Geometria Básica - Lista 4

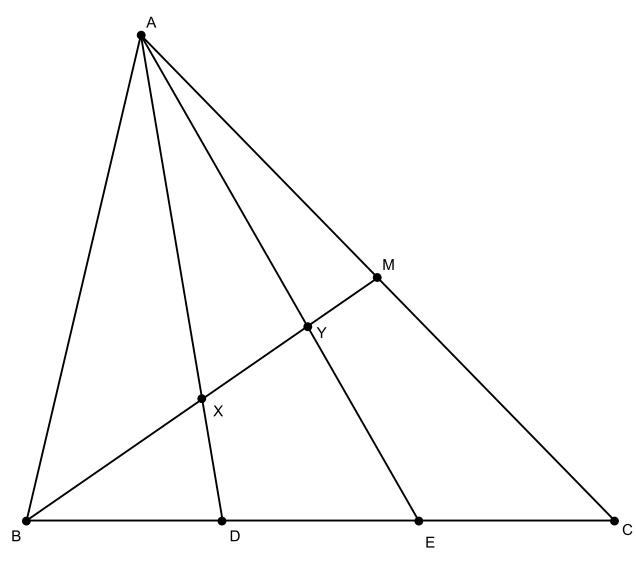
1 Aquecimento

1.1) Prove que as bissetrizes internas dos quatro ângulos de um quadrilátero convexo determinam um quadrilátero inscritível.

2 Problemas básicos

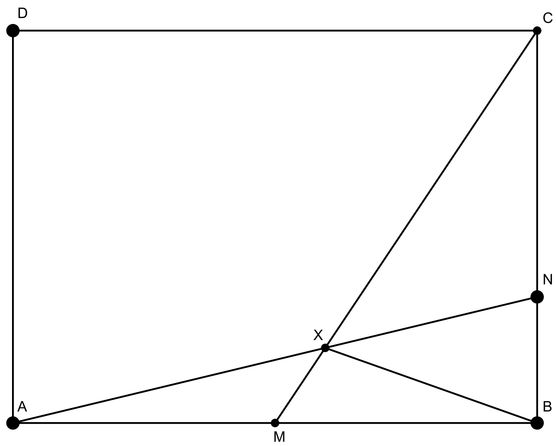
2.1) Seja ABC um triângulo e sejam X, Y e Z pontos sobre os lados AB, BC e CA, respectivamente, tais que $\frac{AX}{BX} = \frac{4}{5}$, $\frac{BY}{CY} = \frac{6}{7}$ e $\frac{CZ}{ZA} = \frac{8}{9}$. Se a área do triângulo ABC é 1989, determine a área do triângulo XYZ.

2.2) Seja ABC um triângulo e M o ponto médio do lado AC. Tome D e E no lado BC de modo que $BD = DE = CD$ e sejam X e Y as interseções de BM com AD e AE. Use o teorema de Menelaus para calcular $\frac{AX}{XD}$ e $\frac{AY}{YE}$ (Um teorema de Menelaus para cada fração). Se a área de ABC é 60, calcule as áreas de ABX, AXY e AYM.

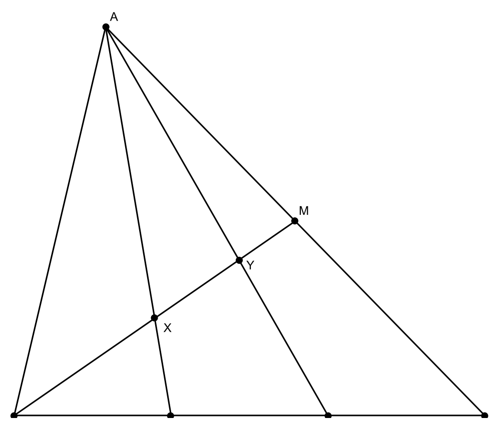


2.3) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que suas diagonais AC e BD são perpendiculares. Seja P a interseção de AC e BD e seja M o ponto médio de AB. Mostre que o quadrilátero $ABCD$ é inscritível se, e somente se, as retas PM e CD são perpendiculares.

2.4) Seja $ABCD$ um retângulo de área 20. Seja M o ponto médio do lado $\overline{AB}$ e N um ponto no lado $\overline{BC}$ tal que $\frac{\overline{CN}}{\overline{NB}} = 2$. Se X é o ponto de interseção de $\overline{CM}$ e $\overline{AN}$ calcule a área do triângulo MXB.



2.5) Sejam ABC um triângulo, D o ponto médio do lado $\overline{AC}$, E o ponto médio do lado $\overline{BC}$, F o ponto médio do segmento $\overline{DC}$, G o ponto médio do segmento $\overline{EC}$, H o ponto médio do segmento $\overline{FC}$ e I o ponto médio do segmento $\overline{GC}$. Se a área do triângulo CIH é 1, calcule as áreas dos triângulos GHI, FGH, EFG e ABC.



2.6) As diagonais de um quadrilátero inscritível $ABCD$ se intersectam em O. Os círculos circunscritos aos triângulos AOB e COD intersectam as retas BC e AD, pela segunda vez, nos pontos M, N, O e Q. Prove que o quadrilátero $MNPQ$ está inscrito em um círculo de centro O

2.7) Um quadrilátero convexo está inscrito em um círculo de centro O. As diagonais AC e BD intersectam-se em P. Os círculos circunscritos aos triângulos ABP e CDP intersectam-se novamente em Q. Se O, P e Q são três pontos distintos, prove que OQ é perpendicular a PQ.

3 Exercicio para casa

3.1) Num triângulo escaleno ABC traça-se a bissetriz interna BD, com D sobre AC. Sejam E e F, respectivamente, os pés das perpendiculares traçadas desde A e C até a reta BD, e seja M o ponto sobre o lado BC tal que DM é perpendicular a BC. Prove que $\angle EMD = \angle DMF$.

3.2)E dado um quadrilátero convexo $ABCD$. Sejam E, F, G e H os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. Determine a posição de um ponto P de forma que os quadriláteros $PHAE$, $PEBF$, $PFCG$ e $PGDH$ tenham a mesma área.