

Geometria Básica - Lista 3

1 Aquecimento

1.1) Calcule o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC sabendo que $AB = 4$, $AC = 6$ e a altura AD relativa ao lado BC é igual a 3.

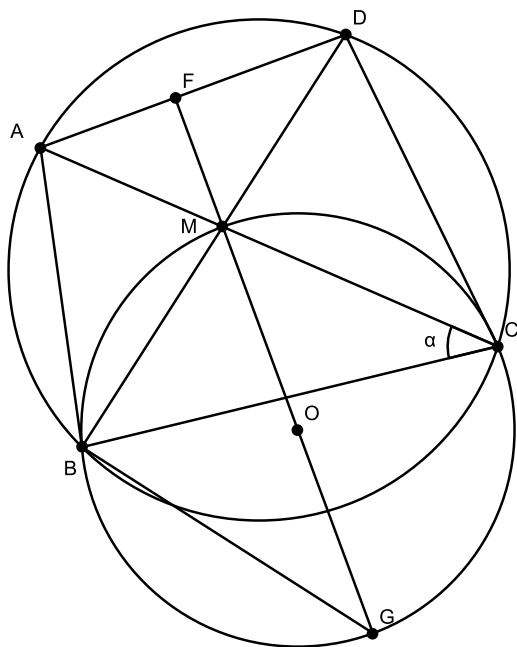
1.2) Seja ABC um triângulo retângulo em A com $a = 5cm$ e $r = 1cm$. Calcule b e c .

1.3) Considere a circunferência circunscrita ao triângulo ABC . Seja AE um diâmetro dessa circunferência e AD a altura do triângulo. Sendo $AB = 6cm$, $AC = 10cm$ e $AE = 30cm$, calcule AD .

1.4) Sejam D , E e F os pontos de contato da circunferência inscrita com os lados BC , CA e AB , respectivamente, do triângulo ABC . Prove que AD , BE e CF são concorrentes em um ponto que se chama Ponto de Gergonne.

2 Problemas básicos

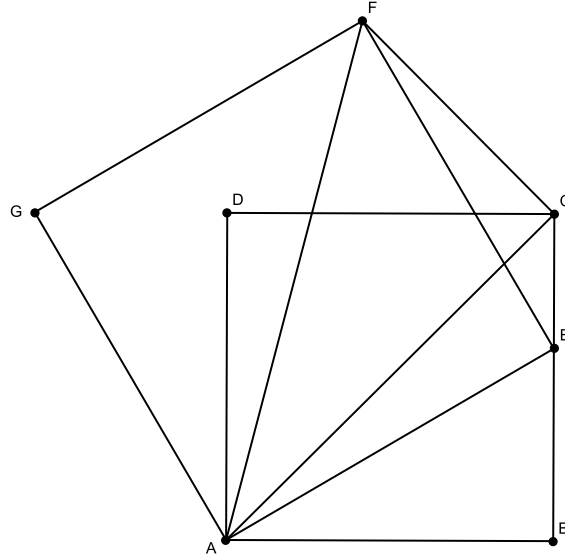
2.1) Sejam $ABCD$ um quadrilátero inscritível e M a interseção das diagonais. Se O é o circuncentro do triângulo BMC . Prove que OM e AD são perpendiculares. (Dica: Calcule o ângulo $\angle OMB$ em função de α .)



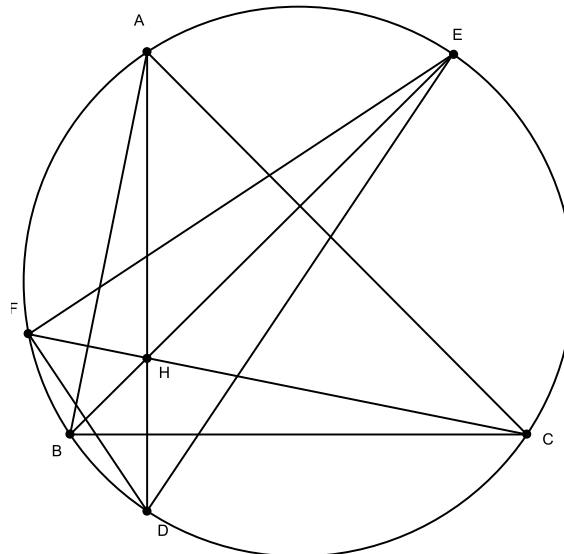
2.2) Os lados de um triângulo ABC medem $AB = 6$, $AC = 9$ e $BC = 11$. Se J é o ponto de tangência do círculo ex-inscrito relativo ao lado AB . Sabendo que JL paralelo a BC (com L sobre o lado AC), determine o comprimento do segmento AL .

2.3) Sejam $ABCD$ e $AEFG$ quadrados com E pertencente ao lado BC .

- (a) Prove que $AECF$ é um quadrilátero inscritível.
- (b) Calcule o ângulo $\angle ACF$ e conclua que a reta CF é tangente ao círculo circunscrito ao quadrado $ABCD$.

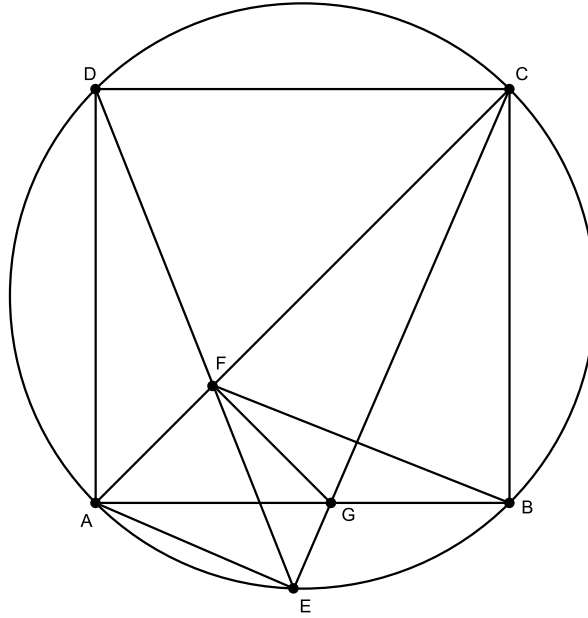


2.4) Seja ABC um triângulo inscrito na circunferência Γ , seja também H seu ortocentro. Sejam D , E e F as interseções de Γ com AH , BH e CH . Prove que H é o incentro do triângulo DEF . (Dica: Lembre que AD é perpendicular a BC e tente calcular os arcos $\widehat{AE}$, $\widehat{EC}$, $\widehat{CD}$, etc. em função dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ do triângulo ABC .)



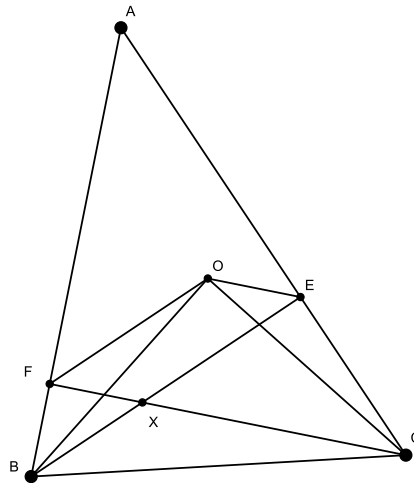
2.5) Seja E um ponto do arco menor AB da circunferência circunscrita ao quadrado $ABCD$. Os segmentos AC e ED se intersectam em F e AB e EC em G .

- Calcule os ângulos $\angle CAB$ e $\angle DEC$. Prove que o quadrilátero $AEGF$ é inscritível.
- Calcule o ângulo $\angle AEC$ e prove que GF é perpendicular a AC . Conclua que o quadrilátero $CFGB$ também é inscritível.
- Prove que $\angle EFG = \angle BFG$.



2.6) No triângulo ABC , o ângulo $\hat{A}$ mede 45° . Sejam $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ alturas e O o circuncentro do triângulo ABC .

- Calcule os ângulos $\angle CFA$, $\angle BEA$, $\angle BOC$.
- Prove que F , O e E pertencem a circunferência de diâmetro $\overline{BC}$.
- Calcule os ângulos $\angle FCE$ e $\angle EOF$.



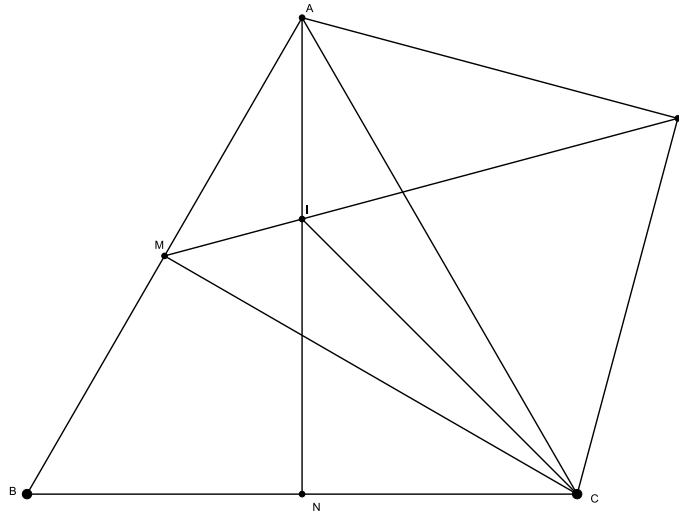
2.7) O triângulo ABC está inscrito na circunferência Γ e $AB < AC$. A reta que contém A e é perpendicular a BC encontra Γ em P , com $P \neq A$. O ponto X situa-se sobre o segmento AC e a reta BX intersecta Γ em Q , com $Q \neq B$. Mostre que $BX = CX$ se, e somente se, PQ é um diâmetro de Γ .

2.8) Seja $ABCD$ um paralelogramo. A bissetriz de $\angle BAD$ corta BC em M e o prolongamento de CD em N . Se O é o circuncentro do triângulo MCN , mostre que B, O, C, D são concíclicos.

2.9) Um triângulo ABC acutângulo está inscrito em um círculo de centro O . Seja D a interseção da bissetriz de A com BC e suponha que a perpendicular a AO por D , corta a reta AC em um ponto P interior a AC . Mostre que $AB = AP$.

2.10) Sejam ABC um triângulo equilátero e M e N os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Seja P um ponto exterior a ABC tal que o triângulo ACP é isósceles e retângulo em P . Por fim, seja I o ponto de interseção de $\overline{PM}$ e $\overline{AN}$.

- Calcule os ângulos $\angle AMC$, $\angle NAC$ e $\angle MAC$.
- Prove que $MAPC$ é inscritível. Calcule $\angle MPA$ e $\angle MPC$.
- Calcule os ângulos do triângulo API . Prove que ele é isósceles.
- Prove que PCI é triângulo equilátero.
- Prove que $\overline{CI}$ é bissetriz do ângulo $\angle MCA$.



3 Exercício para casa

3.1) Em um triângulo ABC a bissetriz do ângulo $\angle BAC$ intersecta o lado BC no ponto D . Seja Γ um círculo tangente a BC no ponto D e que passa pelo ponto A . Se M é o segundo ponto de interseção de AC com Γ e se BM intersecta o círculo em P , mostre que AP é uma mediana do triângulo ABD .