Geometria Básica - Lista 2

1 Aquecimento

1.1) Prove que se a as diagonais de um quadrilátero convexo são iguais, então a soma dos quadrados de lados opostos são iguais.

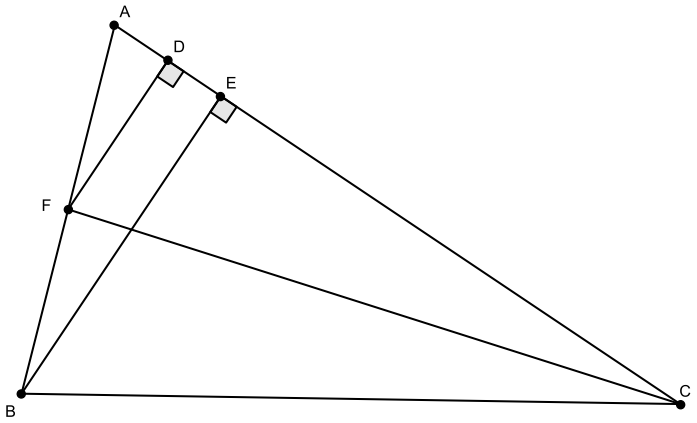
1.2) Um observador estando a $25m$ de um prédio o visualiza sob um certo ângulo. Afastando-se, na direção perpendicular ao prédio mais $50m$ o ângulo de visualização é a metade do anterior. Qual a altura do prédio?

1.3) Seja ABC um triângulo com $AB = 10$, $AC = 12$ e $BC = 16$. Encontre as medidas da mediana, bissetriz e altura relativa ao vértice A.

1.4) Prove que se um triângulo tem duas medianas iguais então ele é isósceles.

2 Problemas básicos

2.1) Sejam ABC um triângulo, CF sua mediana, BE sua altura. Se D é um ponto no lado AC tal que FD é paralelo a BE e se $\overline{BC} = 5$ e $\overline{BE} = \overline{CF} = 4$. Calcule $\overline{EC}$, $\overline{FD}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AC}$. (Dica: Prove que AFD e ABD são semelhantes.)

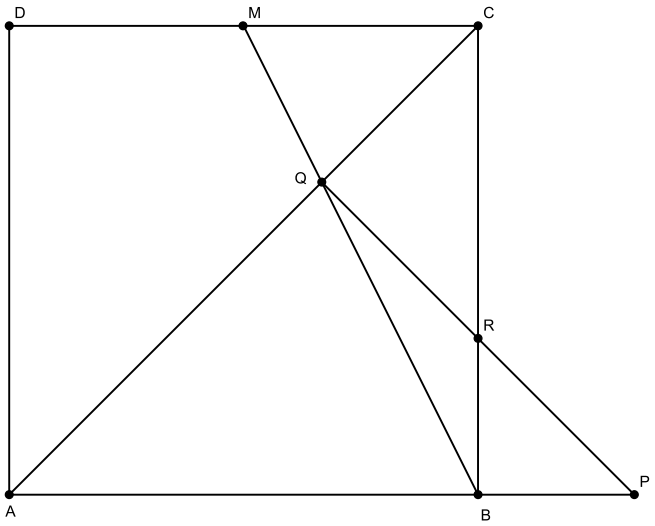


2.2) No triângulo ABC as medianas dos lados AB e AC são perpendiculares. Sabendo que $AB = 6$ e $AC = 8$, determine BC.

2.3) Sejam $ABCD$ um quadrado de lado 6, M o ponto médio de CD e P um ponto na reta AB com $\overline{BP} = 2$. Sejam Q a interseção de AC e BM, e R a interseção de PQ com BC.

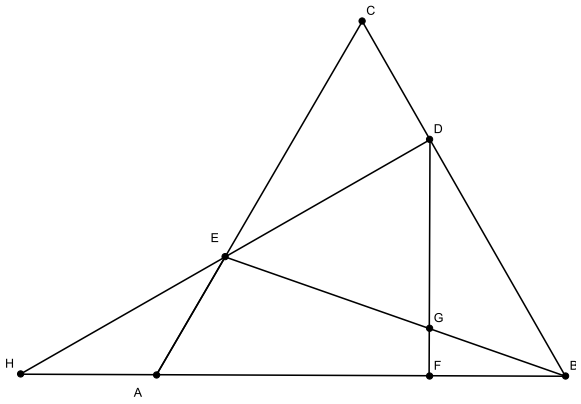
(a) Calcule $\overline{AC}$ a diagonal do quadrado e depois $\overline{AQ}$ e $\overline{CQ}$. (Dica: Veja que os triângulos MQC e BQA são semelhantes.)

(b) Use o Teorema de Menelaus no triângulo ABC e calcule $\overline{BR}$ e $\overline{CR}$.



2.4) Sejam ABC um triângulo equilátero de lado 3, e D, E e F pontos nos lados BC, AC e AB de modo que $\overline{AE} = \overline{CD} = \overline{BF} = 1$. Seja H a interseção das retas ED e AB. Sabendo que $\angle CDE = 90^o = \angle DFB$.

1. Calcule $\overline{ED}$ e $\overline{DF}$.
2. Calcule $\overline{AH}$, $\overline{EH}$, $\overline{DG}$ e $\overline{GF}$. (Dica: Use o Teorema de Menelaus.)



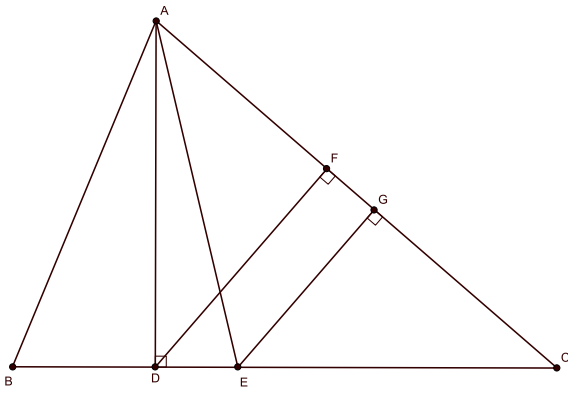
2.5) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, onde N é o ponto médio de DC, M é o ponto médio de BC, e O é a interseção entre as diagonais AC e BD. Mostre que O é o baricentro do triângulo AMN se, e somente se, $ABCD$ é um paralelogramo.

2.6) Sejam ABC um triângulo, AD sua altura e AE sua bissetriz. Sejam, também F o pé da perpendicular por D a AC e G o pé da perpendicular por E a AC. Se $\overline{BD} = 5$, $\overline{CD} = 9$ e $\overline{AD} = 12$.

(a) Calcule $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

(b) Calcule $\overline{BE}$, $\overline{EC}$, $\overline{DE}$. (Lembre do teorema da bissetriz interna.)

(c) Calcule $\overline{DF}$, $\overline{FC}$ e $\overline{GC}$. (Veja que $DFC \sim ADC$)

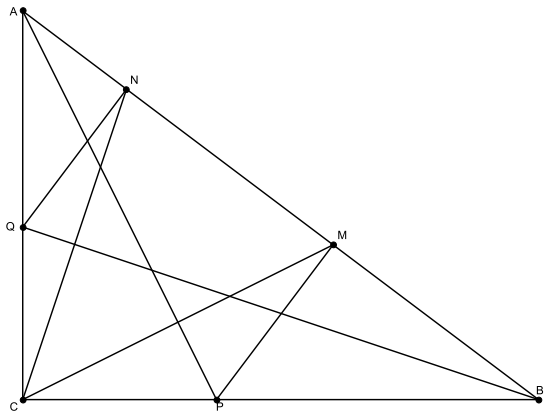


2.7) Sejam ABC um triângulo retângulos em C e AP e BQ bissetrizes. Sejam M e N os pés das perpendiculares por P e Q a AB. Assuma que $\widehat{A} = 2\alpha$ e $\widehat{B} = 2\beta$.

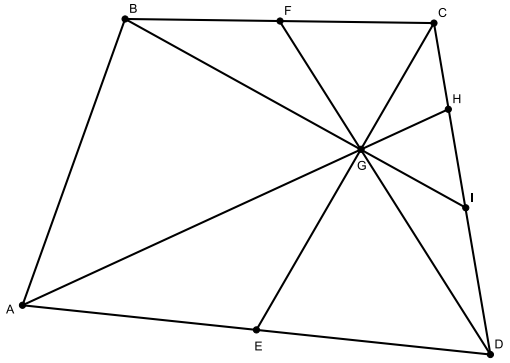
(a) Prove que os triângulos APC e APM são congruentes, conclua que $\overline{PC} = \overline{PM}$.

(b) Calcule, em função de α e β os ângulos $\angle CPM$ e $\angle PCM$.

(c) Repita o processo e calcule, em função de α e β, o ângulo $\angle QCN$. Por fim, calcule o ângulo $\angle MCN$.



2.8) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e E e F os pontos médios dos lados AD e BC. Seja também G a interseção de DF com CE. Suponha que as retas AG e BG dividam o lado CD em 3 partes iguais, ou seja, $\overline{CH} = \overline{HI} = \overline{ID}$.



(a) Use o teorema de Menelaus no triângulo CED e calcule a razão $\frac{\overline{CG}}{\overline{GE}}$.

(b) Faça o mesmo com triângulo DFC e calcule a razão $\frac{\overline{DG}}{\overline{FG}}$.

(c) Prove que $EFCD$ é um paralelogramo e depois que $ABCD$ também é um paralelogramo.

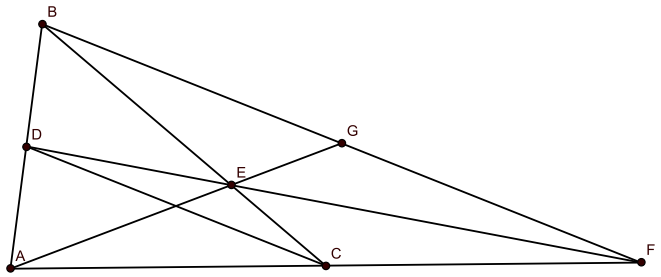
2.9) Seja N o ponto do lado AC do triângulo ABC tal que $AN = 2NC$ e M o ponto do lado AB tal que MN é perpendicular a AB. Sabendo que $AC = 12cm$ e que o baricentro G do triângulo ABC pertence ao segmento MN, determine o comprimento do segmento BG.

2.10) No triângulo ABC, D é ponto médio de $\overline{AB}$ e E ponto sobre o lado $\overline{BC}$ tal que $\overline{BE} = 2\overline{EC}$. Sabendo que $\angle ADC = \angle BAE$

(a) Calcule $\frac{\overline{CF}}{\overline{FA}}$ e prove que E é o baricentro do triângulo ABF.

(b) Prove que DC é paralelo a BF e que $\angle GBA = \angle GAB$.

(c) Prove que $\overline{GA} = \overline{GB} = \overline{GF}$. Calcule o ângulo $\angle BAC$.



2.11) Num quadrilátero convexo, a reta que passa pelos pontos médios de dois lados opostos forma ângulos iguais com ambas as diagonais. Mostre que as duas diagonais têm o mesmo comprimento.

3 Exercicio para casa

3.1) Seja ABC um triângulo retângulo em C com $AC < BC$. Sejam D o ponto do lado AC e K o ponto do segmento BD tais que $\angle KAD = \angle AKD = \angle ABC$. Calcule $\frac{BK}{DC}$.