# Geometria Básica - Lista 1

## 1 Aquecimento

**1.1)**Dado um triângulo $ABC$, onde $\overline{AB} = \overline{BC}$. Tomam-se dois pontos $M$ e $N$ em $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Demonstre que se $\angle MCA = \angle NAC$, então $\overline{AM} = \overline{CN}$.

**1.2)**Mostre que se um triângulo possui duas alturas iguais então ele é isósceles.

**1.3)**Porque LLA não é um caso de congruência de triângulos?

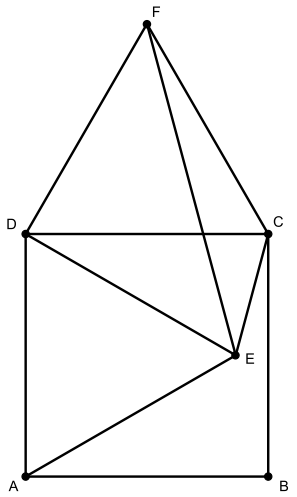
**1.4)**Sejam $M$ e $N$ pontos médios, respectivamente, dos lados $AB$ e $AC$ de um triângulo $ABC$. O segmento $MN$ é chamado de base média, relativa ao lado $BC$. Mostre que $MN$ é paralela a $BC$ e que $2\overline{MN} = \overline{BC}$.

**1.5)**Sejam $ABCD$ um trapézio com $AB$ paralelo a $CD$, $M$ e $N$ os pontos médios dos lados oblíquos $AD$ e $BC$. Use o exercício anterios para concluir que $2\overline{MN} = \overline{AB} + \overline{CD}$.

**1.6)**Prove que num triângulo retângulo $ABC$ retângulo em $A$, a mediana $AM$ relativa a hipotenusa mede metade da hipotenusa.

## 2 Problemas básicos

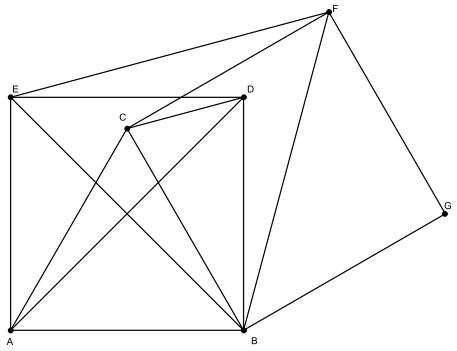
**2.1)**Seja $ABCD$ um quadrado e $ADE$ e $CDF$ triângulos equiláteros como na figura abaixo. Calcule os ângulos do triângulo $CFE$.




**2.2)**Sejam $ABC$ um triângulo equilátero, e $ABDE$ e $BCFG$ quadrados como na figura abaixo.

(a) Encontre os ângulos do triângulo $ACD$.

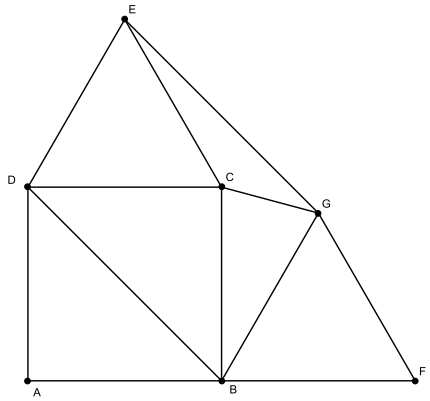
(b) Calcule o ângulo $\angle EBF$ e prove que $EBF$ é um triângulo equilátero.



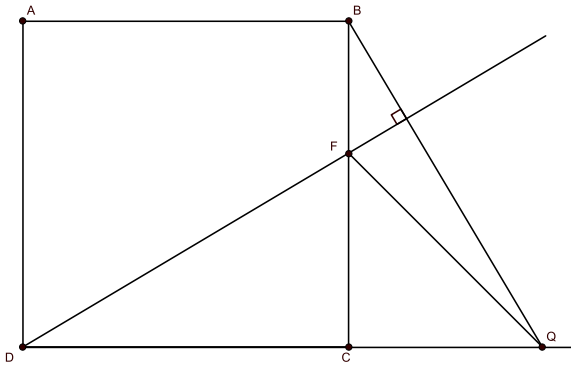

**2.3)**Sejam $ABCD$ um quadrado e $CDE$ e $BFG$ triângulos equiláteros todos com o mesmo lado. Se $A$, $B$ e $F$ são colineares.

(a) Prove que $DBGE$ é um paralelogramo. (Dica: veja que os ângulos $\angle DBG$ e $\angle EDB$ são suplementares.)

(b) Calcule os ângulos do triângulo $ECG$.




**2.4)**Seja $ABCD$ um quadrado e $F$ um ponto qualquer do lado $\overline{BC}$. A reta por $B$ perpendicular a reta $DF$ intersecta a reta $DC$ em $Q$. Calcule o ângulo $\angle FQC$. (Dica: prove que $CDF \simeq CBQ$)




**2.5)**$ABCD$ é um paralelogramo, e $ABF$ e $ADE$ são triângulos equiláteros contruídos exteriormente ao paralelogramo. Prove que $FCE$ também é equilátero.

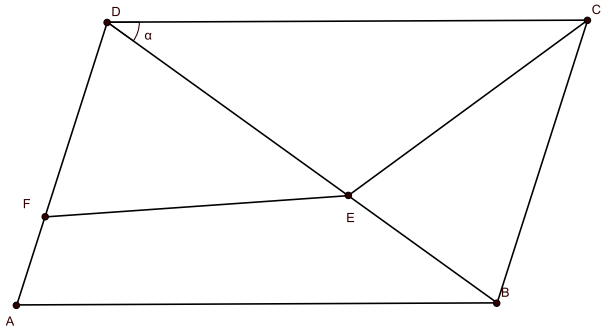
**2.6)**Dados três pontos $A$, $B$, $C$ sobre uma reta $l$, são construídos triângulos equiláteros $ABD$ e $BCE$ em um mesmo semi-plano com respeito a $l$. Se $M$ e $N$ são os pontos médios de $AE$ e $CD$, respectivamente, mostre que o triângulo $BDE$ é equilátero.

**2.7)**Sejam $ABCD$ um paralelogramo, $E$ um ponto na diagonal $\overline{BD}$ e $F$ um ponto no lado $\overline{AD}$, tais que $\overline{BC} = \overline{CE} = \overline{ED} = \overline{EF}$. Sabendo que vale $\overline{AB} = \overline{AF} + 2\overline{BE}$ e que $\angle BDC = \alpha$:

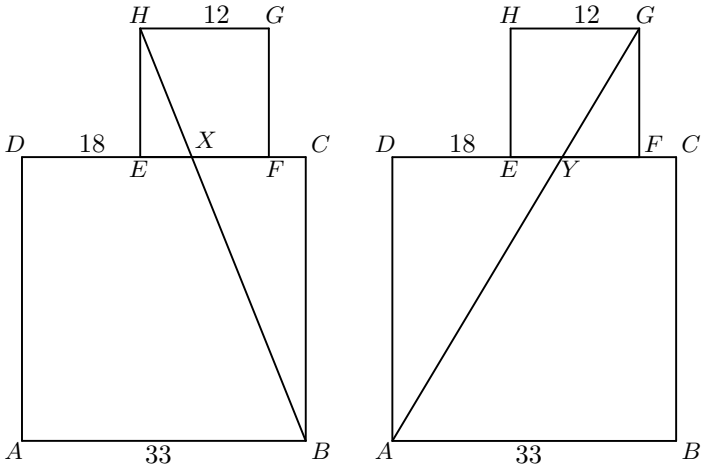
(a) Calcule, em função de $\alpha$, os ângulos $\angle ECD$, $\angle CEB$, $\angle CBE$, $\angle EDF$ e $\angle EFD$.

(b) Prove que os triângulos $DEF$ e $ECB$ são congruentes, conlcua que $\overline{FD} = \overline{EB}$.

(c) Prove que $\overline{DB} = \overline{AB}$ (Lembre da hipótese que $\overline{AB} = \overline{AF} + 2\overline{BE}$.) e calcule $\alpha$.




**2.8)**Sejam $ABCD$ e $EFGH$ quadrados de lados 33 e 12 com $EF$ suportado no laodo $DC$ (como na figura abaixo). Seja $X$ e $Y$ os pontos de interseção dos segmentos $HB$ e $AG$ com $DC$. Suponha que $\overline{DE} = 18$.



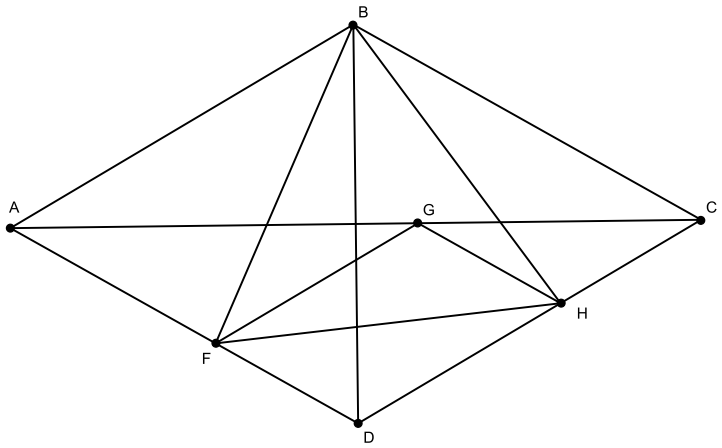

Calcule os comprimentos dos segmentos $\overline{EX}$ e $\overline{EY}$, conclua que $X$ e $Y$ são o mesmo ponto.

**2.9)**Seja $ABCD$ um paralelogramo, e são contruídos ,exteriormente ao paralelogramo, quatro quadrados, cada um com um lado em comum com o paralelogramo. Prove que os centros destes quadrados formam um quadrado.

**2.10)**Seja $ABCD$ um losango com $\angle BAD = 60°$, tomamos pontos $F$, $H$ e $G$ nos lados $AD$, $DC$ e na diagonal $AC$, respectivamente, de modo que $DFGH$ seja um paralelogramo.

(a) Calcule os ângulos $\angle FAG$ e $\angle FGA$. Prove que $\overline{AF} = \overline{DH}$.

(b) Prove que $ABF$ e $DBH$ são triângulos congruentes.




(c) Prove que $BFH$ é equilátero.

**2.11)**Sejam $ABC$ um triângulo e $M$ o ponto médio do lado $BC$. Se $D$ e $E$ são os pés das alturas relativas aos lados $AC$ e $AB$, respecivamente, prove que $\overline{ME} = \overline{MD}$.

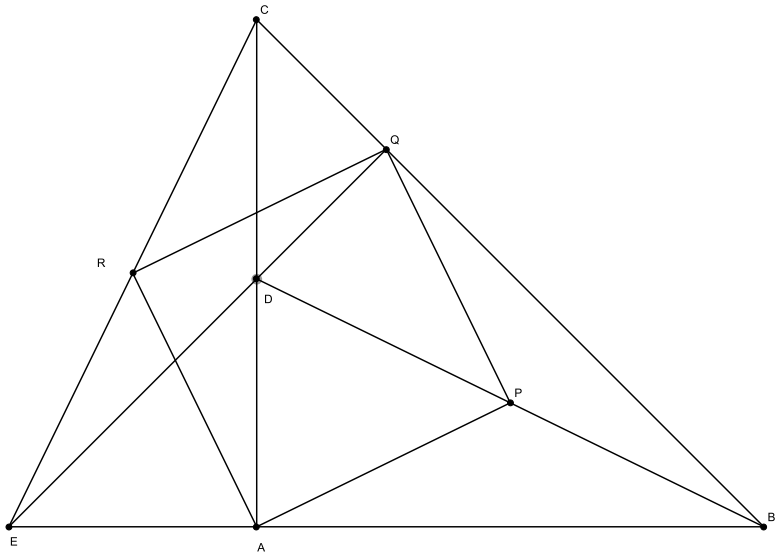
**2.12)**Sejam $ABCD$ um paralelogramo, $M$ o ponto médio de $CD$ e $H$ o pé da perpendicular baixada de $B$ a $AM$. Probe que $BCH$ é um triângulo isósceles.

**2.13)**Em um triângulo $ABC$, retângulo em $A$ e isósceles, sejam $D$ um ponto no lado $AC$ e $E$ um ponto no prolongamento do lado $BA$ tal que o triângulo $ADE$ é isósceles. Sejam, também, $P$ o ponto médio de $BD$, $R$ o ponto médio de $CE$ e $Q$ a interseção entre as retas $ED$ e $BC$.

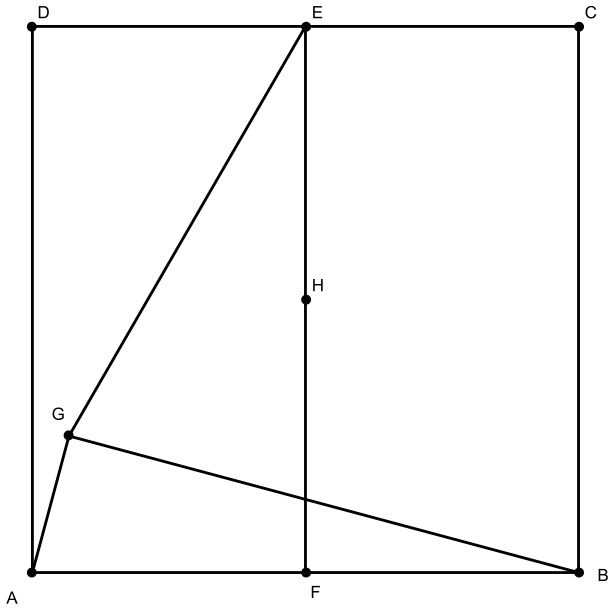
(a) Calcule os ângulos $\angle CBA$ e $\angle DEA$. Prove que $\angle EQB = 90^o$.

(b) Prove que os triângulos $BAD$ e $CAE$ são congruentes. Conclua que $\overline{CE} = \overline{BD}$ e que $\angle ACE = \angle ABD$.

(c) Prove que $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RA}$, depois calcule o ângulo $\angle PAR$. Conclua que $APQR$ é um quadrado.



**2.14)**Sejam $ABCD$ um quadrado e $E$ e $F$ os pontos médios dos lados $AB$ e $DC$. Tome $G$ um ponto no interior do quadrado tal que $\angle GAB = \angle GBC = \angle BGE = \alpha$.




(a) Prove que $\angle AGB = 90^o$ e depois mostre que $\angle FGE = 90^o$.

(b) Seja $H$ o ponto médio de $EF$. Mostre que o triângulo $GFH$ é equilátero.

(c) Calcule o ângulo $\alpha$.

**2.15)**No triângulo $ABC$, a bissetriz interno do ângulo $\hat{A}$ encontra $BC$ em $D$. A reta por $B$, perpendicular a $AD$, encontra $AD$ em $E$. Seja $M$ o ponto médio do lado $BC$. Se $\overline{AB} = 26$, $\overline{BC} = 28$ e $\overline{AC} = 30$, ache os comprimentos de $\overline{DM}$ e $\overline{ME}$

**2.16)**A bissetriz $AD$ de um triângulo $ABC$ divide o lado $BC$ na razão $2:1$. Determine a razão em que a mediana $CE$ divide a bissetriz.

**2.17)**Seja $ABC$ um triângulo e sejam $P$ e $Q$ pontos sobre os lados $AB$ e $AC$, respectivamente, tais que $PQ \parallel BC$. PRove que $PC$, $QB$ e a mediana $AM$ são concorrentes.

**2.18)**Seja $ABC$ um triângulo e sejam $E$ e $D$ pontos sobre o lado $BC$ tal que $CE = ED = DB$. Seja $F$ o ponto médio de $AC$ e $G$ o ponto médio de $AB$. Seja $H$ a interseção de $EG$ e $FD$. Determine o valor de $\frac{\overline{EH}}{\overline{HG}}$.

# 3 Exercicio para casa

**3.1)**No triângulo $ABC$, $D$ é o ponto médio de $AB$ e $E$ o ponto sobre o lado $BC$ tal que $\overline{BE} = 2\overline{EC}$. Sabendo que $\angle ADC = \angle BAE$, calcule o valor de $\angle BAC$.

**3.2)**Seja $ABC$ um triângulo retângulo em $C$. As bissetrizes internas de $\angle BAC$ e $\angle ABC$ encontram $BC$ e $CA$ em $P$ e $Q$, respectivamente. Sejam $M$ e $N$ os pés das perpendiculares a partir de $P$ e $Q$ até $AB$, respectivamente. Encontre a medida do ângulo $\angle MCN$.