBRA

Já os hindus e os árabes, diferentemente dos gregos consideravam as raízes de equações como números. Havia certa ausência de distinção cuidadosa, de parte dos matemáticos hindus, entre resultados exatos e inexatos, e era natural, por causa disso, que não levassem a sério a diferença entre grandezas comensuráveis e incomensuráveis. Aos matemáticos hindus e árabes se deve o estabelecimento de algumas regras formais para o cálculo de radicais.

A criação da Geometria Analítica com Fermat e Descartes, no século XVII, exigiu uma mudança de atitude no que diz respeito às relações mútuas dos campos aritmético e geométrico e preparou assim o caminho para o tratamento aritmético das incomensurabilidades. Fermat, se dedicou com entusiasmo, ao desenvolvimento da teoria dos números. Newton dá uma definição de número, a partir da razão de grandezas, que compreende tanto os números racionais como os irracionais. Outro matemático que, tendo já o conhecimento do Cálculo Infinitesimal de Newton e de Leibniz e do conceito de função, desenvolveu resultados importantes no âmbito da teoria dos números, foi o suíço Euler. O príncipe da matemática – como era chamado – aplicou o seu conhecimento de Cálculo para caracterizar e representar algumas quantidades irracionais, sem falar ainda, do desenvolvimento de parte substancial da teoria dos números complexos. Só no séc. XIX,

porém, com Weierstrass, Méray, Dedekind, e Cantor, apareceram teorias dos números irracionais satisfatórias do ponto de vista do rigor matemático.

## DO INFINITÉSIMO PARA A NOÇÃO DE LIMITE

Cauchy definiu o infinitésimo como: “Uma quantidade variável que se torna infinitamente pequena”.

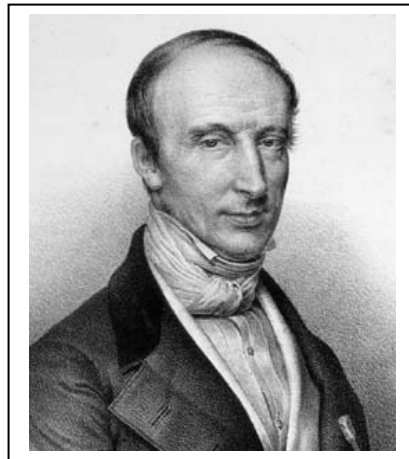


Figura 6: Foto de Augustin-Louis Cauchy

Com a definição de integral dada por Cauchy, surgiram questões relacionadas à convergência ou não das séries. Vários matemáticos da época sentiram a necessidade de definir com precisão a convergência de séries infinitas e de construir testes que permitissem avaliar tal convergência.

A grande dificuldade era provar *a existência do número  $S$  que é o limite da série*. A existência de tal número suscita questões relativas à idéia de continuidade, um fato que não poderia mais ser negado pelos matemáticos.

Cauchy ignorando a dificuldade intrínseca ao seu teorema, definiu os números irracionais como limites de seqüências ou séries convergentes de números racionais, ligando assim, o significado da noção de número irracional à noção de limite. Por outro lado, ao elaborar sua definição de limite, Cauchy precisou admitir a existência de tal número real, questão que passou despercebida pelo matemático:

Cauchy não percebeu a CIRCULARIDADE do seu raciocínio:



Figura 7: Circularidade da definição de limite

A definição de limite, dada por Cauchy, foi feita de uma forma verbal:

“Quando os valores sucessivos atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo de modo à finalmente diferir desse de tão pouco quanto se queira, esse último chama-se o limite de todos os outros”.

Com o processo de “Aritmetização da Análise”, por volta de 1700, houve a separação da Análise de qualquer base geométrica.

Esse processo permitiu que a operação de limite ficasse livre das idéias de movimento, como por exemplo: “aproximar indefinidamente” ou “tão pequeno quanto se queira”.

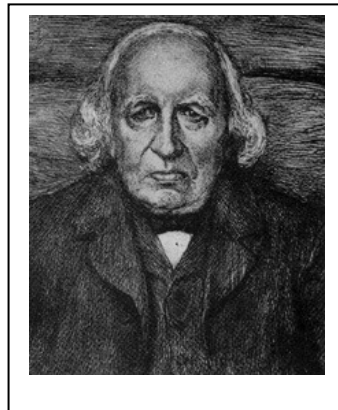


Figura 8: Foto de Weierstrass

Na teoria de limites de Weierstrass o conceito de limite não está associado a qualquer idéia de movimento contínuo, não envolve a idéia de aproximação, mas é tão somente um estado de coisas estáticas.

Weierstrass pretendia estabelecer a Análise com base apenas no conceito de número. Precisou dar uma definição de número irracional independente da noção de limite.

“Resolveu” a questão da circularidade presente na definição de número real identificando o número com a própria seqüência que “converge” para ele. Tal atitude foi a primeira solução normal para a anomalia apresentada na definição de número real. Em vez de definir a raiz de 2 como o limite da seqüência (1; 1,4; 1,41; 1,414; ...), defina o número como sendo a própria seqüência que converge.

## CONTINUIDADE E N<sup>os</sup> IRRACIONAIS



Figura 9: Foto de Dedekind

Para Dedekind, o conceito de limite deveria ser desenvolvido através da aritmética apenas, sem usar a geometria como guia. Ele se perguntou o que há na grandeza geométrica contínua que a distingue dos números racionais. Foi somente, em 1872, que o matemático alemão em sua obra “Continuidade e números irracionais” resolveu definitivamente o problema da medida. A solução para o problema, consistiu, segundo Caraça (1998), na busca de um bom reagente que permitisse expandir o campo numérico racional. Tal reagente é, sem dúvida, como nos revela o grande mestre, o conceito de continuidade.

“... para perceber a continuidade, com o grau de clareza que tivermos da noção de linha reta; procuremos antes um critério distinto, tão simples quanto possível, que nos permita, em face de um conjunto qualquer, verificar se ele tem ou não a mesma estrutura de reta e, portanto, se pode também atribuir-lhe ou não continuidade. O que vamos procurar é uma espécie de reagente que nos mostre se, num dado conjunto, existe ou não essa propriedade, assim como o químico determina se, num dado solução existe ou não certo elemento. O reagente pode não dar uma explicação do elemento procurado, mas nem por isso ele será menos útil ao

químico no estudo do soluto que tiver entre mãos. É exatamente a situação em que nos encontramos aqui. Tudo está na procura de um bom reagente...”(Caraça, 1998)

## O CONCEITO DE CORTE

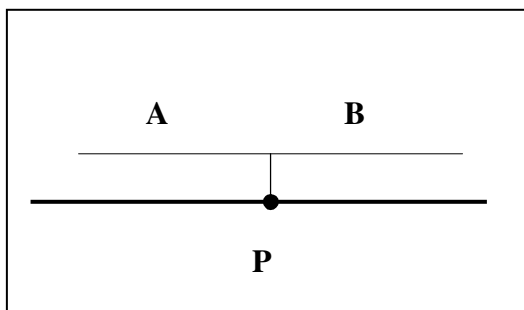


Figura 10: Conceito de corte por Dedekind

Todo “corte” da reta é produzido por um ponto dela mesma, isto é, qualquer que seja o corte  $(A,B)$ , gerado pelos conjuntos  $A$  e  $B$ , existe sempre um ponto  $P$  da reta que “separa” as duas classes  $(A)$  e  $(B)$ .

Esta afirmação tornou-se conhecida como o *Postulado da Continuidade de Dedekind*.

Os números reais são obtidos, a partir deste postulado, por uma extensão dos racionais para um domínio contínuo.

“(…) chamo número real ao elemento de separação das duas classes dum corte qualquer no conjunto dos números racionais; se existe um número racional a separar as duas classes, o número real coincidirá com esse número racional; se não existe tal número, o número real dir-se-á irracional.” (Dedekind, *apud* Caraça, 1998).

O axioma de Dedekind possui outras formas de apresentação equivalentes - a mais conhecida é a de Cantor, em que é postulada a existência de uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números reais e a reta. É por isso que alguns textos didáticos de Análise adotam o termo “axioma de Dedekind-Cantor” para significar qualquer uma das versões desse axioma.

O magistral tratamento dos incomensuráveis formulado por Eudoxo aparece no quinto livro dos Elementos de Euclides, e essencialmente coincide com a exposição moderna dos números irracionais dada por Dedekind em 1872.

Dedekind, em 1879, parece ter sido o primeiro a definir explicitamente a noção de corpo numérico - uma coleção de números que formam um grupo abeliano com relação à adição e (com a exceção do zero) com relação à multiplicação, e na qual a multiplicação é distributiva com relação à adição. Exemplos simples é a coleção dos números racionais, o sistema de números reais e o corpo complexo.

Dedekind por volta de 1888, definiu conjunto infinito como todo conjunto que é equipotente a uma sua parte própria.

Também em 1879, o matemático russo Georg Cantor (1845 – 1918), que via na liberdade a essência da matemática, começou a usar o conceito de correspondência biunívoca para estender a noção de cardinalidade aos conjuntos infinitos. Se dois conjuntos, como  $\mathbb{N}^*$  e  $A$ , considerando anteriormente, podem ser colocados em correspondência biunívoca (emparelhados um a um), diz-se que eles têm a mesma cardinalidade.

Com essa abordagem, e o desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos, Cantor conseguiu a notável proeza de hierarquizar o infinito. Mostrou, entre outras coisas, que  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$  têm a mesma cardinalidade e que  $\mathbb{R}$  tem cardinalidade “maior” que a de  $\mathbb{N}$ . Informalmente isso significa, por exemplo, que  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$  têm “mesma quantidade” de elementos, mas que  $\mathbb{R}$  tem “mais” elementos do que esses conjuntos (Iezzi , 2004).

## CAPÍTULO 2 – NÚMEROS REAIS: O CONTEXTO PEDAGÓGICO

Este texto compõe elementos da pesquisa que busca apresentar o ponto de vista de alguns autores sobre o tema central desta monografia: os números reais na educação básica.

Penteado (2004), na sua tese de mestrado sobre “Concepção do professor do Ensino Médio relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade”, apresenta algumas dificuldades dos alunos na aprendizagem de limites e continuidade de função, decorrentes segundo a autora da falta de compreensão do conjunto dos números reais. Dentre estas dificuldades, a pesquisadora destacou as seguintes: a concepção de que duas grandezas são sempre comensuráveis; que as propriedades atribuídas à reta real continuavam válidas mesmo sem os números irracionais; a não distinção da cardinalidade dos naturais e a dos reais; a afirmação de que existem mais números naturais que ímpares; a identificação entre as representações 3,1416 e  $\pi$  e também entre 2,7182 e  $e$ ; a classificação de 3,1416 como sendo a de um número irracional; a identificação entre uma representação fracionária com número racional independentemente da natureza do numerador e do denominador; a não identificação das representações 1,999... e 2 como sendo de um mesmo número; a definição de números irracionais como sendo somente aqueles com representação com raízes; a confusão entre número e sua aproximação atribuindo o mesmo significado; a noção de sucessor para os números reais; o desconhecimento da existência de infinitos números; a interpretação de que um número racional é exato ou inteiro; a de que um número irracional é aquele que possui uma representação decimal ilimitada ou um número que não é exato; que não é inteiro ou que é negativo; e o desconhecimento da completude do conjunto dos números reais.

Dias (2002), com o seu trabalho sobre “*Correlação da Lógica e do Histórico no Ensino dos Números Reais*”, também apresentou algumas dificuldades que surgem no ensino e na aprendizagem de números reais em todos os níveis de ensino. Os professores entrevistados por Dias (2002) ao refletirem sobre questões envolvendo propriedades dos números reais, apresentaram dificuldades em relação à ordem, à densidade, ao infinito, às definições de número racional e de número irracional, e, ao próprio conceito de número e suas representações. Convém observar que noções de ordem, densidade, continuidade

fazem parte de um elenco de conceitos que deveriam ser discutidos quando se pretende ensinar esse conjunto numérico. Richard Dedekind, um dos construtores da teoria dos números reais, necessitou usar esses conceitos em seu trabalho.

Dias (2002) sugere então a utilização de material concreto para o ensino de números reais. Alguns exemplos apresentados foram: a medição com barbante de objetos redondos para “descoberta do número  $\pi$ ”, a utilização da escala da régua, associada à reta numérica e o uso da calculadora principalmente para obter a raiz quadrada de um número.

Rezende (1994), ao analisar alguns aspectos do processo ensino e aprendizagem da operação de limite, revela alguns equívocos nas atitudes de algum curso de Licenciatura em Matemática com relação ao conceito de número real. Sua pesquisa de campo é composta de um questionário, onde destacam-se duas questões que envolve diretamente o conceito de número real. São elas:

**1) Classifique os números reais abaixo em: racional fracionária (RF), racional inteiro (RI) e irracional (I). ( ) 0,1010010001...; ( ) 0,15781757817578175...; ( ) 0,999...; ( ) 0,12345678910111213...**

O objetivo principal desta questão era o de determinar a priori com que conceito de número irracional os alunos estavam trabalhando. Outro ponto que Rezende (1994) observou com esta questão foi a forma como a tal “regra que transforma dízimas periódicas em frações” se apresentava nas atitudes dos alunos.

**2) Definir número real, número racional e número irracional enumerando as propriedades que conhece sobre cada um dos conjuntos citados acima.**

Com esta questão, Rezende (1994) pretendia determinar com precisão “os conceitos” de número real difundidos pelos alunos. Analisar principalmente a forma pela qual se apresentava a topologia da reta real em suas atitudes.

Com relação a esta última questão, Rezende (1994) observou, que todos responderam, de forma equivalente, que:

- “Número racional é aquele que pode ser escrito na forma de razão de números inteiros,  $a/b$ , com  $b \neq 0$ ”.
- “Número irracional é aquele que não é racional; ou seja, aquele que não pode ser escrito na forma de razão”.

Fica claro para o autor, a partir dessas duas definições dadas consensualmente pelos alunos, as atitudes observadas em relação à primeira questão. O número  $0,1010010001\dots$ , por exemplo, foi classificado pela maioria do grupo de alunos como irracional. No entanto, fica uma pergunta no ar: que critério o aluno utilizou para classificá-lo em irracional? Como é possível justificar esta classificação pelas definições dadas anteriormente? Desenvolveu-se então a partir desse questionamento uma discussão entre os alunos que culminou, conforme nos revela o autor da pesquisa, com outra definição de número irracional.

- “Número irracional é aquele que não pode ser escrito como dízima periódica ou como uma decimal exata”.

Antes, porém, de chegar a esta “outra definição” de número irracional, uma boa parte dos alunos considerava os números “confusos”, ou “difíceis de entender a sua estrutura”, como números irracionais.

Um fato curioso pôde ser observado com relação ao número  $0,999\dots$ . Este número foi classificado pela grande maioria como racional fracionário. O mesmo aconteceu com o número  $0,15781757817578175\dots$ . Este número foi classificado pela maioria dos alunos como racional. No entanto, não conseguiram, determinar a razão de números inteiros que representava esse número. Procuraram, a todo custo, “lembrar-se” da regra que transforma uma dízima periódica em uma fração. Não conseguiram. Depois de algumas tentativas e com a orientação e sugestão do professor para que procurassem resolver esta questão de forma análoga ao primeiro raciocínio utilizado para mostrar que  $0,999\dots = 1$ , conseguiram entender o que até então não tinha significado para eles: a tal “regra esquecida”.

O quarto item desta questão é análogo ao seu primeiro. O problema de classificar o número  $0,12345678910111213\dots$  é o mesmo de classificar  $0,1010010001\dots$ . Em ambos os casos, o número não apresenta um período, mas possui uma “estrutura lógica”, o que não o torna tão “confuso” assim. Este item foi colocado no questionário – conforme nos revela o

autor da pesquisa - com o objetivo de reavaliar esta posição em relação ao número irracional (isto é, número irracional como um número “confuso”). O resultado obtido na pesquisa foi bem dividido: uma parte do grupo classificou-o em irracional e a outra não sabia como classificá-lo. Diante desses resultados o autor concluiu os seguintes fatos:

- 1- que a descoberta da tal “regra” que transforma dízimas periódicas em frações reforçou a representação decimal de um número racional como uma decimal exata ou uma dízima periódica, o que fez com que eles eliminassem a possibilidade de  $0,1234567891011\dots$  ser racional;
- 2- que a classificação deste número como irracional foi feita por eliminação, isto é: como o número não é uma dízima periódica e nem uma decimal exata, então este número deve ser irracional. E é na conclusão deste raciocínio que se dá a divergência dos dois tipos de atitudes verificadas;
- 3- os que não aceitam a conclusão deste raciocínio por eliminação e, por conseguinte, ficam em dúvida na hora de classificar o número dado, desejam encontrar também uma representação decimal para os números irracionais de modo que se possa caracterizá-los por critérios bem definidos, e não “simplesmente” por uma negação lógica, isto é, como um número que não é racional. Assim, admitem a possibilidade de existirem números decimais que não são racionais mas que também podem não ser irracionais.

Ao que parece, os números irracionais continuam “nebulosos” para os alunos que participaram da pesquisa.

Isto posto, surgem algumas questões naturais: Como justificar as atitudes ingênuas de alunos (futuros professores de matemática) em relação à noção de número real (irracional) mesmo na fase final de um curso de graduação em Licenciatura em Matemática? Cabe ressaltar que partes desses alunos já tinham cursado as disciplinas de Cálculo e/ ou estavam cursando uma disciplina de Análise Real. Onde estariam então as razões para estas atitudes?

Em outro momento, no desenvolvimento de sua tese de doutorado sobre “o Ensino de Cálculo: Dificuldade da Natureza Epistemológica”, Rezende (2003) fala-nos acerca de uma ignorância da dualidade discreto / contínuo no ensino básico de matemática:

“No processo pedagógico, a dualidade discreto/contínuo é completamente ignorada desde os níveis mais elementares do ensino de matemática. A consequência disso mais imediata é o hiato estabelecido entre a aritmética e a geometria, com o sacrifício da primeira.” (Rezende, 2003).

O prejuízo da aritmética de que fala o autor pode ser sentido naquela que é a sua noção fundamental: o número. Excetuando os números naturais, que são construídos a partir do problema histórico da contagem, os demais (inteiros, racionais e irracionais) estão associados à “construção da reta numérica”. Os números reais são dessa forma uma “medida” na reta numérica, e as suas representações decimais ou são finitas ou são “aproximadas”:  $\pi = 3,14$ ;  $\sqrt{2} = 1,4$  etc. Assim, os números irracionais continuam no processo pedagógico, tal como em seus tempos de outrora, “nebulosos”, “surdos”, números que “não dizem nada” e que não possuem uma posição definida na reta numérica – “estão sempre andando na reta”.

Isto posto, Rezende (2003) afirma que o cenário pedagógico que se apresenta em torno do número irracional não é diferente daquele desenvolvido pelos matemáticos do Renascimento. Os matemáticos europeus dessa época, apesar de terem descoberto – com o auxílio de um sistema de numeração posicional herdado das civilizações hindu-árabe – que os números irracionais eram identificáveis a números decimais “sem fim”, cujos algarismos após a vírgula nunca se reproduzem na mesma ordem, não conseguiram identificá-los na reta numérica. Por isso, tais números foram denominados “nebulosos” ou “surdos” pelos próprios matemáticos. E fazendo um paralelo entre esses dois momentos históricos, Rezende (2003) procura compreender o caráter “nebuloso” do número irracional no processo pedagógico.

“Assim como os matemáticos renascentistas, os nossos alunos também são privados durante todo o ensino básico dos instrumentos que possibilitariam uma superação desse estado nebuloso do número irracional. Em verdade, a privação a que

se submetem nossos estudantes é muito maior: escondem deles inclusive os problemas motivadores e as dificuldades intrínsecas à construção do significado do número irracional. É assim, por exemplo, quando, no ensino fundamental, ensina-se, por meio de uma regra prática, que a dízima periódica 0,333.. é a representação decimal da fração  $1/3$ ; ou quando, no ensino médio, ensina-se que a soma infinita de uma progressão geométrica ( $a_n$ ) de razão  $q$  ( $0 < |q| < 1$ ) é dada pela fórmula algébrica  $a_1 / (1 - q)$ .” (Rezende, 2003)

Continua o autor em sua explanação:

“Assim, a dízima periódica, uma denominação aritmética para as séries geométricas, é camuflada e “resolvida” aritmeticamente. E, com esta camuflagem, as séries são relegadas a um segundo plano no ensino básico de matemática. E, desse modo, torna-se inevitável no campo pedagógico o hiato entre a representação decimal de um número irracional (discreto) e a sua representação geométrica (contínua). Nesse sentido, seria interessante que se realizassem algumas antecipações do binômio séries/limites no ensino básico para que houvesse uma problematização inicial das dificuldades de representação e definição dos números irracionais. Não se pretende com isso antecipar a construção formal dos números reais para o ensino básico. O que se quer é oferecer ao estudante um cenário real das dificuldades da significação deste conceito, ao passo que, com esta apresentação, alguns elementos essenciais do “pensamento diferencial” – como a noção intuitiva de limite e as séries – já pudessem ser iniciadas. Além disso, o aluno poderia vislumbrar, com essa antecipação, outros processos de aproximações possíveis para alguns números irracionais notáveis. Assim, em vez de identificar  $\pi$  simplesmente com valor racional 3,14, o aluno poderia desenvolver outros procedimentos de aproximação, percebendo, através destes, as dificuldades intrínsecas, a problemática do número irracional.

No entanto, esta interface entre a representação decimal de um número irracional e a sua representação geométrica não é realizada em momento algum do ensino de matemática. Ao contrário, pode-se dizer que no processo didático coexistem “duas” definições de número irracional.” (Rezende, 2003)

Resumindo, Rezende (2003) apresenta um mapa acerca das dificuldades de aprendizagem situadas no macro-espço de natureza epistemológica relativa à dualidade discreto/contínuo:

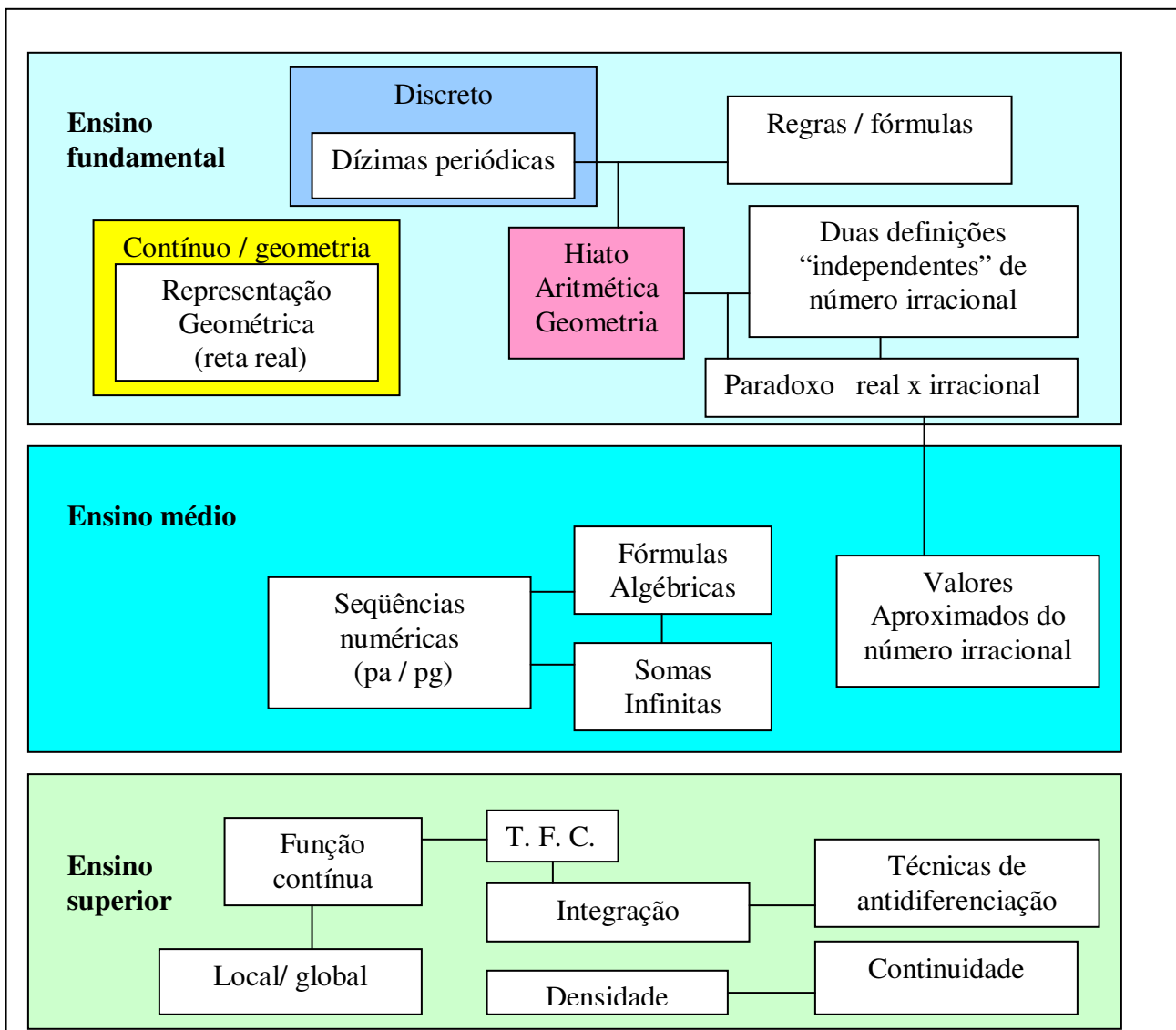


Figura 11: mapa do macro-espaço da dualidade discreto / contínuo.

De fato, a construção dos números reais passa efetivamente por uma aproximação no âmbito desta dualidade e o conceito de continuidade é como nos disse Caraca (1998), o reagente básico desse processo.

“... para perceber a continuidade, com o grau de clareza que tivermos da noção de linha reta; procuremos antes um critério distinto, tão simples quanto possível, que nos permita, em face de um conjunto qualquer, verificar se ele tem ou não a mesma estrutura de reta e, portanto, se pode também atribuir-lhe ou não

continuidade. O que vamos procurar é uma espécie de reagente que nos mostre se, num dado conjunto, existe ou não essa propriedade, assim como o químico determina se, num dado solução existe ou não certo elemento. O reagente pode não dar uma explicação do elemento procurado, mas nem por isso ele será menos útil ao químico no estudo do soluto que tiver entre mãos. É exatamente a situação em que nos encontramos aqui. Tudo está na procura de um bom reagente....”(Caraça, 1998).

Moura (2003), em seu artigo sobre “*O discreto e o contínuo no ensino de Matemática*”, observa que compreender o discreto e o contínuo não é uma tarefa assim tão fácil. Assim diante de todas essas dificuldades apresentadas pelos os autores acima para a compreensão dos números reais, percebe-se que estudar e ensinar tal assunto não é uma tarefa fácil. Ensinar números reais na educação básica de matemática é, com efeito, **um grande desafio!** Diante disso, surge uma questão interessante: Como os PCN propõem desenvolver o conceito de número real na educação básica?

Os PCN (2002) destacam a perspectiva de que o aluno amplie e aprofunde a noção de números. Propõem que se coloque o aluno diante de situações em que os números racionais são insuficientes para resolvê-las, tornando-se necessária a consideração de outros números: os irracionais. Recomenda-se, no entanto, que a abordagem destes últimos não siga uma linha formal, que se evite a identificação do número irracional com um radical e que não se enfatizem os cálculos com radicais, como ocorre tradicionalmente.

O importante é que o aluno identifique o número como um número infinito “casas” decimais não-periódicas, identifique esse número com um ponto na reta, situado entre dois racionais apropriados, reconheça que esse número não pode ser expresso por uma razão de inteiros; conheça números irracionais obtidos por raízes quadradas e localize alguns na reta numérica, fazendo uso, inclusive, de construções geométricas com régua e compasso. Esse trabalho inicial com os irracionais tem por finalidade, sobretudo, proporcionar contra-exemplos para ampliar a compreensão dos números. (PCN, 1998b)

Acrescenta ainda o documento que:

Os irracionais podem ser aproximados tanto quanto se queira por números racionais e que sua representação decimal é necessária infinita, e não-periódica. No

caso das representações infinitas (tanto de racionais como de irracionais) surge o problema da aproximação numérica, ou seja, a necessidade que se tem de considerar apenas um número finito de ordens decimais na representação do número.

Na 7ª série do Ensino Fundamental os significados e usos de termos como algarismo duvidoso, algarismo significativo, ordem de grandeza, erro de medição e arredondamento, ficando restrito às primeiras aproximações, reservando para o Ensino Médio seu aprofundamento. (PCN, 1998a).

Diante das questões levantadas pelos autores supracitados com relação às dificuldades de compreensão da noção de número real ou mesmo dos elementos do seu campo semântico (densidade, continuidade, não-enumerabilidade, etc) e das diretrizes traçadas pelos PCN para o seu ensino na educação básica, surge a principal questão desta monografia: como os livros didáticos nacionais do ensino básico abordam esse tema? Isto é: como realizam este grande desafio que é ensinar números reais na educação básica.

Ante porém, faremos uma breve revisão teórica sobre o instrumento metodológico de nossa pesquisa: os mapas.

## CAPÍTULO 3 – A PESQUISA

### 3.1 - O MAPA COMO INSTRUMENTO METODOLÓGICO

A Cartografia é uma ciência e ao mesmo tempo uma técnica; é entendida como uma arte em levantarem dados. Através dos símbolos, a Cartografia faz parte da história dos homens, pois desde o princípio, eles precisavam demarcar seus caminhos, os lugares com abundância de comida. Faziam isso, inicialmente, através da mente, da memória, desenhavam nas paredes das cavernas, mais tarde usaram a argila, bambu, pergaminho e papel. Hoje, com as modernas tecnologias os homens usam computadores e satélites. O mapa é uma simplificação da realidade, confeccionada a partir da seleção de elementos representados por símbolos e sinais apropriados, favorecendo a conscientização do ser humano de seu papel enquanto sujeito que interage com o mundo em que vive. Mas, com o passar do tempo, o trabalho com mapas começou a encantar e despertar o interesse de pesquisadores de outras áreas do conhecimento.

O sociólogo Boaventura Santos (2000), sugere o mapa como instrumento metodológico para pesquisa nas ciências sociais fazendo comparação ao seu sentido cartográfico. Propõem demonstrar as virtualidades analíticas e teóricas de uma abordagem sociológica que tome por matriz de referência a construção e a representação do espaço. A abordagem proposta pode ser designada como sociologia cartográfica ou como cartografia simbólica.

Boaventura Santos (2000), procura promover sua “cartografia simbólica” (o mapa) como o instrumento de análise do novo tipo de conhecimento que se anuncia fruto da transição paradigmática da ciência moderna para o conhecimento pós-moderno. Esta “re-significação” da idéia de mapa no terreno da epistemologia, além de original, segundo Rezende (2003), é uma das maiores contribuições de Santos.

Segundo o sociólogo, a principal característica estrutural dos mapas reside em que, para desempenharem adequadamente as suas funções, estes têm inevitavelmente de distorcer a realidade (Santos, 2000). Visto isso, o cartógrafo no ato de produção de um

mapa vai encontrar sempre uma tensão entre sua representação e sua orientação, e de acordo com a finalidade do mapa vai privilegiar uma das duas exigências.

Jorge Luiz Borges (1972), conta que no Império os mapas deviam ser fiéis até no mínimo detalhes. Os melhores cartógrafos da época empenharam-se a fundo neste importante projeto. Ao fim de muitos trabalhos, conseguiram terminá-lo; produziram um mapa de exatidão insuperável, pois que coincidia ponto por ponto com o império. Contudo, verificaram, com grande frustração, que o mapa não era muito prático, uma vez que era do tamanho do império.

Segundo Santos (2000), os mapas apresentam três mecanismos principais: a escala, a projeção e a simbolização. Esses mecanismos são autônomos e envolvem procedimentos distintos e exigem decisões específicas. No entanto, estes mecanismos também são interdependentes, pois a ação de “distorcer a realidade” não implica que a representação seja feita de uma forma arbitrária.

”A escala influencia a quantidade de detalhe que pode ser mostrado e determina se um dado símbolo é ou não visualmente eficaz”  
(Monmonier, 1981 *apud* Santos, 2000).

## Escala

A escala é o primeiro grande mecanismo de representação/distorção da realidade. A escala é “a relação entre a distância no mapa e a correspondente distância no terreno.” Os mapas de grande escala têm um grau mais elevado de pormenorização que os mapas de pequena escala porque cobrem uma área inferior à que é coberta, no mesmo espaço de desenho, pelos mapas de pequena escala. Os mapas são sempre “ uma versão miniaturizada” da realidade e, por isso, envolvem sempre uma decisão sobre os detalhes mais significativos e suas características mais relevantes.

## Projeção

O segundo grande mecanismo da produção dos mapas é a projeção. É precisamente através da projeção que as superfícies curvas da terra são transformadas em superfícies planas dos mapas geográficos que conhecemos. Cada tipo de projeção cria um campo de representação no qual as formas e os graus de distorção têm lugar segundo regras conhecidas e precisas. Segundo Rezende (2003), não existe neutralização e ingenuidade na atitude de mapear. Como na escala, a decisão sobre o tipo e o grau de deformação é baseada no uso a que o mapa se destina e na intenção do cartógrafo.

## Simbolização

A simbolização é o terceiro grande mecanismo da representação/distorção cartográfica da realidade. Diz respeito aos símbolos gráficos usados para assinalar os elementos e as características de realidade espacial selecionados. Assim, se a escala indica o “grau de pormenorização da realidade” e a projeção o “grau de distorção”, a simbolização indica a “forma de representação” da mesma segundo a escala e a projeção realizada. Se a palavra-chave associada à projeção é projeto, a relacionada à escala é relevância, e à simbolização, é linguagem (Rezende, 2003).

O trabalho com mapas, apesar de pouco utilizado e divulgado no âmbito da matemática, começou a ser visto, por alguns pesquisadores como uma ferramenta relevante para a produção de seus trabalhos. Rezende (2003), por exemplo, em sua tese de doutorado, construiu mapas históricos e conceituais do Cálculo e mapas das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo. Com exemplo podemos citar o mapa da construção do conceito de número construído pelo professor:

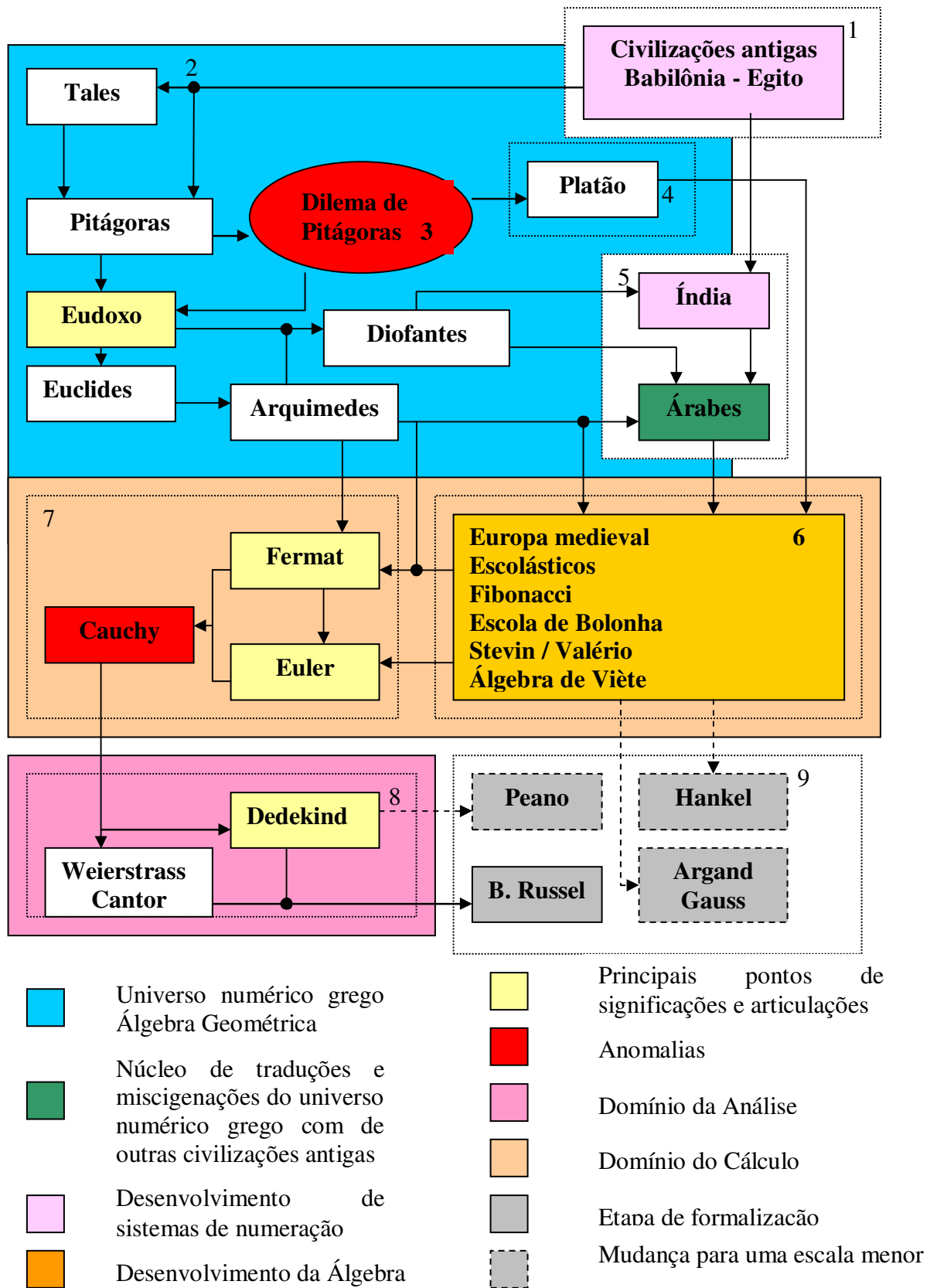


Figura 12: Mapa da evolução histórica do número real feita por Rezende (2003).

Utilizaremos esse instrumento e na realização do meu trabalho.

### 3.2 – OBJETIVO

O objetivo principal desse trabalho é analisar como o estudo dos números reais é desenvolvido na educação básica. Faremos usoem nossa pesquisa, conforme já antecipamos, do potencial metodológico da noção de mapa. Mas, mapear a partir de que fonte de observação? Poderíamos mapear as aulas de professores de matemática, ou mesmo as dificuldades de aprendizagens de alguns alunos da educação básica em relação ao tema. Preferimos, no entanto, mapear como o tema é abordado nos livros didáticos. Este instrumento didático não representa a realidade da sala de aula, mas representa sem dúvida uma boa aproximação para a mesma.

### 3.3 - OS LIVROS DIDÁTICOS

Para dar credibilidade a nossa pesquisa, foram analisados livros didáticos de autores respeitados e conhecidos. São 14 livros da 7ª série do Ensino Fundamental e 7 livros do 1º ano do Ensino Médio.

Apresento a seguir uma tabela dos livros mapeados destacando: o autor e seu título; série e nível; ano; editora e seu status “recomendado ou não” pelo Mec. Os livros aprovados pelo Mec vêm com o seu código e ano. Se o livro é da 7ª série, de faz parte do PNLD (Programa Nacional Livro Didático) e se ele é do 1º ano de faz parte do PNLEM (Programa Nacional do Livro para Ensino Médio).

Autor (es)/ Título	Série / Nível	Ano	Editora	Recomendado pelo Mec
Álvaro Andrini Maria José Vasconcellos “Praticando Matemática”	7ª série / EF	2002	Editora do Brasil	PNLD – 2005 Código do livro: 720031
Ana Lúcia Bordeaux	7ª série / EF	1999	Editora do	PNLD – 2005

Cléa Rubinstein Elizabeth Ogliari Gilda Portela “Matemática na vida e na escola”			Brasil	Código do livro: 020034
Ângela Vidigal Carlos Afonso Rego Maria das Graças G. Barbosa Michael Spira “Matemática e você”	7 <sup>a</sup> série / EF	2002	Formato Editorial	PNLD – 2005 Código do livro: 020089
Antônio dos Santos Machado “Matemática Temas e Metas”	1 <sup>o</sup> ano / EM	1992	Atual	não
Antônio José Lopes Bigode “Matemática Hoje é feita assim”	7 <sup>a</sup> série / EF	2002	FTD	PNLD – 2005 Código do livro: 020049
Benigno Barreto Filho Cláudio Xavier da Silva “Matemática Aula por Aula”	1 <sup>o</sup> ano / EM	2003	FTD	PNLEM – 2006 Código do livro: 129008
Eduardo Bianchini Herval Paccola “Matemática”	7 <sup>a</sup> série / EF	2002	Moderna	não
Eduardo Bianchini Herval Paccola “Matemática”	1 <sup>o</sup> ano / EM	2000	Moderna	não
Gelson Iezzi	7 <sup>a</sup> série / EF	2005	Atual	PNLD – 2008

Oswaldo Dolce Antônio Machado “Matemática e a Realidade”				Código do livro: 00144COL02
Gelson Iezzi Carlos Murakami “Fundamentos de Matemática Elementar”	1 <sup>o</sup> ano / EM	1993	Atual	não
Gelson Iezzi Oswaldo Dolce David Degenszajn Roberto Périgo Nilza de Almeida “Matemática, Ciências e Aplicação”	1 <sup>o</sup> ano / EM	2004	Atual	PNLEM – 2006 Código do livro: 029001
Juliana Matsubara Barroso “Projeto Araribá: Matemática”	7 <sup>a</sup> série / EF	2006	Moderna	PNLD – 2008 Código do livro: 00066COL02
José Roberto Bonjorno Regina Azenha Bojorno Ayrton Olivares “Matemática Fazendo a Diferença”	7 <sup>a</sup> série / EF	2006	FTD	PNLD – 2008 Código do livro: 00054COL02
José Ruy Giovanni José Ruy Giovanni Jr. “Matemática: Pensar & Descobrir”	7 <sup>a</sup> série / EF	2005	FDT	não
Iracema Mori	7 <sup>a</sup> série / EF	2005	Saraiva	PNLD – 2008

Dulce Satiko Onaga “Matemática Idéais e Desafios”				Código do livro: 00146COL02
Luiz G. cavalcante Juliana Sosso Fábio Vieira Ednéia Poli “Para Saber Matemática”	7 <sup>a</sup> série / EF	2006	Saraiva	PNLD – 2008 Código do livro: 00145COL02
Luiz Roberto Dante “Matemática é tudo”	7 <sup>a</sup> série / EF	2005	Ática	PNLD – 2007 Código do livro: 00020COLO2
Luiz Roberto Dante “Matemática”	1 <sup>o</sup> ano / EM	2004	Ática	PNLEM – 2007 Código do livro: 129017
Kátia Stocco Smole Maria Igenes Diniz “Matemática”	1 <sup>o</sup> ano / EM	2003	Saraiva	PNLEM – 2006 Código do livro: 029012
Marília Centurión José Jakubovic Marcelo Lellis “Matemática na medida certa”	7 <sup>a</sup> série / EF	2003	Scipione	PNLD – 2007 Código do livro: 00096COL02
Walter Spinelli Maria Helena Soares de Souza “Matemática”	7 <sup>a</sup> série / EF	2002	Ática	PNLD – 2005 Código do livro: 020024

Figura 13: Tabela com os livros mapeados da 7<sup>a</sup> série do Ensino Fundamental e do 1<sup>o</sup> ano do Ensino Médio.

### 3.4 - A SIMBOLOGIA

As cores foram utilizadas com o objetivo de diferenciar o tipo de abordagem (algébrica, geométrica ou característica do cálculo) que predomina em cada tópico descrito no mapa. Essas cores são vista em todos os mapas, conforme a legenda abaixo:



Em cada mapa, os tópicos em relação ao estudo dos números reais vêm dentro de todos os retângulos coloridos, que serão interligados a outros através de linha ou setas. As setas nos mapas indicam o caminho utilizado pelo autor para desenvolver os tópicos ou introduzir alguns conceitos. Quando o contorno do retângulo, ou as setas, ou as linhas aparecem tracejadas significa que o assunto abordado pelo autor do livro não está claro ou foi estabelecido por meio de exemplos, situações particular, regras ou “convenções”.

Os mapas são identificados com título contendo: o(s) nome(s) do(s) autor(es), série e nível escolar do livro analisado.

CAPÍTULO 4 – OS MAPAS

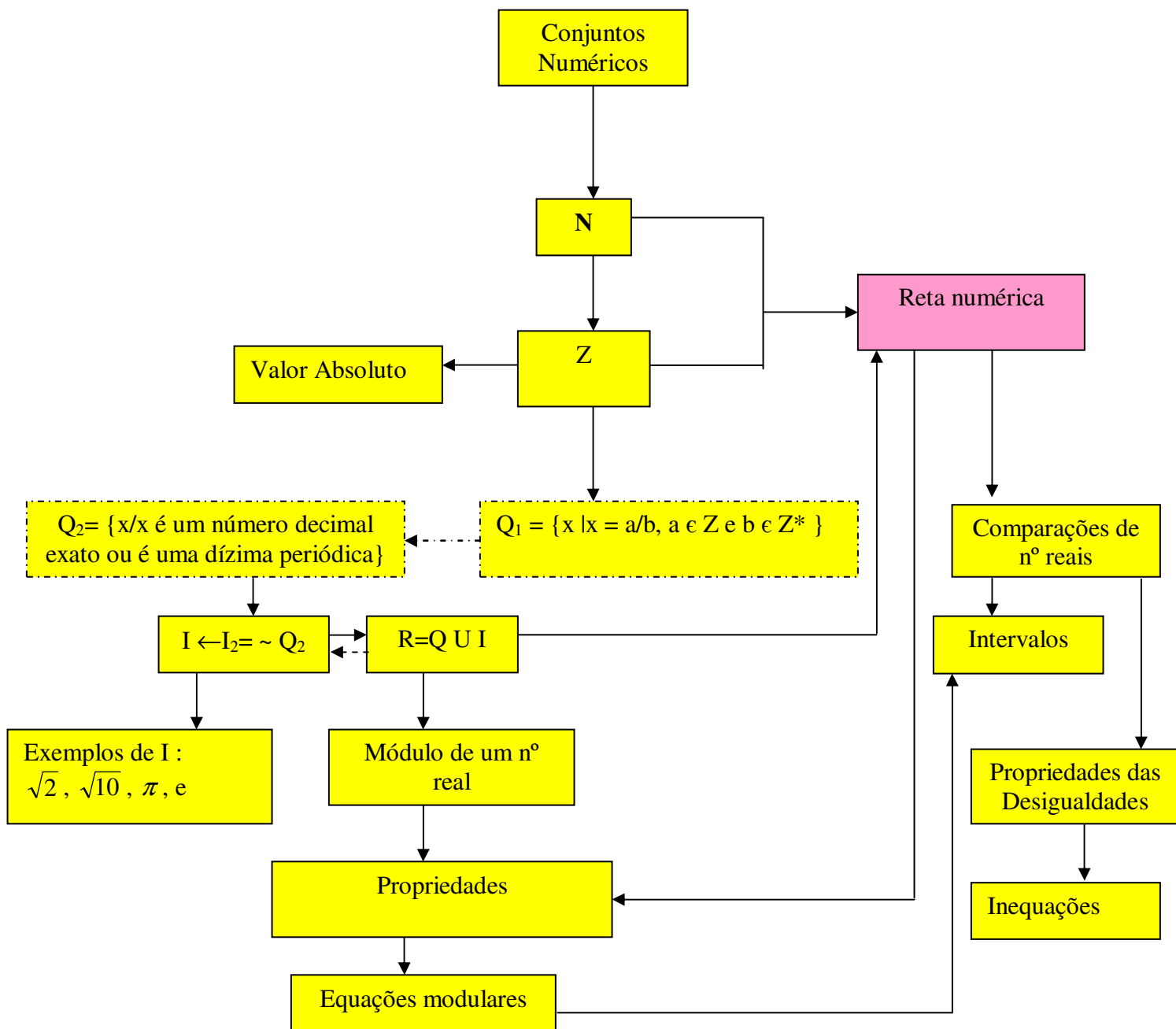


Figura 14: Machado – 1º ano do Ensino Médio

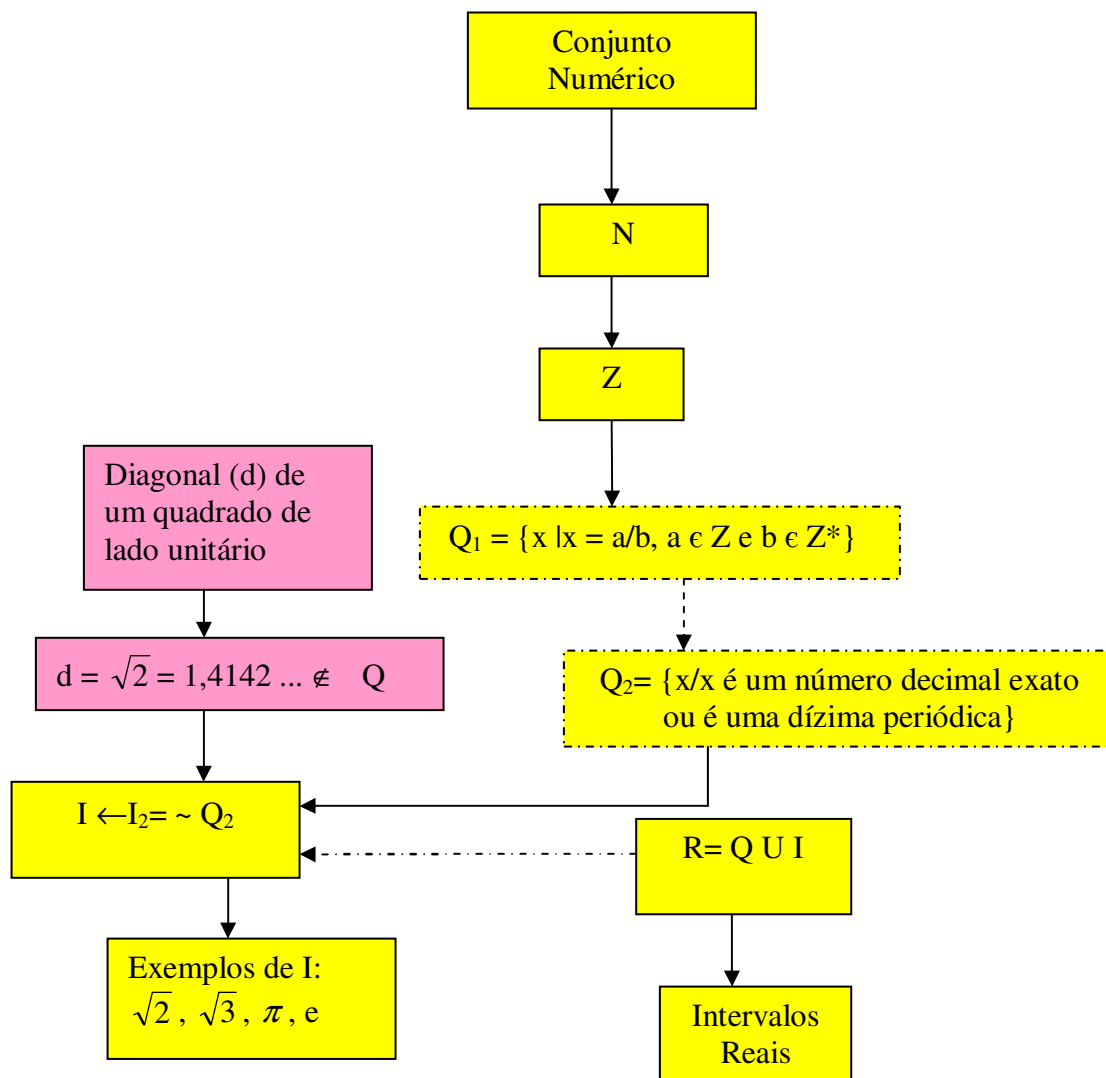


Figura 15: Barreto – 1º ano do Ensino Médio

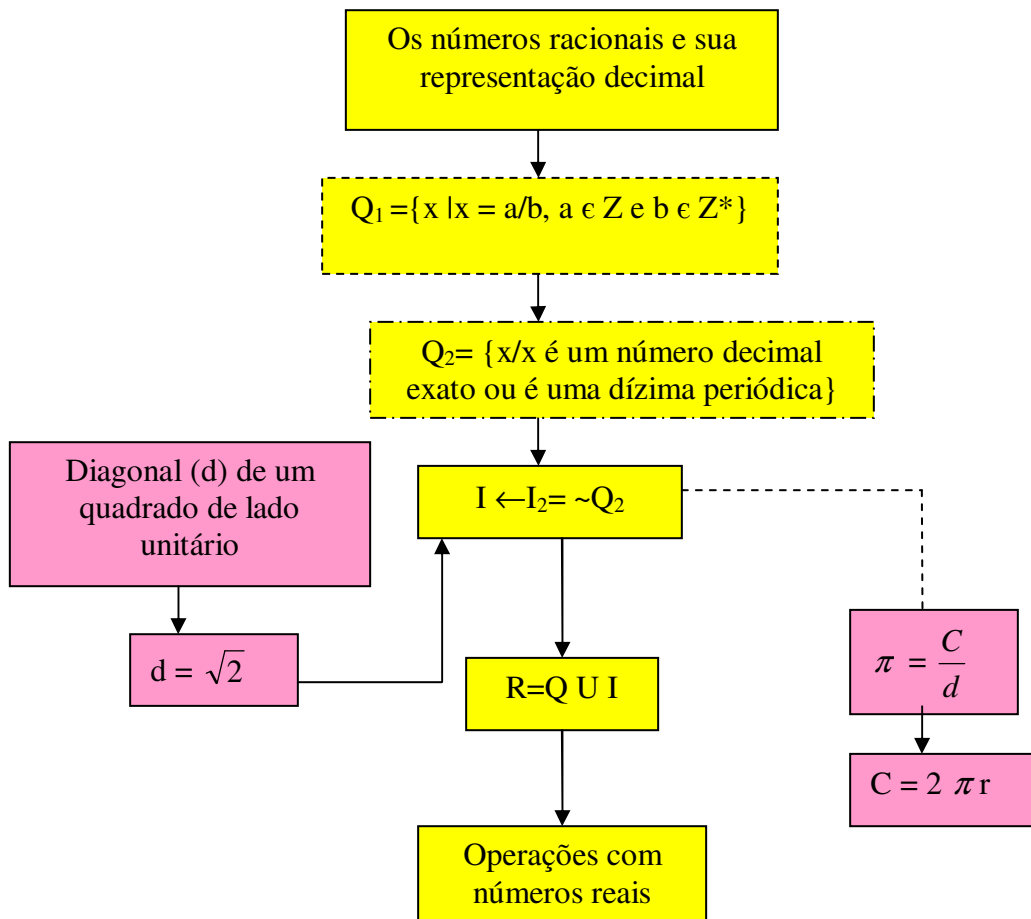


Figura 16: Giovanni – 7ª série do Ensino Fundamental

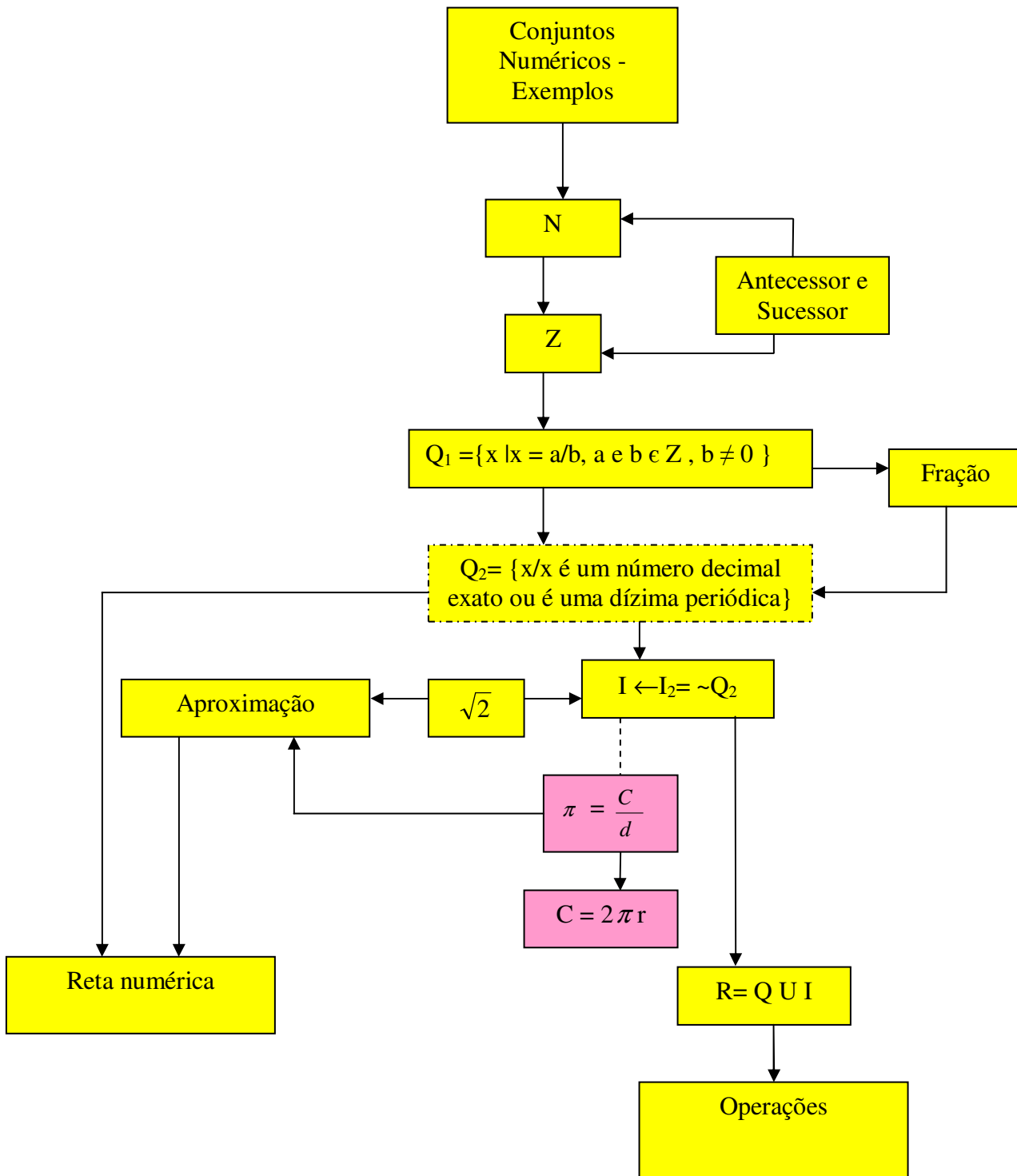


Figura 17: Andrini – 7ª série do Ensino Fundamental

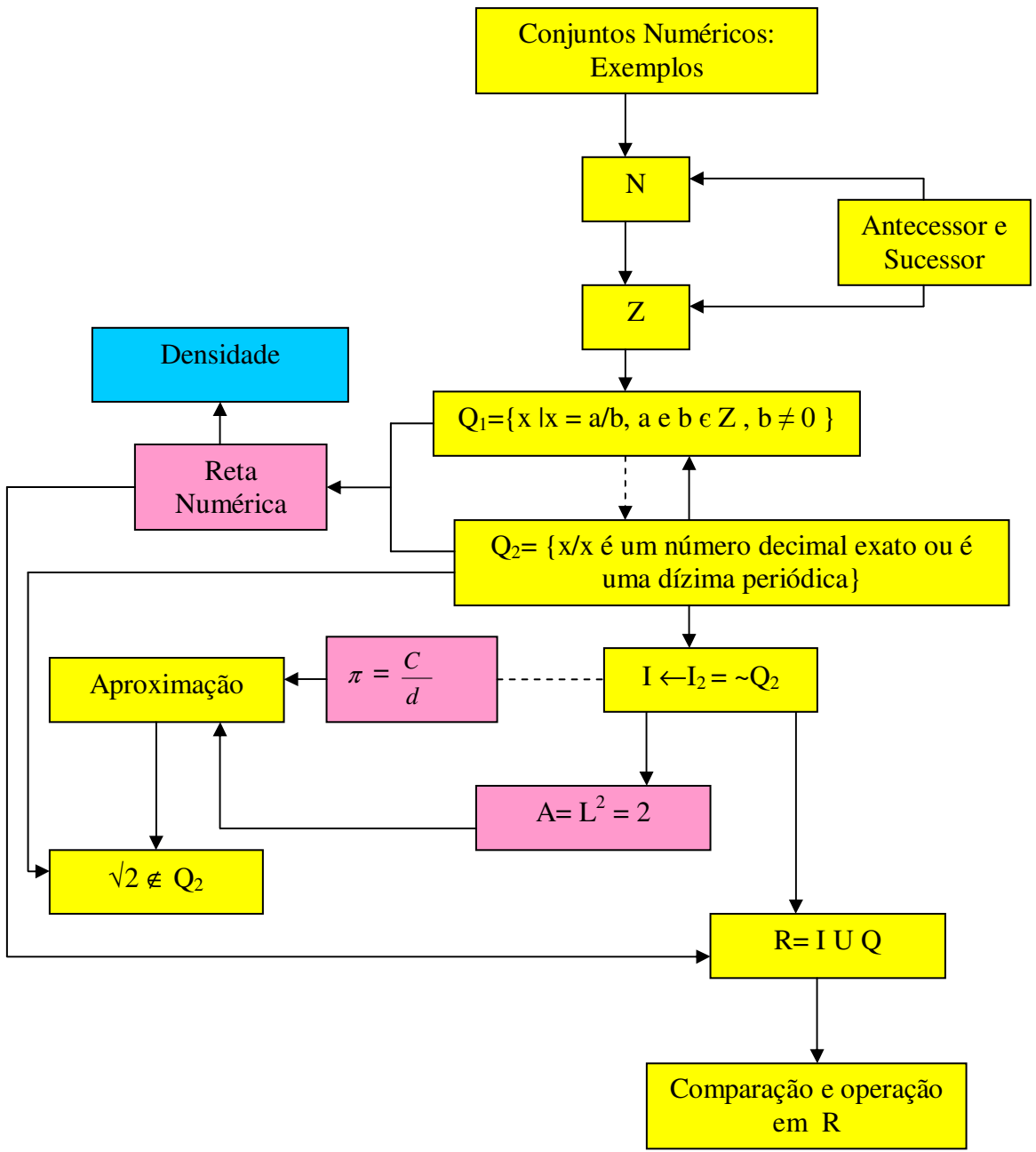


Figura 18: Dante – 7ª série do Ensino Fundamental

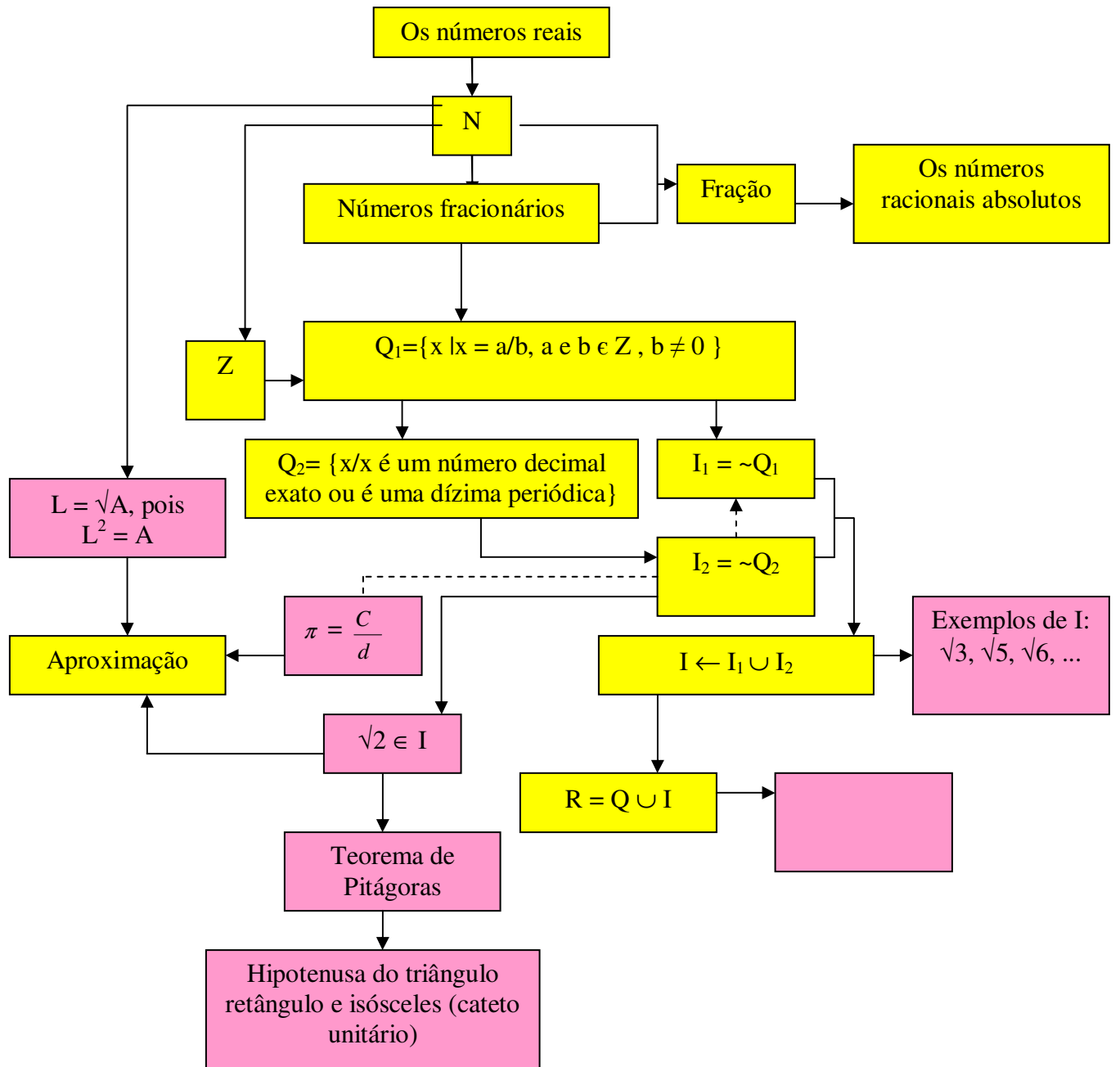


Figura 19: Bianchini – 7ª série Ensino Fundamental

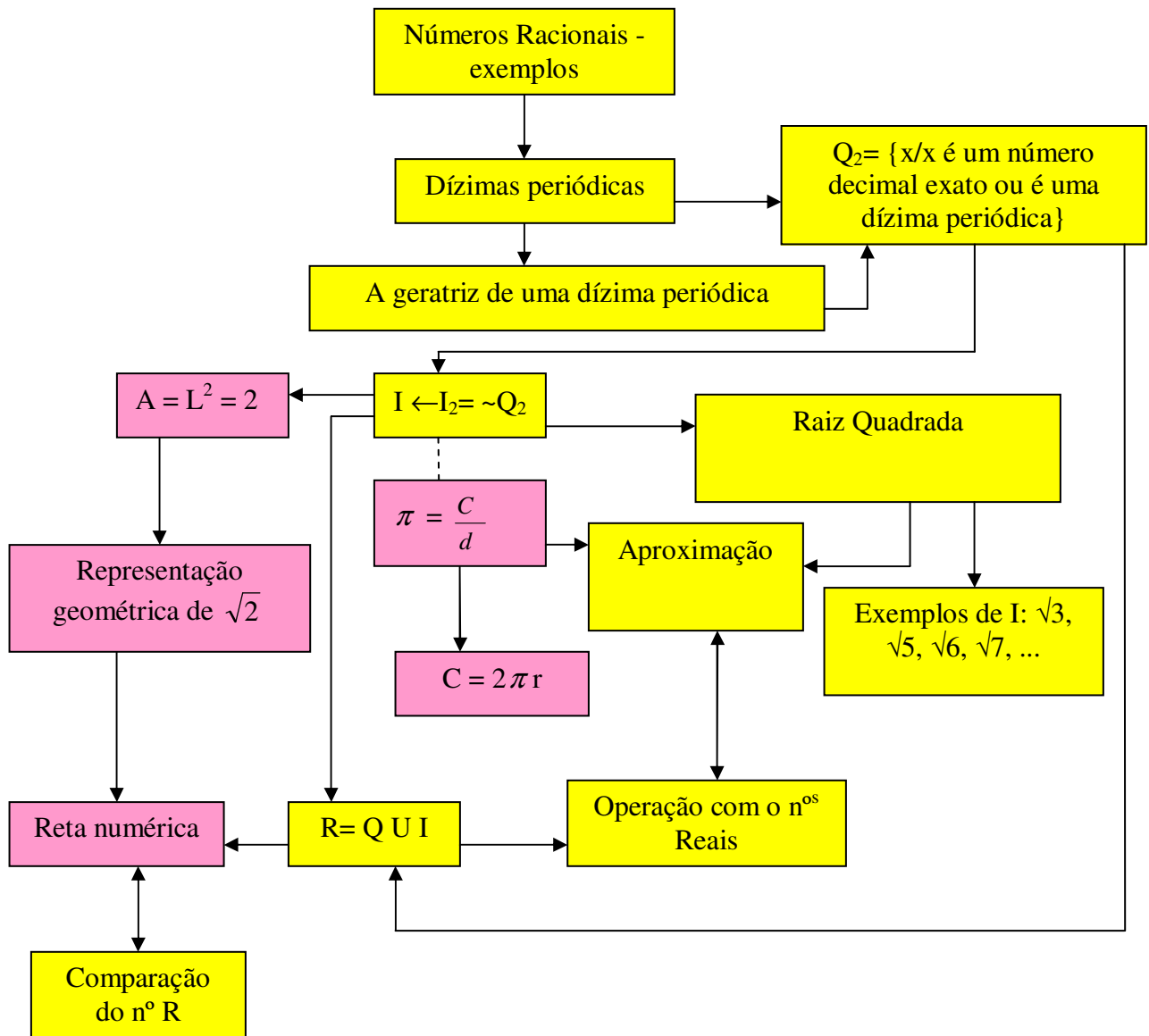


Figura 20: Centurión, Jakubo e Lellis- 7ª série Ensino Fundamental

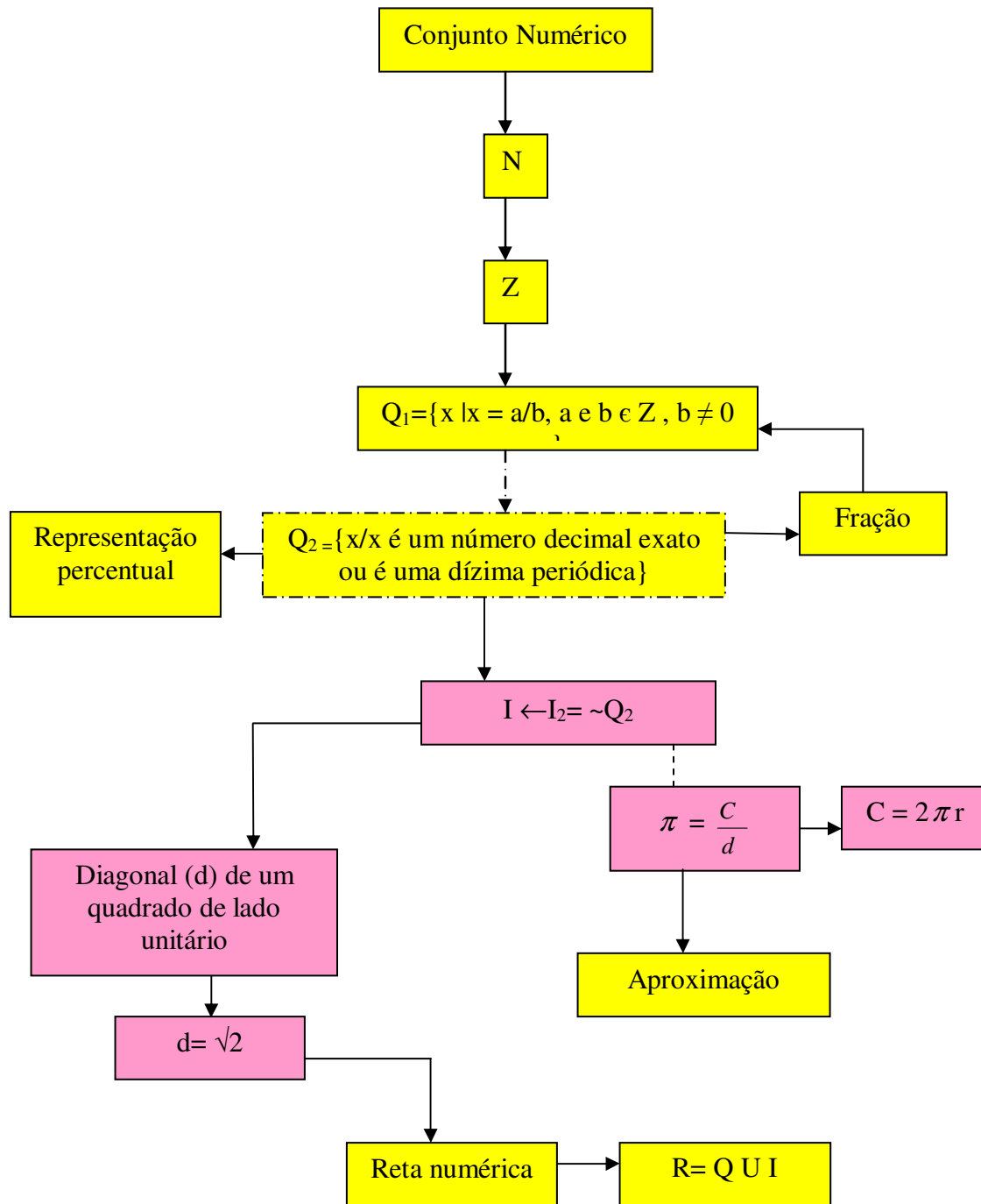


Figura 21: Bonjorno – 7ª série Ensino Fundamental

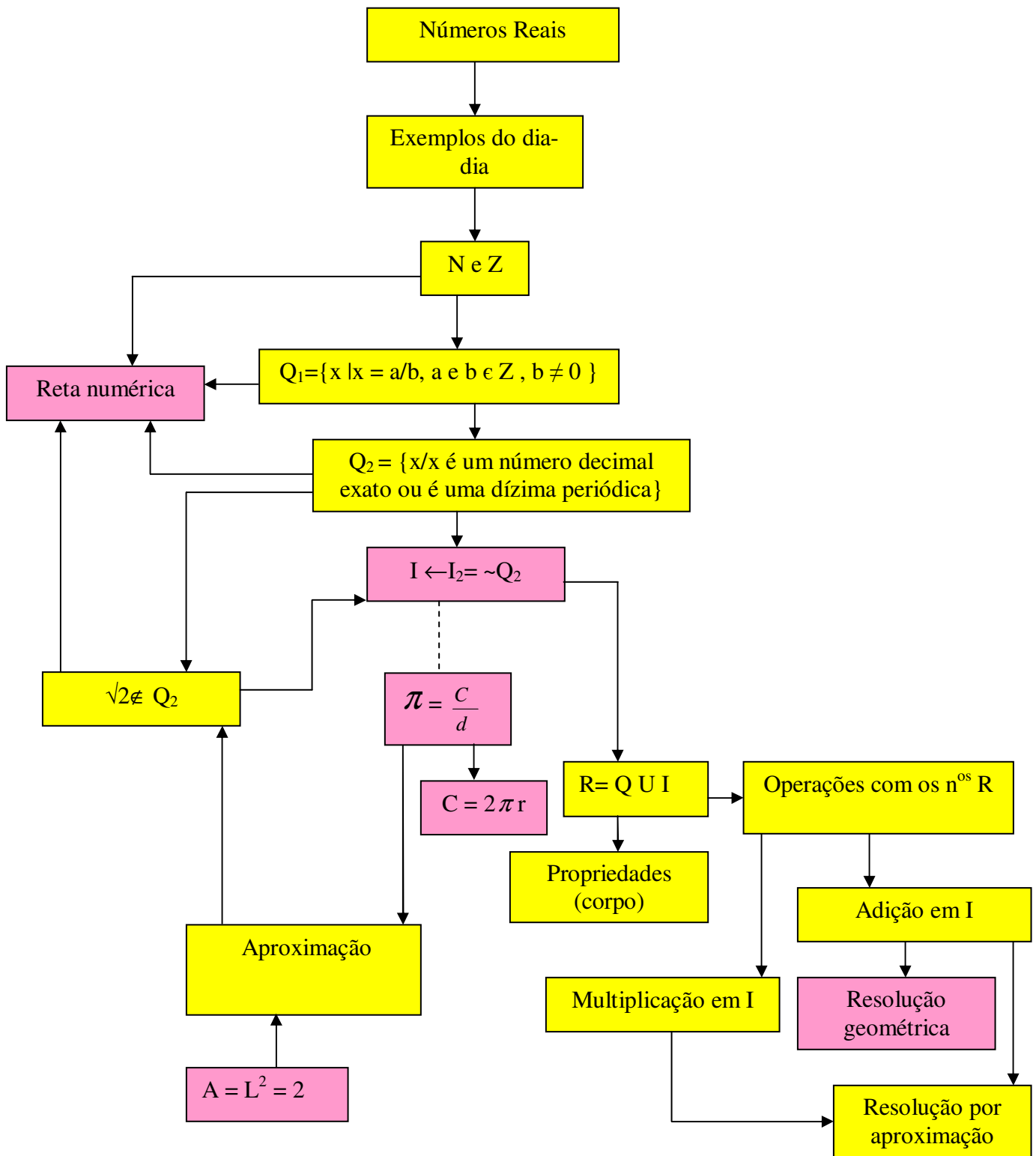
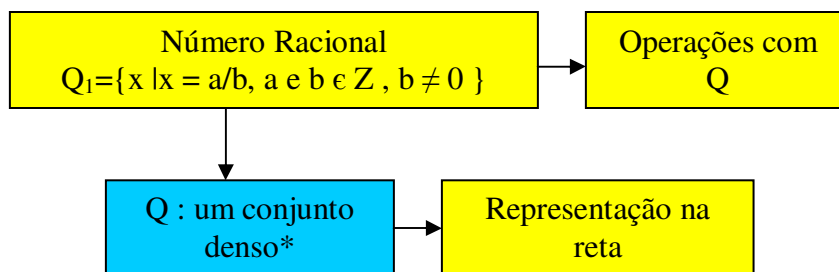


Figura 22: Projeto Araribá – 7ª série ensino Fundamental



**Obs.:** Não há registro sobre os números irracionais e números reais em nenhum dos volumes da coleção do ensino fundamental.

Figura 23: Bigode – 7ª série Ensino Fundamental

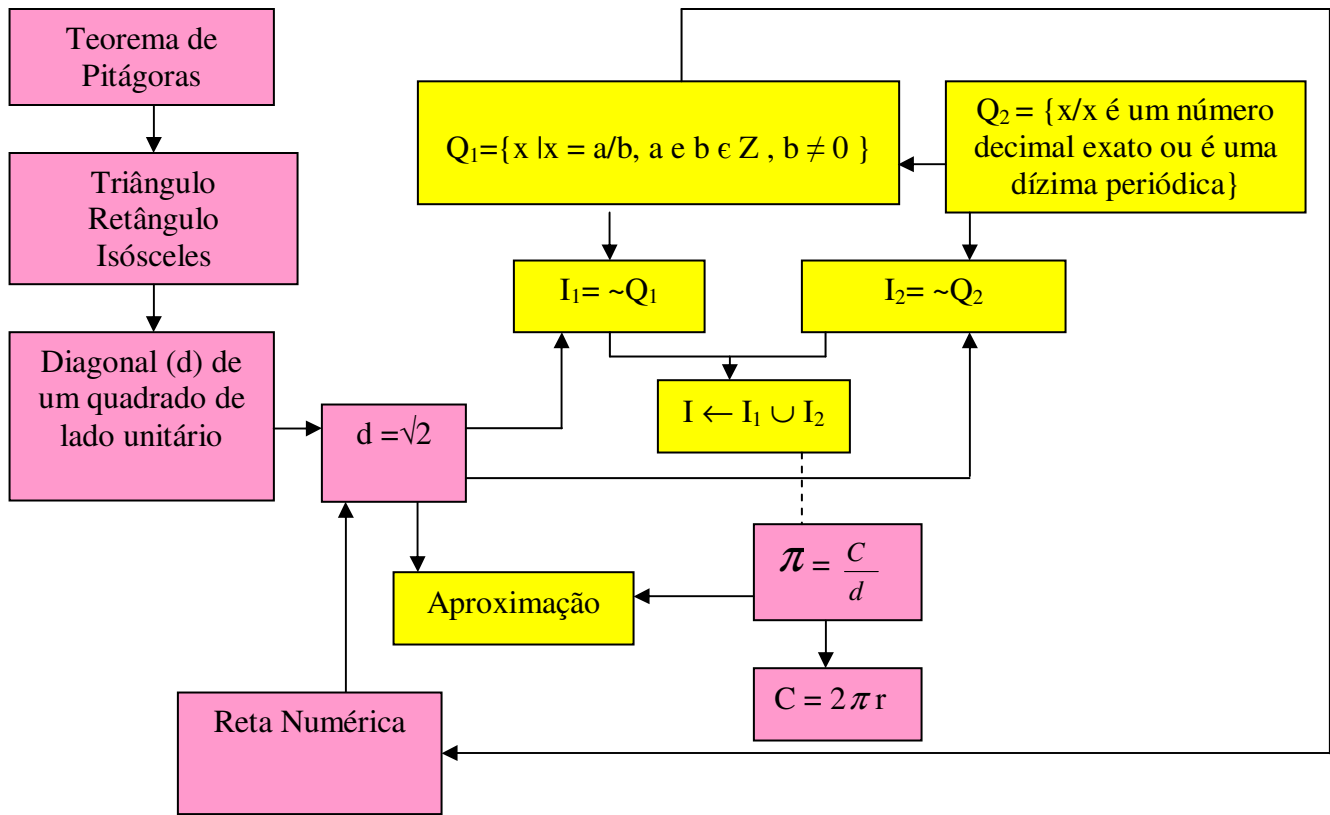


Figura 24: Bordeaux; Rubinstein; França; Ogliar; Portela – 7ª série Ensino Fundamental

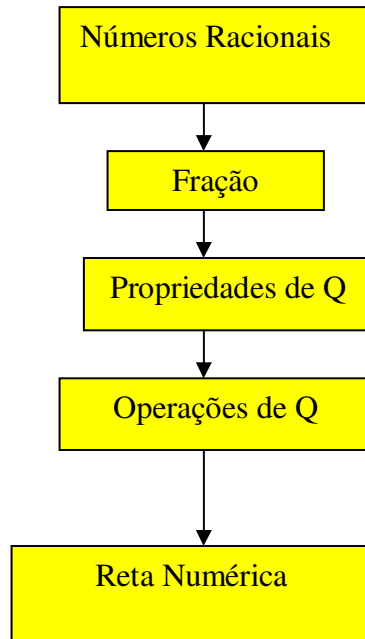
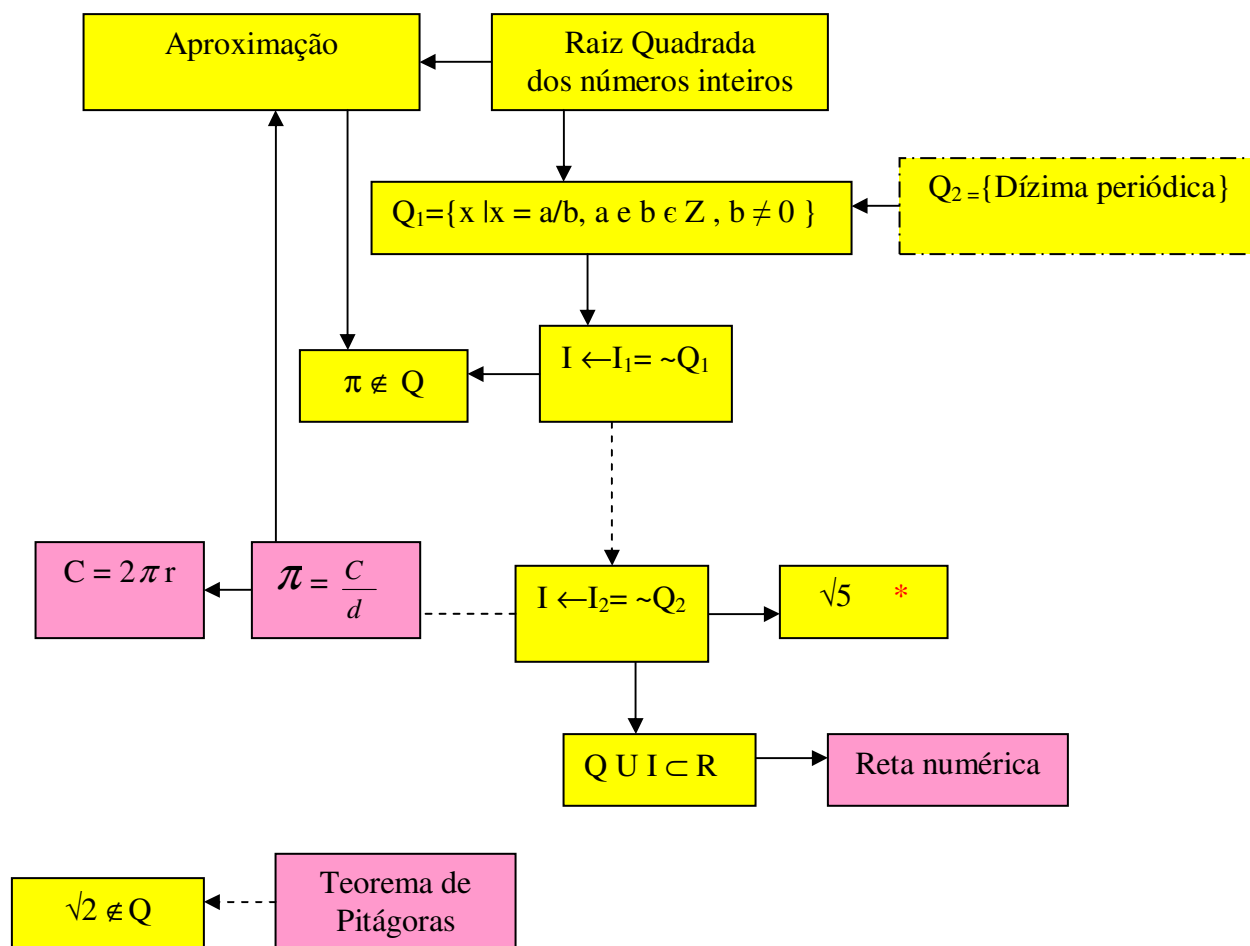


Figura 25: Vidigal; Rego; Barbosa; Spira -7ª série Ensino Fundamental



\* **Obs.:** O autor sugere calcular  $\sqrt{5}$  usando a calculadora. Depois multiplica o resultado obtido por ele próprio e verifica que o produto não é igual a 5. Sugere, com base na atividade que  $\sqrt{5} \notin Q$ .

Figura 26: Souza; Spinelli – 7ª série Ensino Fundamental.

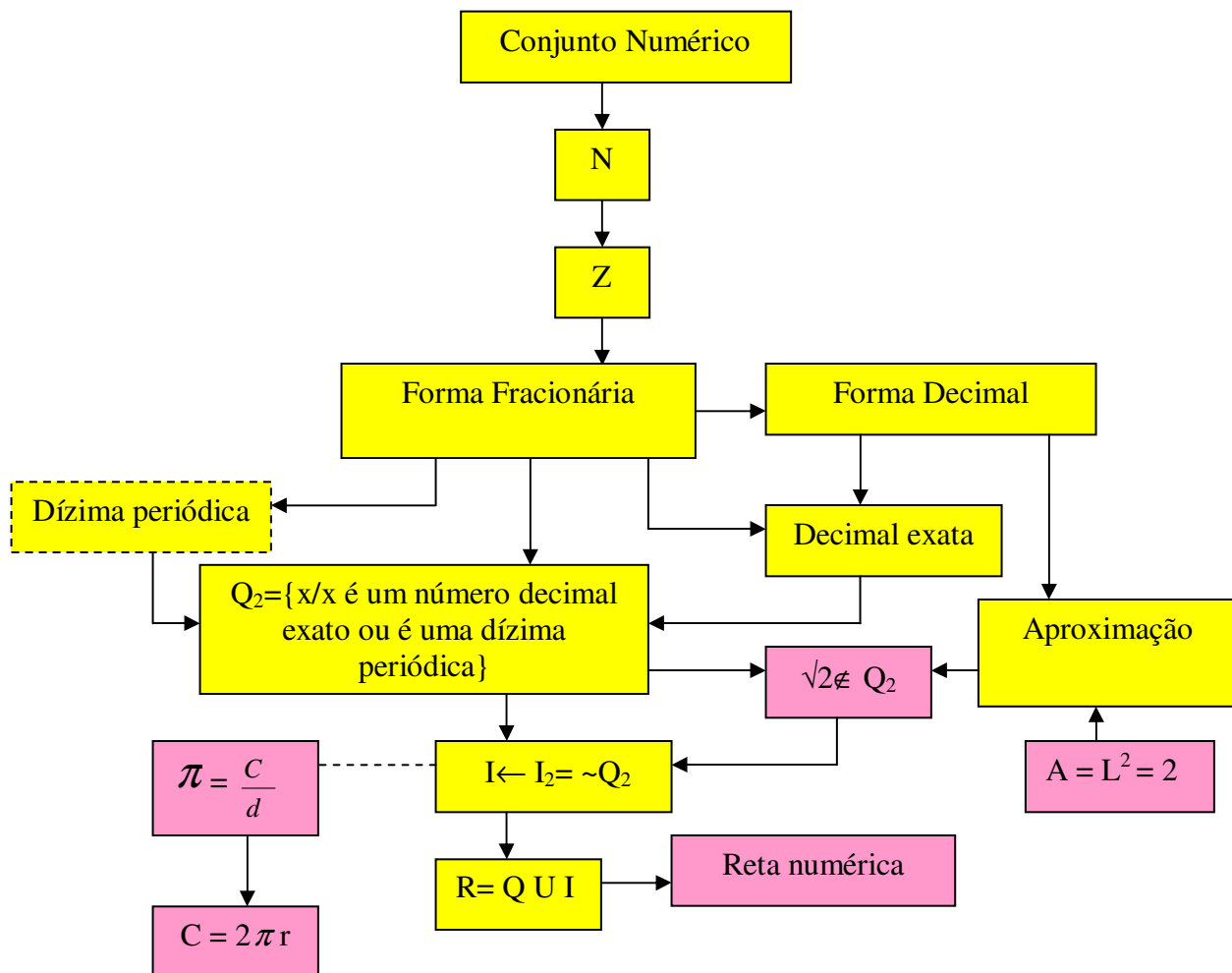


Figura 27: Cavalcante -. 7ª série Ensino Fundamental

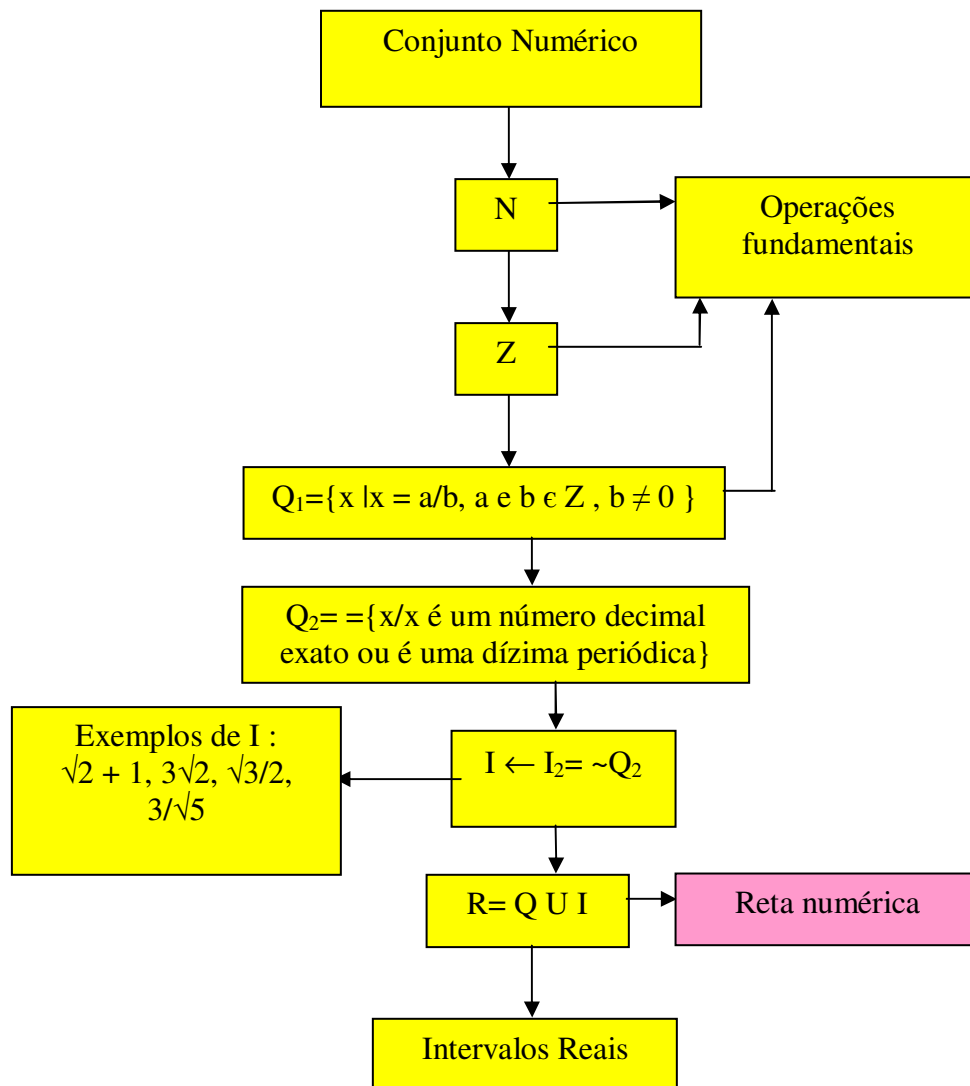


Figura 28: Iezzi; Murakami -1ºano do Ensino Médio

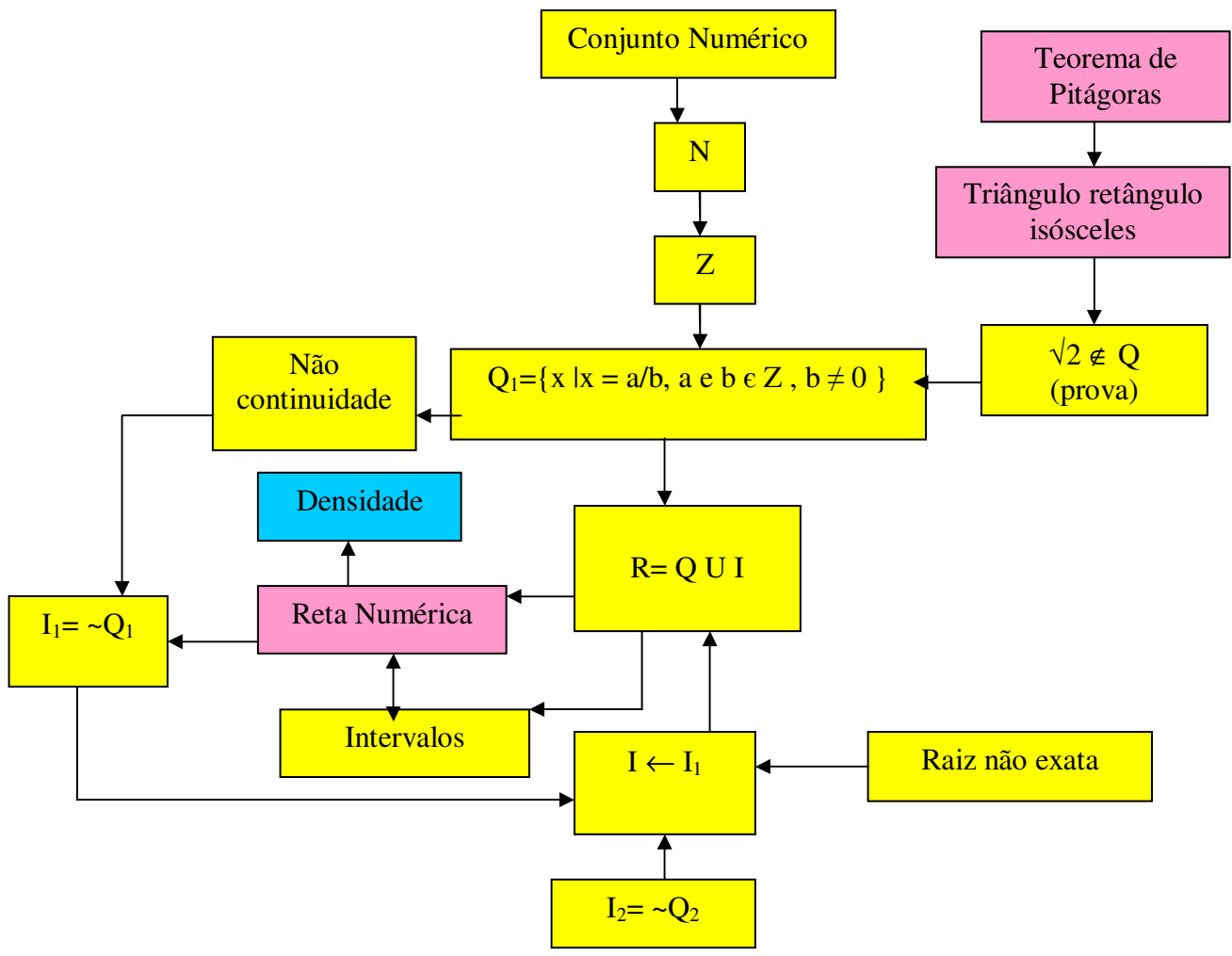


Figura 29: Bianchini - 1ºano do Ensino Médio

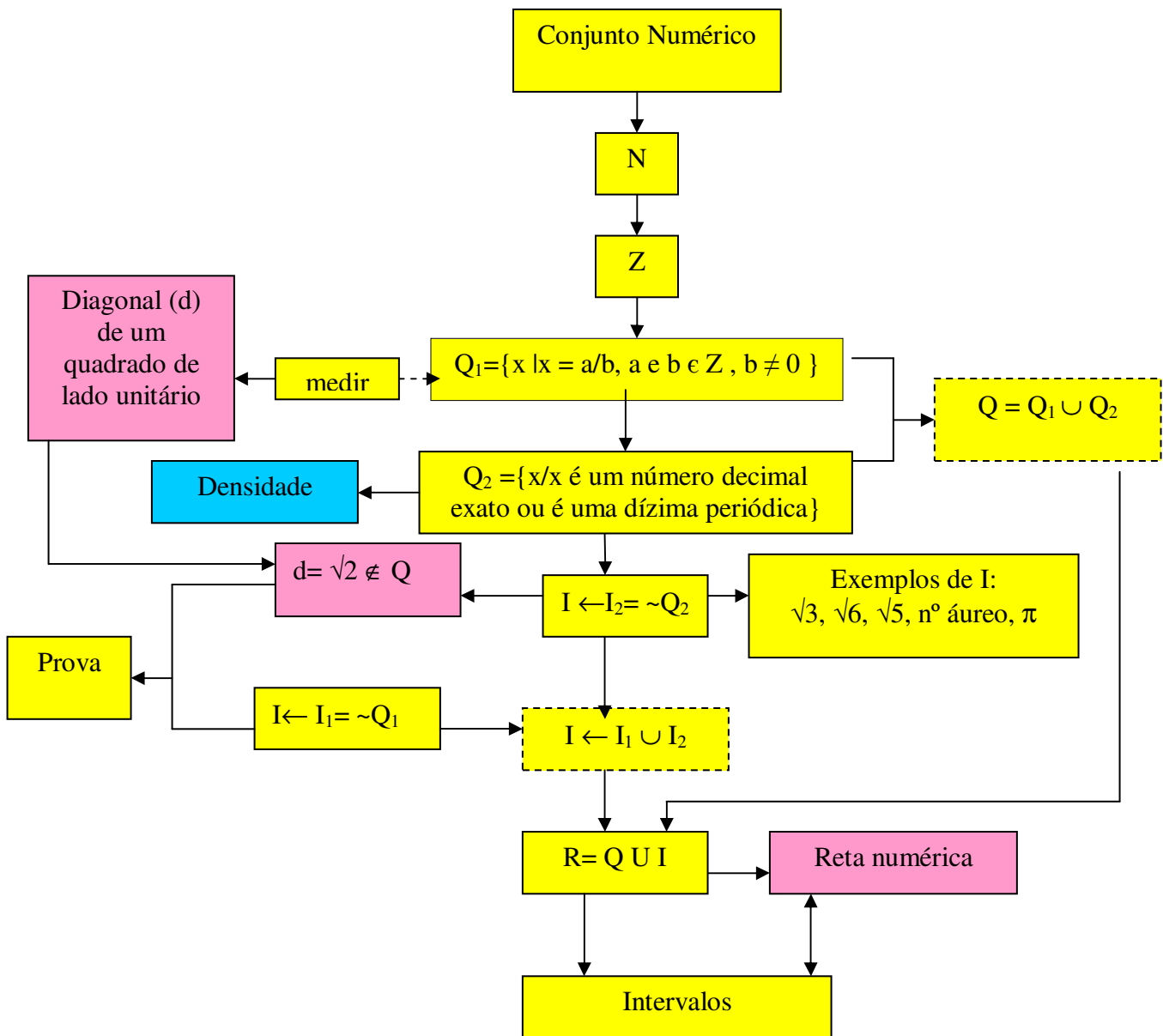


Figura 30: Smole - 1ºano do Ensino Médio

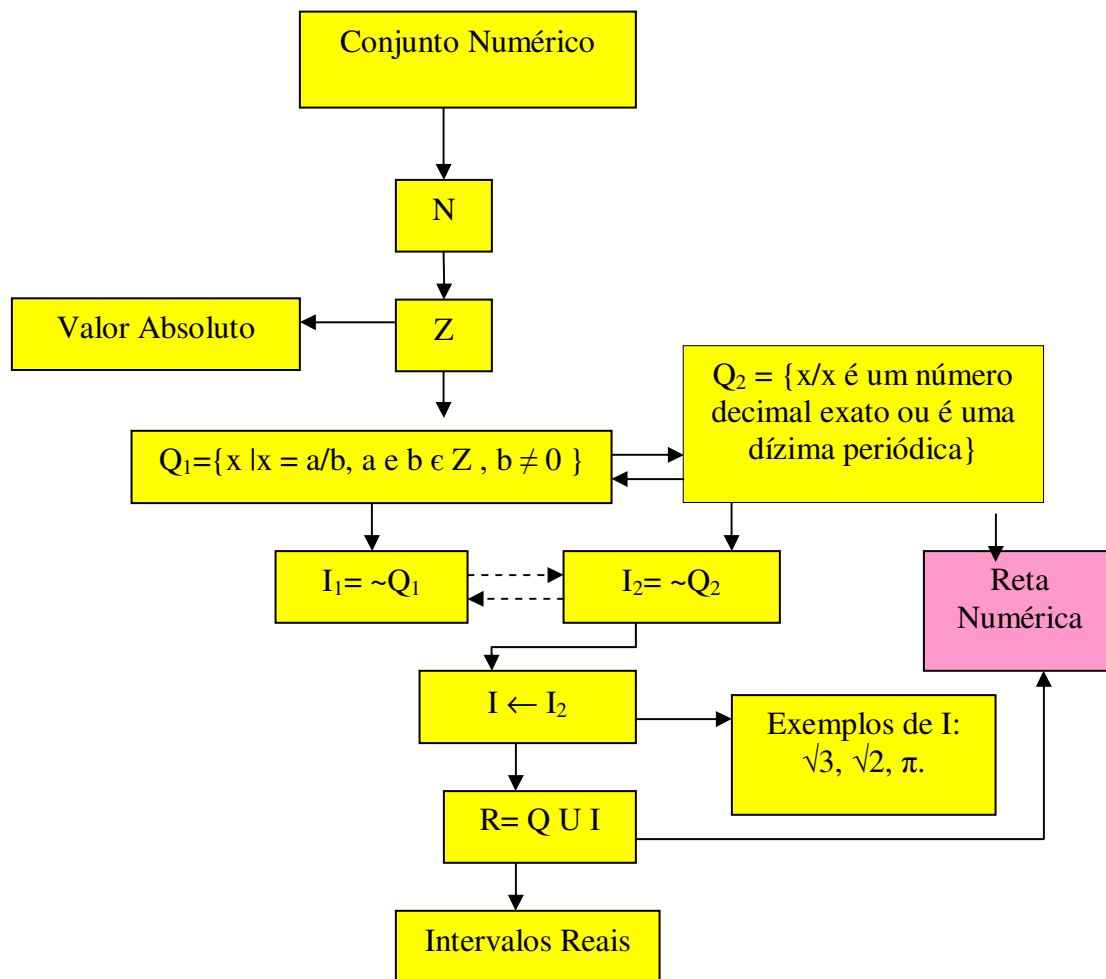


Figura 31: Iezzi; Dolce - 1ºano do Ensino Médio

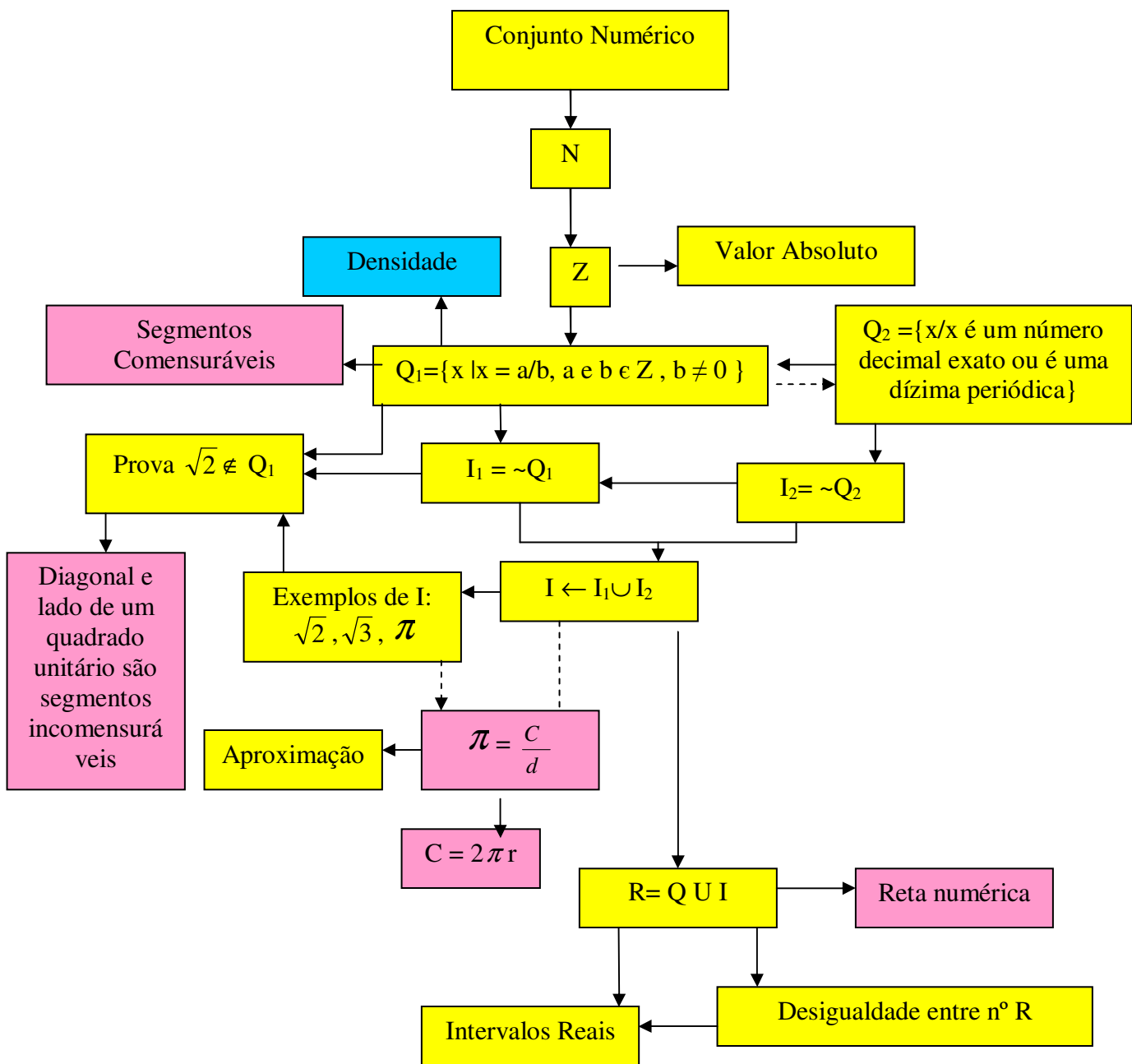


Figura 32: Dante -1ºano do Ensino Médio

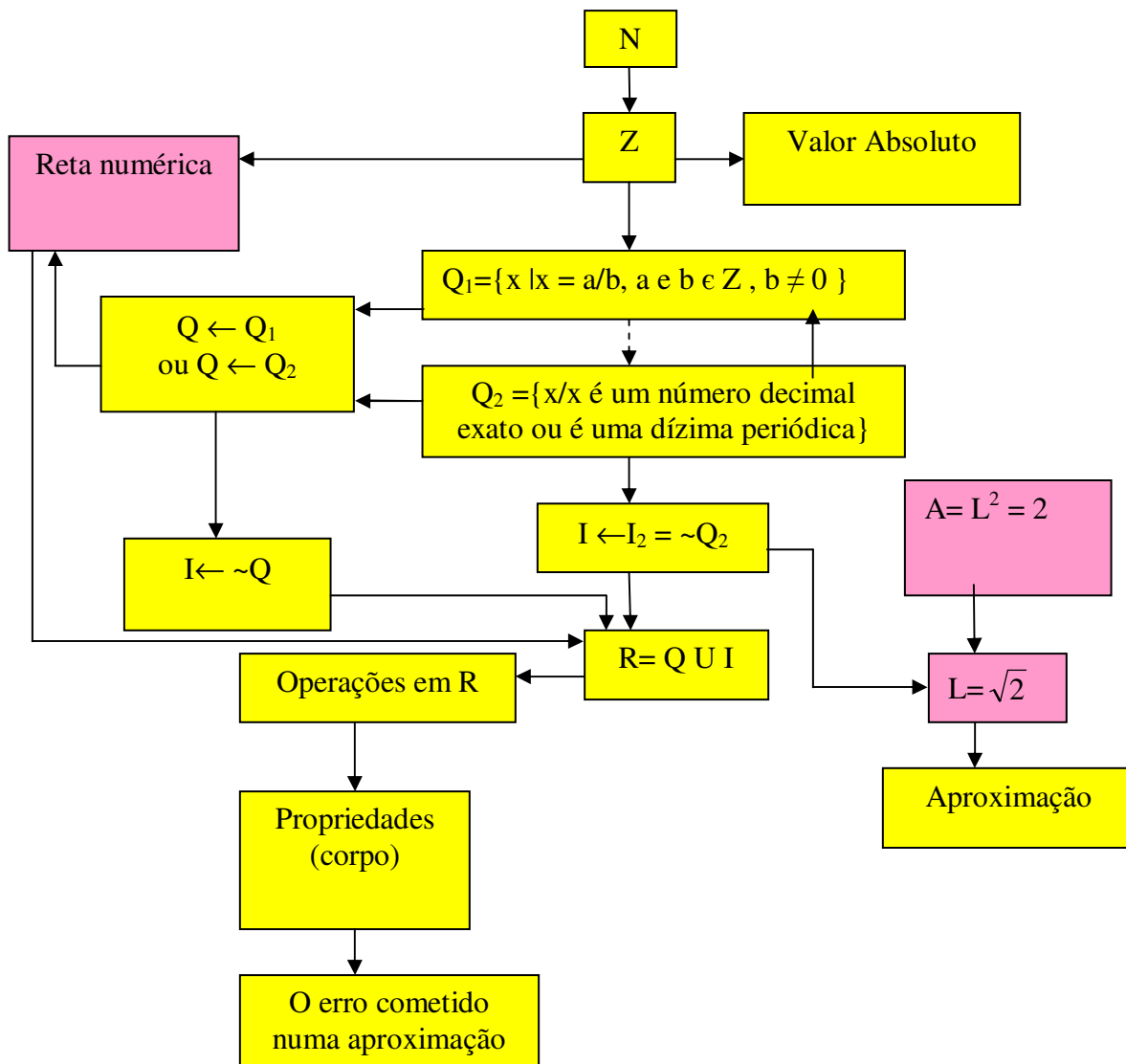


Figura 33: Iezzi; Dolce; Machado – 7ª série Ensino Fundamental

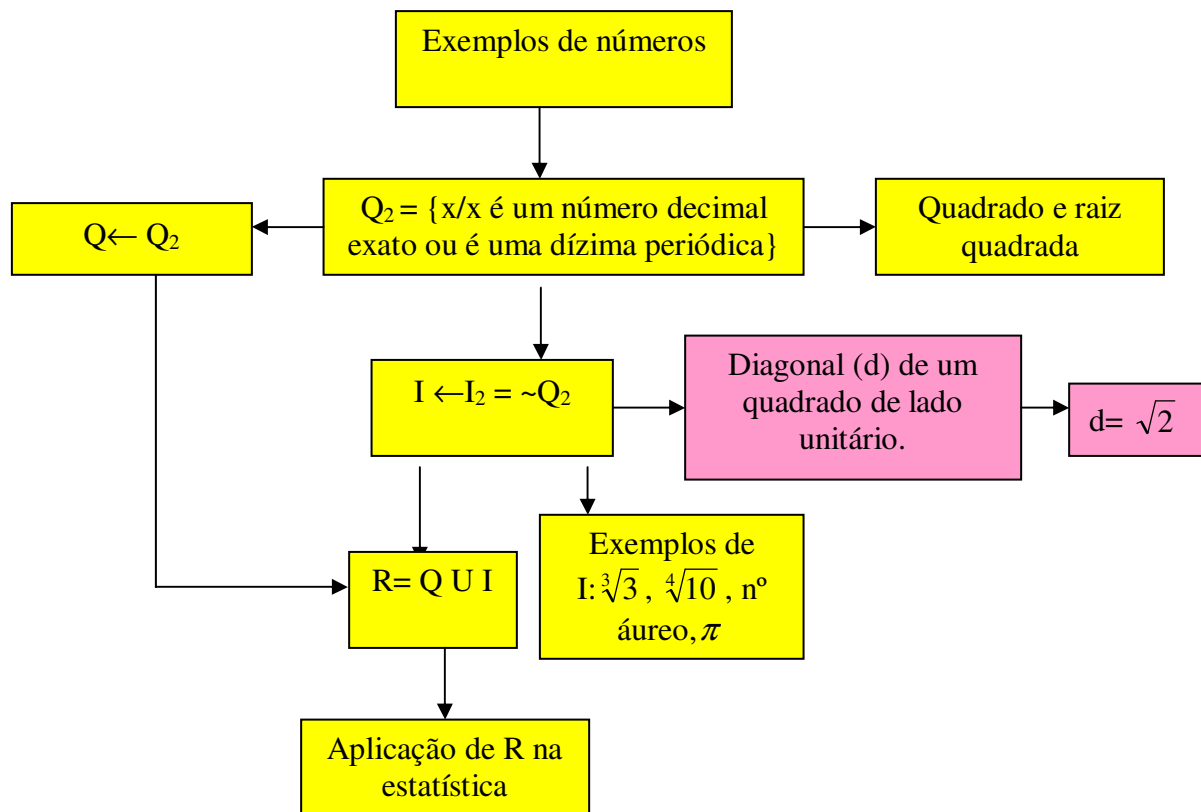


Figura 34: Mori ; Onaga, -7ª série Ensino Fundamental

## CONCLUSÃO

Em certa época pensou-se que a matemática se ocupava do mundo que nossos sentidos percebem e foi somente no século dezenove que a matemática pura se libertou das limitações sugeridas por observações da natureza (Boyer, 2002). A evolução histórica dos números reais se deu num período longo. Desde a “descoberta” pelos gregos dos segmentos incomensuráveis até construção dos números reais por Dedekind se passaram cerca de 2500 anos. A construção dos números reais se realiza efetivamente no âmbito do Cálculo e da Análise. A história do número real e a da noção de limite se confundem. A proposta de construção dos números irracionais a partir de séries convergentes de racionais foi efetuada por Cauchy. No entanto, como a sua noção de limite estava fundamentada num conceito a priori de número real, sua proposta apresentava uma característica paradoxal. Weierstrass “resolveu” a questão da circularidade presente no raciocínio de Cauchy identificando o número com a própria seqüência que “converge” para ele. Entretanto, a solução definitiva para a construção dos números reais de forma independente da noção de limite veio com Dedekind. Com o seu postulado de continuidade, e a partir da noção algébrica de corte, Dedekind constrói formalmente o conjunto dos números reais. Cantor e B. Russel desenvolvem também outras caracterizações dos números reais.

Assim, com base na revisão histórica que fizemos, podemos notar o quão difícil e tortuoso foi o caminho histórico dos números reais. Percebe-se ainda o quanto foi importante o desenvolvimento do Cálculo e da Análise para a solução definitiva da construção dos números reais. Diante disso surge uma questão natural: como vencer o desafio da construção dos números reais na educação básica, uma vez que não dispomos das contribuições do Cálculo e da Análise?

Tendo o mapa como instrumento metodológico e alguns livros didáticos<sup>1</sup> nacionais da educação básica como fonte de pesquisa, procuramos responder essa pergunta.

O que observamos, em linhas gerais, foi uma grande predominância, quase um monopólio, do universo algébrico na apresentação dos números reais. O mapeamento realizado mostrou uma ausência quase total, nos textos didáticos, de tópicos como, por

---

<sup>1</sup> Foram analisados 14 livros de 7ª série do Ensino fundamental e 7 livros do 1º ano do Ensino Médio, séries destinadas para o estudo dos números reais.

exemplo, densidade dos números reais, a noção de limite e a continuidade para a construção da reta numérica. Qual o motivo desta omissão? Qual a dificuldade em se tratar, na educação básica, esses assuntos?

Não é objetivo desse trabalho em responder a estas últimas perguntas, no entanto não podemos perder de vista o motivo pelo qual o assunto “número real” está inserido nos programas do ensino da educação básica. Passemos agora ao relato dos principais resultados observados com mapeamento que fizemos.

O primeiro fato observável é que apenas quatro livros ( ver figuras dos mapas n<sup>os</sup>: 18, 31, 32, 33) procuram mostrar a equivalência de  $Q_1 = \{x \mid x = a/b, a \text{ e } b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$  e  $Q_2 = \{x \mid x \text{ é um número decimal exato ou } x \text{ é dízima periódica}\}$ . Os demais livros realizam um percurso de mão única, isto é, apresentam somente as implicações  $Q_1 \rightarrow Q_2$  ou  $Q_2 \rightarrow Q_1$  (ver figuras dos mapas n<sup>os</sup>: 14, 15, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 26, 28, 30) ou apresentam somente  $Q_1$  ou  $Q_2$  (ver figuras dos mapas n<sup>os</sup>: 20, 23, 25, 27, 29, 34).

No que se refere aos números irracionais pôde-se perceber que somente quatro livros (ver figuras dos mapas n<sup>os</sup> 19, 24, 30, 32) fazem, simultaneamente, a caracterização destes como  $I_1 = \{x \mid x \text{ não é da forma } a/b, a \text{ e } b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$  ou como  $I_2 = \{x \mid x \text{ é um número decimal infinito que não é dízima periódica}\}$ . Os demais livros apresentam o conjunto dos números irracionais usando apenas uma das caracterizações:  $I_1$  ou  $I_2$ . Outro ponto observável foi à caracterização do número irracional  $\pi$  a partir de experiências relacionando o comprimento da circunferência de um objeto com seu diâmetro. Cabe ressaltar que esta abordagem, se não for tomado o devido cuidado, pode reforçar a atitude de identificar o número  $\pi$  com uma de suas aproximações ( $\pi = 3,14$ , por exemplo).

E, por fim, pôde-se perceber, de forma predominante, a presença de um raciocínio circular na definição dos números reais. O conjunto dos números reais é caracterizado, em geral, pela união dos conjuntos dos números irracionais e o conjunto dos números racionais. Mas o que são números irracionais? São aqueles (números reais – esse fato é omitido na definição) que não são racionais.

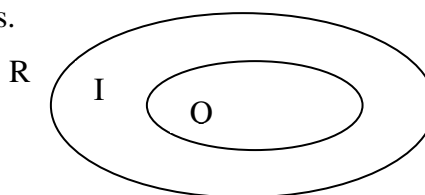


Figura 34: Representação Geométrica dos Conjuntos.

É claro que percebemos a dificuldade de se romper com o raciocínio circular na educação básica (o caminho histórico deste conhecimento deixa isso bem evidente), mas, por outro lado não podemos deixar de registrar a atitude diferenciada do livro didático Matemática Hoje é Feita Assim, do professor Bigode. Em sua coleção para o ensino fundamental, os números reais são completamente ignorados, fala-se apenas do número racional e de suas propriedades e operações. Estaria errado o professor, ou seria realmente um exagero pretender a construção dos números reais no ensino fundamental (ou mesmo no ensino médio)? Números reais: pra quê, pra quem e por quê? Eis aí algumas questões que devemos refletir.

## OBRAS CITADAS

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/SEF, 1998a.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/ SEF, 1998b.

Brasil. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica – Brasília: MEC; SEMTEC, 2002.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2ª edição. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2002.

BORGES, J. L. *El Hacedor*. Madrid: Alianza Editorial AS, 1972.

CARAÇA, B.de J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. 2ª edição. Lisboa: Grávida, 1998.

DIAS, M. da S. *Correlação da Lógica e do Histórico no Ensino dos Números Reais*. Dissertação de Mestrado. São Paulo: Faculdade de Educação- USP, 2002.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

LOCH, R. E. N. *CARTOGRAFIA – Representação, Comunicação e Visualização de Dados Espaciais*. Florianópolis: Editora da UFSC, 2006.

MOURA, L. de O. G. O. *O discreto e o contínuo no ensino de Matemática*. In: Machado, N.J. e Cunha, M. O. *Linguagem, conhecimento, ação: ensaios de epistemologia e didática*. São Paulo: Escrituras Editora, 2003.

PENTEADO, C. B. *Concepção do professor do Ensino Médio relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade*. Dissertação de Mestrado. São Paulo: Faculdade de Educação- USP, 2004.

\_\_\_\_\_. *Proposta de Emersão das Idéias Básicas do Cálculo no Ensino Básico de Matemática*. Projeto de Pesquisa. Universidade Federal Fluminense, Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Niterói, 2003.

REZENDE, W.M., *Uma Análise Histórica - Epistêmica da Operação de Limite*. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro: IEM-USU, 1994.

REZENDE, W.M., *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica*. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo: USP, 2003.

SANTOS, B. de S. *Para um Novo Senso Comum: a Ciência, o Direito e a Política na Transição Paradigmática. A Crítica da Razão Indolente: Contra o Desperdício da Experiência.* São Paulo: Editora Cortez, 2000.

## OBRAS CONSULTADAS

ANDRINI, A. e VASCONCELOS M. J. *Praticando Matemática*. 7ª série. São Paulo: Editora do Brasil, 2002.

BARRETO FILHO, B.; SILVA, C. X. *Matemática Aula por Aula*. Vol 1- Ensino Médio. São Paulo: FTD, 2003.

BARROSO, J. M. Projeto Araribá. *Matemática*. 7ª série. São Paulo: Moderna, 2006.

BIANCHINI, E ; PACCOLA, H. *Matemática*. 7ª série. São Paulo: Moderna, 2002.

BIANCHINI, E. PACCOLA, H. *Matemática*. Vol.1 – Ensino Médio. São Paulo: Editora Moderna, 2000.

BIGODE, A J. L. *Matemática hoje é feita assim*. 7ª série. São Paulo: FDT, 2002.

BONJORNO, J. R. *Matemática e fazendo a diferença*. 7ª série. São Paulo: FDT, 2006.

BORDEAUX, A. L. R.; C. OGLIARI, E; PORTELA, G. *Matemática na vida e na escola*. Vol 3. 7ª série. São Paulo: Editora do Brasil, 1999.

CAVALCANTE, L. G; SOSSO, J.; VIEIRA, F. POLI, E. *Para saber Matemática*. 7ª série. São Paulo: Saraiva, 2006.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M. *Novo Matemática na medida certa*. 7ª série. São Paulo: Scipione, 2003.

DANTE, L. R. *Tudo é matemática*. 7ª série. São Paulo: Ática, 2005.

DANTE, L. R. *Matemática*. 1º série – Ensino Médio. São Paulo: Ática, 2004.

GIOVANNI, J. R. e GIOVANNI G. J. R. *Matemática: Pensar & Descobrir*. 7ª série. São Paulo: FDT, 2005.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. *Matemática e realidade*. 7ª série. São Paulo: Atual, 2005.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSEZAJN, D.; PÉRIGO, R. ALMEIDA, Nilze de. Ogawa, Artur Kenji. *Matemática: ciência e aplicações*. 1º série – Ensino Médio. São Paulo: Atual, 2004

IEZZI, G e MURAKAMI, C. *Fundamentos da Matemática Elementar*. Vol1- Ensino Médio. São Paulo: Atual, 1993.

MACHADO, A. dos S. *Matemática Temas e Metas*. Vol1-Ensino Médio. São Paulo: Atual, 1988.

MORI, I.; ONAGA, D. S. *Matemática: Idéias e Desafios*. 7ª série. São Paulo: Saraiva, 2005.

SOUZA, M. H. S.; SPINELLI, W. *Matemática*. 7ª série. São Paulo: Ática, 2002.

SMOLE, K.S e DINIZ, M. I. *Matemática*. Vol1-Ensino Médio. São Paulo:Saraiva, 2001.

VIDIGAL, A.; REGO, C. A.; BARBOSA, M. das G. G. B.; SPIRA, M. *Matemática e você*. 7ª série. Belo Horizonte: Formato Editorial, 2002.