Universidade Federal Fluminense

Instituto de Matemática e Estatística

Departamento de Estatística

Variáveis Aleatórias Bidimensionais

Ana Maria Lima de Farias
Departamento de Estatística

Sumário

Capítulo 1

Variáveis Aleatórias Bidimensionais Discretas

1.1 Introdução

Em muitas situações, é comum que um experimento aleatório gere mais de uma variável de interesse e, quase sempre, o interesse estará em estudar o comportamento simultâneo de 2 ou mais variáveis, em busca de relações, associações. Torna-se necessário, então, conhecer o comportamento probabilístico conjunto de tais variáveis.

EXEMPLO 1.1 Famílias com 3 filhos

Consideremos um estudo da composição de famílias com 3 filhos quanto ao sexo das crianças (Morettin & Bussab).

Podemos definir as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned} X &= \text{número de meninos} \\ Y &= \begin{cases} 1 \text{ se } 1^{\underline{o}} \text{ filho é homem} \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases} \\ Z &= \text{número de vezes que houve variação de sexo entre nascimentos consecutivos} \end{aligned}$$

Suponhamos que a probabilidade de nascer homem ou mulher seja igual a $\frac{1}{2}$, ou seja, que todas as composições de família tenham a mesma probabilidade. Então, os possíveis resultados e os valores das variáveis são os apresentados na tabela a seguir:

Evento	X	Y	Z	P
HHH	3	1	0	1/8
HHM	2	1	1	1/8
HMH	2	1	2	1/8
MHH	2	0	1	1/8
HMM	1	1	1	1/8
MHM	1	0	2	1/8
MMH	1	0	1	1/8
MMM	0	0	0	1/8

A partir desses resultados obtemos as seguintes distribuições de probabilidades para as variáveis aleatórias X, Y, Z:

X:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

$$E(X) = \frac{3}{2} \qquad E(X^2) = 3 \qquad Var(X) = \frac{3}{4}$$

Y:

y	0	1
$P(Y = y)$	1/2	1/2

$$E(Y) = \frac{1}{2} \qquad E(Y^2) = \frac{1}{2} \qquad Var(Y) = \frac{1}{4}$$

Z:

z	0	1	2
$P(Z = z)$	1/4	1/2	1/4

$$E(Z) = 1 \qquad E(Z^2) = \frac{3}{2} \qquad Var(Z) = \frac{1}{2}$$

1.1.1 Distribuições conjuntas

Vamos analisar agora a distribuição conjunta de 2 dessas variáveis, ou seja, queremos analisar, por exemplo, a probabilidade de X ser igual a 1 e Y ser igual a 0, simultaneamente. Vamos calcular essas probabilidades e apresentá-las em forma de tabela de dupla entrada.

(X, Y):

		X				$p_Y(y)$
		0	1	2	3	
Y	0	1/8	2/8	1/8	0	1/2
	1	0	1/8	2/8	1/8	1/2
$p_X(x)$		1/8	3/8	3/8	1/8	1

(X, Z):

		X				
		0	1	2	3	$p_Z(z)$
	0	1/8	0	0	1/8	2/8
Z	1	0	2/8	2/8	0	4/8
	2	0	1/8	1/8	0	2/8
$p_X(x)$		1/8	3/8	3/8	1/8	1

(Y, Z):

		Z			$p_Y(y)$
		0	1	2	
Y	0	1/8	2/8	1/8	4/8
	1	1/8	2/8	1/8	4/8
$p_Z(z)$		2/8	4/8	2/8	1

Analisando simultaneamente as três variáveis, temos:

(x, y, x)	$P(X = x, Y = y, Z = z)$
$(0, 0, 0)$	1/8
$(1, 0, 1)$	1/8
$(1, 0, 2)$	1/8
$(1, 1, 1)$	1/8
$(2, 0, 1)$	1/8
$(2, 1, 2)$	1/8
$(2, 1, 1)$	1/8
$(3, 1, 0)$	1/8

1.1.2 Distribuições marginais

A partir da distribuição conjunta de (X, Y), como podemos obter a distribuição de X? E de Y? Note que, em termos dessa distribuição conjunta, o evento $\{X = 0\}$ pode ser escrito como:

$$\{X = 0\} = \{X = 0 \cap Y = 0\} \cup \{X = 0 \cap Y = 1\}$$

e como estes são eventos mutuamente exclusivos, resulta

$$P(X = 0) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8}$$

Analogamente,

$$P(X = 1) = P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = P(X = 2, Y = 0) + P(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 3) = P(X = 3, Y = 0) + P(X = 3, Y = 1) = 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

Para a distribuição de Y temos:

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0) + P(X = 2, Y = 0) \\ &+ P(X = 3, Y = 0) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} + 0 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 1) \\ &+ P(X = 3, Y = 1) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

De maneira análoga, podemos obter a distribuição de Y a partir da distribuição conjunta de (Y, Z), por exemplo e, obviamente, obteremos o mesmo resultado.

1.1.3 Distribuições condicionais

A partir da distribuição conjunta de (X, Y) pode-se obter a distribuição condicional de X, ou seja, a probabilidade condicional de cada valor de X, condicionada a um determinado valor de Y. Aplicando a definição de probabilidade condicional, temos que:

$$X|Y=0: \quad \begin{cases} P(X=0\,|\,Y=0) = \dfrac{P(X=0, Y=0)}{P(Y=0)} = \dfrac{1/8}{1/2} = \dfrac{1}{4} \\[2ex] P(X=1\,|\,Y=0) = \dfrac{P(X=1, Y=0)}{P(Y=0)} = \dfrac{2/8}{1/2} = \dfrac{1}{2} \\[2ex] P(X=2\,|\,Y=0) = \dfrac{P(X=2, Y=0)}{P(Y=0)} = \dfrac{1/8}{1/2} = \dfrac{1}{4} \\[2ex] P(X=3\,|\,Y=0) = \dfrac{P(X=3, Y=0)}{P(Y=0)} = \dfrac{0}{1/2} = 0 \end{cases}$$

Logo, a distribuição condicional de X dado que $Y = 0$ é:

$X|Y=0:$

x	0	1	2	3
p	1/4	1/2	1/4	0

Sendo uma distribuição de probabilidades, podemos calcular sua esperança e sua variância:

$$\begin{aligned} E(X\,|\,Y=0) &= \sum_x x\,P(X=x|Y=0) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times 0 = 1 \\ E(X^2\,|\,Y=0) &= \sum_x x^2\,P(X=x|Y=0) = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times 0 = \frac{3}{2} \\ \mathrm{Var}(X\,|\,Y=0) &= E(X^2\,|\,Y=0) - [E(X\,|\,Y=0)]^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Analogamente, obtém-se a distribuição de X dado que $Y = 1$ ou a distribuição de Y dado que $X = 0$, por exemplo:

$$Y\,|\,X=0: \quad \begin{cases} P(Y=0\,|\,X=0) = \dfrac{P(X=0, Y=0)}{P(X=0)} = \dfrac{1/8}{1/8} = 1 \\[2ex] P(Y=1\,|\,X=0) = \dfrac{P(X=0, Y=1)}{P(X=0)} = \dfrac{0}{1/8} = 0 \end{cases}$$

$Y\,|\,X=0:$

y	0	1
p	1	0

$$E(Y\,|\,X=0) = 0 \qquad E(Y^2\,|\,X=0) = 0 \qquad \mathrm{Var}(Y\,|\,X=0) = 0$$

ou então:

$$Y\,|\,X=1: \quad \begin{cases} P(Y=0\,|\,X=1) = \dfrac{P(X=1, Y=0)}{P(X=1)} = \dfrac{2/8}{3/8} = \dfrac{2}{3} \\[2ex] P(Y=1\,|\,X=1) = \dfrac{P(X=1, Y=1)}{P(X=1)} = \dfrac{1/8}{3/8} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$Y \mid X = 1:$

y	0	1
p	2/3	1/3

$$E(Y \mid X = 1) = \frac{1}{3} \qquad E(Y^2 \mid X = 1) = \frac{1}{3} \qquad \text{Var}(Y \mid X = 1) = \frac{2}{9}$$

A seguir vamos formalizar os conceitos apresentados através do exemplo acima.

1.2 Definições

1.2.1 Vetor aleatório bidimensional discreto

Um vetor aleatório bidimensional é uma função bivariada que associa, a cada ponto de um espaço amostral Ω, um par de números reais (x, y). Se a imagem de tal função é um conjunto enumerável de pontos em $\mathbb{R}^2$, então o vetor é dito um vetor discreto. Veja a Figura 1.1.

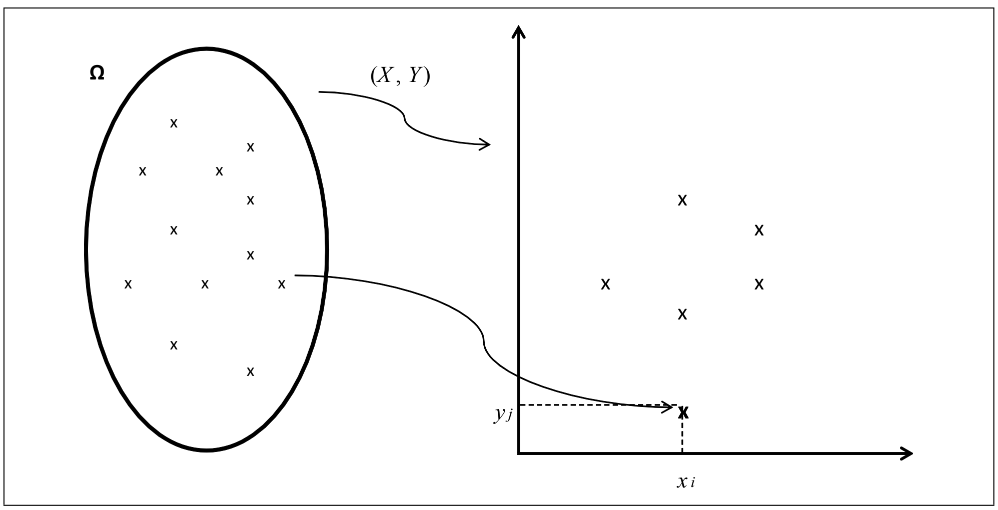

Figura 1.1 – Definição de vetor aleatório discreto

No nível deste curso, podemos pensar que um vetor aleatório bidimensional discreto é um vetor formado por duas variáveis aleatórias discretas definidas no mesmo espaço amostral. De forma análoga, podemos definir um vetor aleatório $k-$dimensional discreto como sendo um vetor formado por k variáveis aleatórias discretas definidas no mesmo espaço amostral.

1.2.2 Função de probabilidade

Seja (X, Y) um vetor aleatório discreto assumindo os valores (x_i, y_j), $i, j = 1, 2, \ldots$. A função de probabilidade conjunta é a função que associa a cada ponto (x_i, y_j) a sua respectiva probabilidade:

$$p(x_i, y_j) = \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

(Veja a Figura 1.2). Note que, do axioma $\mathrm{P}(\Omega) = 1$, resulta que

$$\sum_i \sum_j \mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j) = 1$$

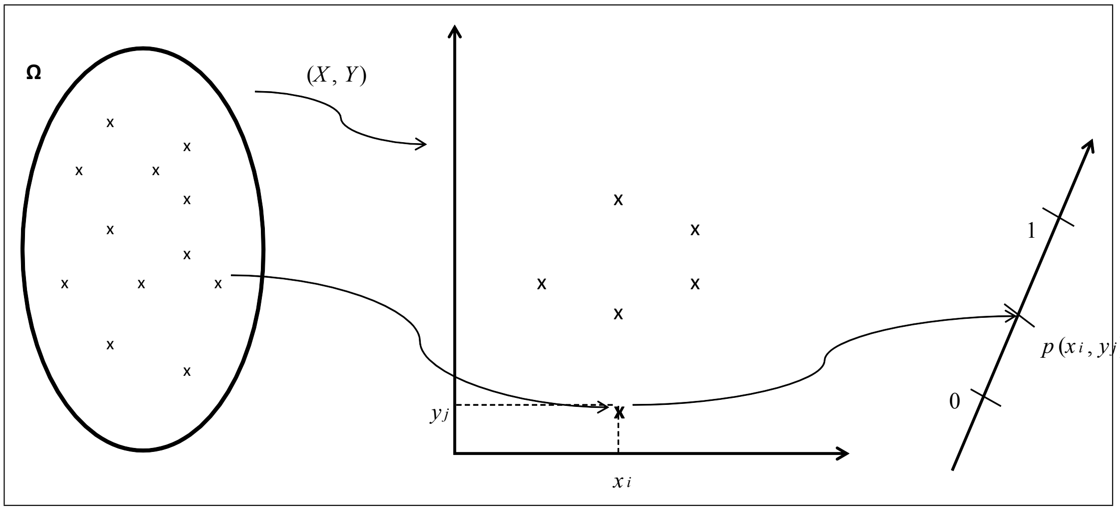

Figura 1.2 – Definição de função de probabilidade conjunta

Para vetories $k-$dimensionais, a função de probabilidade é $\mathrm{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k)$ e

$$\sum_{x_1} \sum_{x_2} \ldots \sum_{x_k} \mathrm{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) = 1$$

1.2.3 Distribuições marginais

Seja (X, Y) um vetor aleatório discreto com distribuição conjunta $p(x_i, y_j)$. Para não sobrecarregar a notação, vamos denotar essa distribuição conjunta por $p(x, y)$, devendo ficar claro que (x, y) representa um par qualquer de valores do vetor (X, Y). A distribuição marginal de X é definida como:

$$\mathrm{P}(X = x) = \sum_y p(x, y) = \sum_y \mathrm{P}(X = x, Y = y) \qquad \forall x \tag{1.1}$$

Analogamente, a distribuição marginal de Y é definida como

$$\mathrm{P}(Y = y) = \sum_x p(x, y) = \sum_x \mathrm{P}(X = x, Y = y) \qquad \forall y \tag{1.2}$$

Em geral, se $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ é um vetor aleatório $k-$dimensional

$$\mathrm{P}(X_i = x_i) = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{i-1}} \sum_{x_{i+1}} \cdots \sum_{x_k} \mathrm{P}\left(X_1 = x_1, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \ldots, X_k = x_k\right) \tag{1.3}$$

1.2.4 Distribuições condicionais

Seja (X, Y) um vetor aleatório discreto com distribuição conjunta $p(x, y)$. A distribuição condicional de X dado $Y = y$ é definida como:

$$\mathrm{P}(X = x \mid Y = y) = \frac{\mathrm{P}(X = x, Y = y)}{\mathrm{P}(Y = y)} \qquad \forall x \tag{1.4}$$

Analogamente define-se a distribuição condicional de Y dado $X = x$ como

$$\mathrm{P}(Y = y|X = x) = \frac{\mathrm{P}(X = x, Y = y)}{\mathrm{P}(X = x)} \qquad \forall y \tag{1.5}$$

Note que existe uma distribuição condicional de X para cada valor y e uma distribuição condicional de Y para cada valor x. Assim, se X assumir n valores distintos e Y m valores distintos, teremos ao todo $n + m$ distribuições condicionais.

1.2.5 Esperança condicional

Para cada uma das distribuições condicionais, podemos calcular a respectiva esperança condicional:

$$\mathrm{E}_X(X \mid Y = y) = \sum_x x\,\mathrm{P}(X = x \mid Y = y) \tag{1.6}$$

$$\mathrm{E}_Y(Y|X = x) = \sum_y y\,\mathrm{P}(Y = y|X = x) \tag{1.7}$$

Os subscritos X e Y nas definições acima, embora desnecessários, serão usados aqui para enfatizar a dependência em X e Y de cada uma das esperanças. Note que o subscrito X indica que a variável aleatória é X e, portanto, estamos calculando a média (ou esperança) dos valores x; Y está fixa no valor y. Observação análoga vale para o subscrito Y.

Note que, para cada valor y de Y temos um valor diferente de $\mathrm{E}(X|Y = y)$ e para cada valor x de X, temos um valor diferente de $\mathrm{E}(Y|X = x)$. Sendo assim, podemos definir uma função g que associa, a cada valor y de Y, o valor $g(y) = \mathrm{E}(X|Y = y)$ e outra função h que associa a cada valor x de X, o valor $h(x) = E(Y|X = x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} g &: y \longmapsto g(y) = \mathrm{E}_X(X|Y = y) \\ h &: x \longmapsto h(x) = \mathrm{E}_Y(Y|X = x) \end{aligned}$$

Como X e Y são variáveis aleatórias, resulta que essas funções definem novas variáveis aleatórias $g(Y)$ e $h(X)$ e suas esperanças podem também ser calculadas. Para lembrar a dependência em cada uma das variáveis, vamos denotar essas esperanças por $\mathrm{E}_Y[g(Y)]$ e $\mathrm{E}_X[h(X)]$, que são calculadas como

$$\mathrm{E}_Y[g(Y)] = \sum_y g(y)\,\mathrm{P}(Y = y) \tag{1.8}$$

$$\mathrm{E}_X[h(X)] = \sum_x h(x)\,\mathrm{P}(X = x) \tag{1.9}$$

Para deixar clara a definição das funções g e h, vamos estabelecer a seguinte notação:

$$\begin{aligned} g(Y) &= \mathrm{E}_X(X|Y) \\ h(X) &= \mathrm{E}_Y(Y|X) \end{aligned}$$

Usando a definição da esperança condicional dada em 1.6, temos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_Y[g(Y)] &= \mathrm{E}_Y[\mathrm{E}_X(X|Y)] = \sum_y g(y)\,\mathrm{P}(Y=y) \\ &= \sum_y \mathrm{E}_X(X|Y=y)\,\mathrm{P}(Y=y) \\ &= \sum_y \sum_x x\,\mathrm{P}(\,X=x|\,Y=y)\,\mathrm{P}(Y=y) \\ &= \sum_y \sum_x x \frac{\mathrm{P}(X=x,Y=y)}{\mathrm{P}(Y=y)}\,\mathrm{P}(Y=y) \\ &= \sum_y \sum_x x\,\mathrm{P}(X=x,Y=y) \\ &= \sum_x x \sum_y \mathrm{P}(X=x,Y=y) \\ &= \sum_x x\,\mathrm{P}(X=x) = \mathrm{E}(X) \end{aligned}$$

Nas duas últimas linhas usamos a definição da distribuição marginal de Y.

Analogamente, por (1.7), resulta que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_X[h(X)] &= \mathrm{E}_X[\mathrm{E}_Y(Y|X)] = \sum_x h(x)\,\mathrm{P}(X=x) \\ &= \sum_x \mathrm{E}(Y|X=x)\,\mathrm{P}(X=x) \\ &= \sum_x \sum_y y\,\mathrm{P}(\,Y=y|X=x)\,\mathrm{P}(X=x) \\ &= \sum_x \sum_y y \frac{\mathrm{P}(X=x,Y=y)}{\mathrm{P}(X=x)}\,\mathrm{P}(X=x) \\ &= \sum_x \sum_y y\,\mathrm{P}(X=x,Y=y) \\ &= \sum_y y \sum_x \mathrm{P}(X=x,Y=y) \\ &= \sum_y y\,\mathrm{P}(Y=y) = \mathrm{E}(Y) \end{aligned}$$

Resumindo:

$$\mathrm{E}_Y\left[\mathrm{E}_X\left(X|Y\right)\right] = \mathrm{E}\left(X\right) \tag{1.10}$$

$$\mathrm{E}_X\left[\mathrm{E}_Y\left(Y\,|\,X\right)\right] = \mathrm{E}\left(Y\right) \tag{1.11}$$

EXEMPLO 1.2 Famílias com 3 filhos (continuação)

Vamos continuar com o Exemplo 1.1, calculando as distribuições condicionais de Y dado $X = x_i$ e suas esperanças:

$Y \mid X = 0$:

y	0	1
p	1	0

$$\mathrm{E}_Y(Y \mid X = 0) = 0$$

$Y \mid X = 1$:

y	0	1
p	2/3	1/3

$$\mathrm{E}_Y(Y \mid X = 1) = \frac{1}{3}$$

$Y \mid X = 2$:

y	0	1
p	1/3	2/3

$$\mathrm{E}_Y(Y \mid X = 2) = \frac{2}{3}$$

$Y \mid X = 3$:

y	0	1
p	0	1

$$\mathrm{E}_Y(Y \mid X = 3) = 1$$

Os valores possíveis de $h(X) = \mathrm{E}_Y(Y|X)$ são $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ e 1 e esses valores ocorrem quando $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$ ou $X = 3$ respectivamente. Logo, as probabilidades de ocorrência de cada um deles são exatamente as probabilidades de X assumir os seus valores, isto é, temos a seguinte distribuição:

$h(X) = \mathrm{E}_Y(Y|X)$:

e	0	1/3	2/3	1
p	1/8	3/8	3/8	1/8

A esperança dessa distribuição é

$$\mathrm{E}_X[h(X)] = \mathrm{E}_X\left[\mathrm{E}_Y(X|Y)\right] = 0 \times \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \mathrm{E}(Y)$$

Para a distribuição condicional de X dado Y, temos os seguintes resultados:

$X|Y = 0$:

x	0	1	2	3
p	2/8	4/8	2/8	0

$$\mathrm{E}_X\left(X|Y = 0\right) = 1$$

$X|Y = 1$:

x	0	1	2	3
p	0	2/8	4/8	2/8

$$\mathrm{E}_X\left(X|Y = 1\right) = 2$$

e para a variável aleatória $g(Y) = \mathrm{E}_X\left(X|Y\right)$ temos a seguinte função de probabilidade:

e	1	2
p	1/2	1/2

e

$$\mathrm{E}[g(Y)] = \mathrm{E}_Y\left[\mathrm{E}_X\left(X|Y\right)\right] = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \mathrm{E}(X)$$

♦♦

1.3 Independência de variáveis aleatórias

Consideremos a distribuição conjunta de (Y, Z) do Exemplo 1.1, reproduzida a seguir:

		Z			$p_Y(y)$
		0	1	2	
Y	0	1/8	2/8	1/8	4/8
	1	1/8	2/8	1/8	4/8
$p_Z(z)$		1/4	2/4	1/4	1

Como as duas linhas da distribuição conjunta são iguais, resulta que

$$P(Z = z \,|\, Y = 0) = P(Z = z \,|\, Y = 1) \quad \forall z$$

Além disso, temos também que

$$P(Z = z \,|\, Y = y) = P(Z = z) \quad \forall y, z$$

Em analogia com a definição de independência de eventos aleatórios, esse fato nos leva à definição de *variáveis aleatórias independentes*. No caso de eventos, a definição de independência $P(A \,|\, B) = P(A)$ tinha que considerar eventos B tais que $P(B) \neq 0$, mas ela também levava a uma definição mais geral: os eventos A e B são independentes se $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$. Analogamente, vamos definir variáveis aleatórias independentes da seguinte forma.

DEFINIÇÃO **Independência de variáveis aleatórias discretas**

Seja (X, Y) um vetor aleatório discreto com distribuição conjunta $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$. Dizemos que X e Y são independentes se e somente se

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)\,P(Y = y) \qquad \forall x, y$$

ou seja, a distribuição conjunta é o produto das distribuições marginais.

Note que a condição acima tem que valer para todo par possível de valores (x, y).

EXEMPLO 1.3 Famílias com 3 filhos (continuação)

X e Y não são independentes porque:

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{8} \neq P(X = 0)\,P(Y = 0) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2}$$

X e Z não são independentes porque:

$$P(X = 0, Z = 0) = \frac{1}{8} \neq P(X = 0)\, P(Z = 0) = \frac{1}{8} \times \frac{2}{8}$$

Y e Z são independentes porque:

$$P(Y = 0, Z = 0) = \frac{1}{8} = P(Y = 0)\, P(Z = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{8}$$

$$P(Y = 0, Z = 1) = \frac{1}{4} = P(Y = 0)\, P(Z = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$P(Y = 0, Z = 2) = \frac{1}{8} = P(Y = 0)\, P(Z = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

$$P(Y = 1, Z = 0) = \frac{1}{8} = P(Y = 1)\, P(Z = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{8}$$

$$P(Y = 1, Z = 1) = \frac{1}{4} = P(Y = 1)\, P(Z = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$P(Y = 1, Z = 2) = \frac{1}{8} = P(Y = 1)\, P(Z = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

♦♦

1.4 Funções de variáveis aleatórias

Muitas vezes, conhecida a distribuição conjunta de (X, Y), estaremos interessados em estudar a distribuição de uma variável aleatória definida como uma função $f(X, Y)$. Lidaremos aqui com funções reais, isto é, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e uma atenção especial será dada às combinações lineares, ou seja, funções do tipo $f(X, Y) = aX + bY$, com a e b números reais quaisquer.

EXEMPLO 1.4 Famílias com 3 filhos (continuação)

Para o Exemplo 1.1, considere a seguinte função:

$$f_1(X, Y) = X^2 + Y$$

cujos valores e probabilidades estão a seguir:

X	Y	$P(X = x, Y = y)$	$f_1(X, Y) = X^2 + Y$
0	0	1/8	0
1	0	2/8	1
2	0	1/8	4
3	0	0	9
0	1	0	1
1	1	1/8	2
2	1	2/8	5
3	1	1/8	10

Então, a esperança de $X^2 + Y$ é

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(X^2+Y\right) &= 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{2}{8} + \cdots + 10 \times \frac{1}{8} \\
&= f_1(0,0) \times \mathrm{P}\left(X=0, Y=0\right) + f_1(1,0) \times \mathrm{P}\left(X=1, Y=0\right) + \cdots \\
&\quad + f_1(3,1) \times \mathrm{P}\left(X=3, Y=1\right) \\
&= \sum_x \sum_y f_1(x,y)\, \mathrm{P}\left(X=x, Y=y\right)
\end{aligned}$$

♦♦

O resultado apresentado neste exemplo se generaliza para qualquer função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, conforme o seguinte teorema.

TEOREMA 1.1

Seja (X, Y) um vetor aleatório discreto com função de probabilidade conjunta $P(X = x, Y = y)$. Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real tal que cada par (x, y) é levado a $h(x, y)$. Então

$$E[h(X,Y)] = \sum_i \sum_j h\left(x_i, y_j\right) P\left(X = x_i, Y = y_j\right)$$

Lembre-se que há um resultado análogo para variáveis unidimensionais, que foi utilizado em (1.8) e (1.9) no estudo de esperança condicional.

Um caso particular importante é abordado a seguir.

TEOREMA 1.2

Seja (X, Y) um vetor aleatório discreto com função de probabilidade conjunta $P(X = x, Y = y)$. Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real tal que $h(x, y) = x + y$. Então

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

(Esperança da soma é a soma das esperanças)

Demonstração

Usando o teorema anterior, temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(X+Y\right) &= \sum_x \sum_y (x+y)\, \mathrm{P}\left(X=x, Y=y\right) \\
&= \sum_x \sum_y x\, \mathrm{P}\left(X=x, Y=y\right) + \sum_x \sum_y y\, \mathrm{P}\left(X=x, Y=y\right) \\
&= \sum_x x \sum_y \mathrm{P}\left(X=x, Y=y\right) + \sum_y y \sum_x \mathrm{P}\left(X=x, Y=y\right) \\
&= \sum_x x\, \mathrm{P}\left(X=x\right) + \sum_y y\, \mathrm{P}\left(Y=y\right) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

■

Dos resultados já vistos, segue o resultado mais geral:

TEOREMA 1.3

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias discretas com distribuição conjunta $p(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$. Então:

$$E\,(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \cdots + a_nE(X_n) \tag{1.12}$$

Usando definições e propriedades da esperança e da variância, vamos estudar a variância da soma de duas variáveis aleatórias.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathrm{E}[(X+Y) - \mathrm{E}(X+Y)]^2 = \mathrm{E}[X + Y - \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y)]^2 \\
&= \mathrm{E}[X - \mathrm{E}(X) + Y - \mathrm{E}(Y)]^2 \\
&= \mathrm{E}[X - \mathrm{E}(X)]^2 + \mathrm{E}[Y - \mathrm{E}(Y)]^2 + 2\,\mathrm{E}[X - \mathrm{E}(X)][Y - \mathrm{E}(Y)] \\
&= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{E}[X - \mathrm{E}(X)][Y - \mathrm{E}(Y)]
\end{aligned}$$

Então, na variância da soma, aparece um termo envolvendo a esperança do produto dos desvios em torno das médias. Esse termo define a *covariância* de duas variáveis aleatórias. Note que as variáveis $X' = X - \mathrm{E}(X)$ e $Y' = Y - \mathrm{E}(Y)$ são variáveis aleatórias ambas com média zero, isto é, $\mathrm{E}(X') = \mathrm{E}(Y') = 0$.

1.5 Covariância

DEFINIÇÃO **Covariância**

A covariância entre duas variáveis aleatórias X e Y é definida por

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}\,[X - \mathrm{E}(X)]\,[Y - \mathrm{E}(Y)] \tag{1.13}$$

Substituindo essa definição na expressão da variância da soma de duas variáveis aleatórias obtém-se o

RESULTADO 1.1 *A variância da soma de duas v.a. é dada por*

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y) \tag{1.14}$$

Uma forma alternativa de cálculo da covariância resulta de

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\,[X-\mathrm{E}(X)][Y-\mathrm{E}(Y)] &= \mathrm{E}[XY - X\,\mathrm{E}(Y) - Y\,\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)] \\
&= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}[X\,\mathrm{E}(Y)] - \mathrm{E}[Y\,\mathrm{E}(X)] + \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(Y)\,\mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) + \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)
\end{aligned}
$$

Aqui usamos que $\mathrm{E}(kX) = k\,\mathrm{E}(X)$ e também que $\mathrm{E}(k) = k$. Lembre-se que a esperança é um número! Logo,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \tag{1.15}$$

que pode ser lido como *a covariância é a esperança do produto menos o produto das esperanças.*

1.5.1 Propriedades da covariância

Vamos usar as seguintes propriedades já vistas para a esperança para demonstrar propriedades análogas da covariância:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X+b) &= \mathrm{E}(X) + b \\
\mathrm{E}(aX) &= a\,\mathrm{E}(X) \\
\mathrm{E}(aX+b) &= a\,\mathrm{E}(X) + b
\end{aligned}
$$

1. $\mathrm{Cov}(aX+b, cY+d) = ac\,\mathrm{Cov}(X,Y)$

   De fato:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(aX+b,cY+d) &= \mathrm{E}\left[(aX+b) - \mathrm{E}\,(aX+b)\right]\left[(cY+d) - \mathrm{E}\,(cY+d)\right] \\
&= \mathrm{E}[aX+b-a\,\mathrm{E}(X)-b][cY+d-c\,\mathrm{E}(Y)-d] \\
&= \mathrm{E}[aX-a\,\mathrm{E}(X)][cY-c\,\mathrm{E}(Y)] \\
&= \mathrm{E}\{a[X-\mathrm{E}(X)]c[Y-\mathrm{E}(XY)]\} \\
&= ac\,\mathrm{E}[X-\mathrm{E}(X)](Y-\mathrm{E}(Y)] \\
&= ac\,\mathrm{Cov}(X,Y)
\end{aligned}
$$

2. $\mathrm{Cov}(X+Y, Z+W) = \mathrm{Cov}(X,Z) + \mathrm{Cov}(X,W) + \mathrm{Cov}(Y,Z) + \mathrm{Cov}(Y,W)$

   De fato:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X+Y,Z+W) &= \mathrm{E}(X+Y)(Z+W) - \mathrm{E}(X+Y)\,\mathrm{E}(Z+W) \\
&= \mathrm{E}(XZ+XW+YZ+YW) - [\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)][\mathrm{E}(Z)+\mathrm{E}(W)] \\
&= \mathrm{E}(XZ)+\mathrm{E}(XW)+\mathrm{E}(YZ)+\mathrm{E}(YW)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Z) \\
&\quad -\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(W)-\mathrm{E}(Y)\,\mathrm{E}(Z)-\mathrm{E}(Y)\,\mathrm{E}(W) \\
&= [\mathrm{E}(XZ)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Z)]+[\mathrm{E}(XW)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(W)]+ \\
&\quad +[\mathrm{E}(YZ)-\mathrm{E}(Y)\,\mathrm{E}(Z)]+[\mathrm{E}(YW)-\mathrm{E}(Y)\,\mathrm{E}(W)] \\
&= \mathrm{Cov}(X,Z)+\mathrm{Cov}(X,W)+\mathrm{Cov}(Y,Z)+\mathrm{Cov}(Y,W)
\end{aligned}
$$

3. Dos resultados anteriores, segue que

$$\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2\,\text{Cov}(X, Y)$$

De fato:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X - Y) &= Var[X + (-Y)] = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\,\text{Cov}[X, (-1 \cdot Y)] \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \cdot (-1)\,\text{Cov}(X, Y) \\ &= Var(X) + \text{Var}(Y) - 2\,\text{Cov}(X, Y) \end{aligned}$$

1.5.2 Interpretação da covariância

No estudo da estatística descritiva, dados dois conjuntos de dados $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$ referentes a duas variáveis de interesse X e Y, definimos a covariância entre X e Y como

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

No contexto de variáveis aleatórias, a média é calculada como uma média ponderada pelas probabilidades; assim, temos uma total analogia entre as definições de covariância nos dois contextos.

Foi visto também que a covariância é uma medida de associação linear entre as variáveis. Construindo um diagrama de dispersão para as variáveis, se existir uma associação linear crescente, os pontos (x, y) tenderão a se concentrar nos primeiro e terceiro quadrantes, onde o produto das coordenadas é positivo. Se existir uma associação linear decrescente, os pontos se concentrarão no segundo e quarto quadrantes, onde o produto é negativo. O fato de se tomar $E[X - E(X)][Y - E(Y)]$, e não $E(XY)$, garante que estamos sempre trabalhando com variáveis "centradas" em $(0, 0)$ e não em $(E(X), E(Y))$.

1.5.3 Independência e covariância de variáveis aleatórias

Da definição de independência de variáveis aleatórias, resulta o seguinte fato: se X e Y são variáveis aleatórias independentes, qualquer conhecimento sobre Y não nos dá informação sobre X. Usando essa interpretação, mais a interpretação do conceito de covariância, é de se esperar que a covariância entre variáveis independentes seja nula (se elas são independentes, não deverá existir qualquer associação entre elas, muito menos uma associação linear). Vamos ver um resultado geral que trata dessa relação.

RESULTADO 1.2 *Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então $Cov(X, Y) = 0$.*

Demonstração

Se X e Y são independentes, então $\text{P}(X = x, Y = y) = \text{P}(X = x)\,\text{P}(Y = y)$. Mas nesse caso,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(XY) &= \sum_x \sum_y xy\,\mathrm{P}(X=x, Y=y) = \sum_x \sum_y xy\,\mathrm{P}(X=x)\,\mathrm{P}(Y=y) \\ &= \sum_x x\,\mathrm{P}(X=x) \sum_y y\,\mathrm{P}(Y=y) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = 0$.

■

Note que a recíproca desse resultado não é verdadeira, isto é, covariância nula *não* significa independência entre as variáveis. Esse resultado pode ser visto intuitivamente a partir da interpretação de covariância: covariância nula significa ausência de associação linear. Nada impede que exista outro tipo de associação entre as variáveis, o que caracterizaria a falta de independência entre elas. Como exemplo, consideremos a seguinte de distribuição de probabilidade conjunta:

		X			$p_Y(y)$
		0	1	2	
	1	3/20	3/20	2/20	2/5
Y	2	1/20	1/20	2/20	1/5
	3	4/20	1/20	3/20	2/5
$p_X(x)$		2/5	1/4	7/20	1

Para essa distribuição temos:

$$\mathrm{E}(X) = 0 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{7}{20} = \frac{19}{20}$$

$$\mathrm{E}(Y) = 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{2}{5} = 2$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(XY) &= 0 \times \frac{3}{20} + 1 \times \frac{3}{20} + 2 \times \frac{2}{20} + \\ &\quad +0 \times \frac{1}{20} + 2 \times \frac{1}{20} + 4 \times \frac{2}{20} + \\ &\quad +0 \times \frac{4}{20} + 3 \times \frac{1}{20} + 6 \times \frac{3}{20} \\ &= \frac{38}{20} = \frac{19}{20} \times 2 = \mathrm{E}(X) \times \mathrm{E}(Y) \end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = 0$ mas X e Y não são independentes porque, por exemplo:

$$\mathrm{P}(X=0, Y=1) = \frac{3}{20} \neq \mathrm{P}(X=0) \times \mathrm{P}(Y=1) = \frac{8}{20} \times \frac{8}{20}$$

1.6 Coeficiente de correlação

Como visto, a covariância é uma medida de associação linear entre duas variáveis, com valores "grandes" positivos indicando uma "forte" associação linear crescente e valores negativos, uma associação linear decrescente. Mas como saber o que é grande? Por exemplo, suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias que representem grandezas, ambas medidas em milhares de reais e suponha, também, que haja uma forte associação linear crescente entre ambas. Pois bem, se transformarmos essas variáveis de modo que elas representem os mesmos fenômenos, mas agora em reais, a covariância ficará multiplicada por 10^6, já que cada uma das variáveis originais fica multiplicada por $1000 = 10^3$. Esse fato ocorre porque a covariância depende da unidade de medida de cada uma das variáveis envolvidas. Para contornar esse fato, em vez de trabalharmos com as variáveis originais, podemos trabalhar com as variáveis padronizadas, o que dá origem ao *coeficientes de correlação*.

DEFINIÇÃO **Coeficiente de Correlação**

O coeficiente de correlação entre duas variáveis aleatórias X e Y é a covariância entre as variáveis padronizadas, ou seja,

$$\operatorname{Corr}(X,Y) = \mathrm{E}\left(\frac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y-\mathrm{E}(Y)}{\sigma_Y}\right) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$$

onde σ_X e σ_Y são os desvios-padrão de X e Y respectivamente.

A propriedade fundamental do coeficiente de correlação é dada no seguinte teorema:

TEOREMA 1.4

Dadas duas variáveis aleatórias X e Y com esperança, variância e covariância finitas, então

$$-1 \leq Corr(X,Y) \leq 1$$

Demonstração

Sejam

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma_X} \qquad Y^* = \frac{Y - E(Y)}{\sigma_Y}$$

as variáveis padronizadas. Das propriedades de esperança e variância, sabemos que $E(X^*) = E(Y^*) = 0$ e $\operatorname{Var}(X^*) = \operatorname{Var}(Y^*) = 1$. Sabemos também que a variância de qualquer variável aleatória é não-negativa. Em particular,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Var}(X^* + Y^*) \geq 0 \Rightarrow \\
&\operatorname{Var}(X^*) + \operatorname{Var}(Y^*) + 2\operatorname{Cov}(X^*, Y^*) \geq 0 \Rightarrow \\
&1 + 1 + 2\operatorname{Cov}(X^*, Y^*) \geq 0 \Rightarrow \\
&\operatorname{Cov}(X^*, Y^*) \geq -1
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\,(X^* - Y^*) \geq 0 \Rightarrow \\
&\mathrm{Var}\,(X^*) + \mathrm{Var}\,(Y^*) - 2\,\mathrm{Cov}\,(X^*, Y^*) \geq 0 \Rightarrow \\
&1 + 1 - 2\,\mathrm{Cov}\,(X^*, Y^*) \geq 0 \Rightarrow \\
&\mathrm{Cov}\,(X^*, Y^*) \leq 1
\end{aligned}$$

Temos, então, que

$$-1 \leq \mathrm{Cov}\,(X^*, Y^*) \leq 1$$

Mas $\mathrm{Cov}\,(X^*, Y^*) = \mathrm{Corr}(X, Y)$, o que completa a demonstração. ■

EXEMPLO 1.5 Associação linear perfeita

(a) Consideremos o caso em que $\mathrm{Corr}\,(X, Y) = 1$. Então, $\mathrm{Cov}\,(X^*, Y^*) = 1$ e, portanto

$$\mathrm{Var}\,(X^* - Y^*) = \mathrm{Var}(X^*) + \mathrm{Var}(Y^*) - 2\,\mathrm{Cov}(X^*, Y^*) = 1 + 1 - 2 \times 1 = 0$$

Mas $\mathrm{Var}(X^* - Y^*) = 0$ significa que $X^* - Y^*$ é uma constante, isto é,

$$\begin{aligned}
&\frac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma_X} - \frac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sigma_Y} = k \Rightarrow \\
&\frac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma_X} = \frac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sigma_Y} + k \Rightarrow \\
&X - \mathrm{E}(X) = \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} Y - \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\,\mathrm{E}(Y) + \sigma_X k \Rightarrow \\
&X = \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} Y + \left[\mathrm{E}(X) - \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\,\mathrm{E}(Y) + \sigma_X k\right] \Rightarrow \\
&X = \left(\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\right) Y + k^*
\end{aligned}$$

em que $k^* = \mathrm{E}(X) - \dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}\,\mathrm{E}(Y) + \sigma_X k$. Isso significa que existe uma associação linear crescente perfeita entre X e Y: note que o coeficiente angular é $\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y} > 0$.

(b) Analogamente, se $\mathrm{Corr}(X, Y) = -1$, então $\mathrm{Cov}\,(X^*, Y^*) = -1$ e

$$\mathrm{Var}\,(X^* + Y^*) = \mathrm{Var}(X^*) + \mathrm{Var}(Y^*) + 2\,\mathrm{Cov}(X^*, Y^*) = 1 + 1 + 2 \times (-1) = 0$$

o que significa que $X^* + Y^*$ é uma constante, isto é,

$$\begin{aligned}
&\frac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma_X} + \frac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sigma_Y} = k \Rightarrow \\
&\frac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma_X} = -\frac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sigma_Y} + k \Rightarrow \\
&X - \mathrm{E}(X) = -\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} Y + \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\,\mathrm{E}(Y) + \sigma_X k \Rightarrow \\
&X = -\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} Y + \left[\mathrm{E}(X) + \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\,\mathrm{E}(Y) + \sigma_X k\right] \Rightarrow \\
&X = \left(-\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\right) Y + k^*
\end{aligned}$$

em que $k^* = \mathrm{E}(X) + \dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}\mathrm{E}(Y) + \sigma_X k$. Isso significa que existe uma associação linear decrescente perfeita entre X e Y: note que o coeficiente angular é $-\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y} < 0$.

♦♦

EXEMPLO 1.6

Sejam X, Y variáveis aleatórias discretas com a seguinte distribuição conjunta:

		X		
		0	1	2
Y	0	0,1	0,3	0,2
	1	0,1	0,1	0,2

(a) Obtenha as distribuições marginais de X e Y.

(b) Calcule $\mathrm{E}(X), \mathrm{Var}(X), \mathrm{E}(Y), \mathrm{Var}(Y), \mathrm{Cov}(X, Y)$.

(c) Obtenha as distribuições condicionais de $X|Y = 0$ e $X|Y = 1$ e para cada uma delas calcule a esperança e a variância.

(d) Defina as seguintes variáveis aleatórias: $h(Y) = \mathrm{E}(X|Y)$ e $g(Y) = \mathrm{Var}(X|Y)$. Calcule

i. $\mathrm{E}_Y[h(Y)] = \mathrm{E}_Y[\mathrm{E}_X(X|Y)]$

ii. $\mathrm{Var}_Y[h(Y)] = \mathrm{Var}_Y[\mathrm{E}_X(X|Y)]$

iii. $\mathrm{E}_Y[g(Y)] = \mathrm{E}_Y[\mathrm{Var}_X(X|Y)]$.

iv. Verifique que $\mathrm{E}_Y[h(Y)] = \mathrm{E}_Y[\mathrm{E}_X(X|Y)] = \mathrm{E}(X)$ e $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}_Y[\mathrm{Var}_X(X|Y)] + \mathrm{Var}_Y[\mathrm{E}_X(X|Y)]$.

Solução

(a)

		X			
		0	1	2	$\mathrm{P}(Y = y)$
Y	0	0,1	0,3	0,2	0,6
	1	0,1	0,1	0,2	0,4
$\mathrm{P}(X = x)$		0,2	0,4	0,4	

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= 1 \times 0,4 + 2 \times 0,4 = 1,2 \\
\mathrm{E}(X^2) &= 1^2 \times 0,4 + 2^2 \times 0,4 = 2,0 \\
\mathrm{Var}(X) &= 2 - 1,2^2 = 0,56
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &= 1 \times 0,4 = 0,4 \\
\mathrm{E}(Y^2) &= 1^2 \times 0,4 = 0,4 \\
\mathrm{Var}(Y) &= 0,4 - 0,4^2 = 0,24
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= 1 \times 1 \times 0,1 + 1 \times 2 \times 0,2 = 0,5 \\
\mathrm{Cov}(X,Y) &= 0,5 - 1,2 \times 0,4 = 0,02
\end{aligned}$$

(c)

x	0	1	2
$\mathrm{P}(X = x \mid Y = 0)$	$0,1/0,6 = \frac{1}{6}$	$0,3/0,6 = \frac{3}{6}$	$0,2/0,6 = \frac{2}{6}$
$\mathrm{P}(X = x \mid Y = 1)$	$0,1/0,4 = \frac{1}{4}$	$0,1/0,4 = \frac{1}{4}$	$0,2/0,4 = \frac{2}{4}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X \mid Y = 0) &= 1 \times \frac{3}{6} + 2 \times \frac{2}{6} = \frac{7}{6} \\
\mathrm{E}(X^2 \mid Y = 0) &= 1^2 \times \frac{3}{6} + 2^2 \times \frac{2}{6} = \frac{11}{6} \\
\mathrm{Var}(X \mid Y = 0) &= \frac{11}{6} - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{17}{36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X \mid Y = 1) &= 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{2}{4} = \frac{5}{4} \\
\mathrm{E}(X^2 \mid Y = 1) &= 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{2}{4} = \frac{9}{4} \\
\mathrm{Var}(X \mid Y = 1) &= \frac{9}{4} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{11}{16}
\end{aligned}$$

(d)

h	$\frac{7}{6}$	$\frac{5}{4}$
$\mathrm{P}[h(Y) = h]$	$0,6$	$0,4$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[h(Y)] &= 0,6 \times \frac{7}{6} + 0,4 \times \frac{5}{4} = 1,2 = \mathrm{E}(X) \\
\mathrm{E}[h^2(Y)] &= 0,6 \times \left(\frac{7}{6}\right)^2 + 0,4 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{173}{120} \\
\mathrm{Var}[h(Y)] &= \frac{173}{120} - \frac{144}{100} = \frac{1730 - 1728}{1200} = \frac{1}{600}
\end{aligned}$$

g	$\frac{17}{36}$	$\frac{11}{16}$
$\mathrm{P}[g(Y) = g]$	$0,6$	$0,4$

$$\mathrm{E}[g(Y)] = 0,6 \times \frac{17}{36} + 0,4 \times \frac{11}{16} = \frac{67}{120}$$

$$\mathrm{E}[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}(X \mid Y)] = \frac{67}{120} + \frac{1}{600} = \frac{335 + 1}{600} = \frac{336}{600} = \frac{14}{25} = 0,56 = \mathrm{Var}(X)$$

1.7 Exercícios propostos

1. A tabela abaixo dá a distribuição conjunta de X e Y :

	X		
Y	1	2	3
0	0,1	0,1	0,1
1	0,2	0,0	0,3
2	0,0	0,1	0,1

   (a) Determine as distribuições marginais de X e Y.

   (b) Calcule a esperança e a variância de cada uma das variáveis X e Y. (Resp.: $2,2; 0,76; 0,9; 0,49$)

   (c) Verifique se X e Y são independentes, justificando sua resposta. (Resp.: Não)

   (d) Calcule $P(X = 1|Y = 0)$ e $P(Y = 2|X = 3)$. (Resp.: $1/3; 1/5$)

   (e) Calcule $P(X \leq 2)$ e $P(X = 2, Y \leq 1)$. (Resp.: $0,5; 0,1$)

   (f) Calcule a covariância e a correlação entre X e Y. (Resp.: $0,12; 0,1966$)

2. Sejam X e Y variáveis aleatórias com $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 0$ e $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1$. Prove que $\mathrm{Corr}(U, V) = 0$, onde $U = X + Y$ e $V = X - Y$.

3. Um aluno faz um teste de múltipla escolha com 4 questões do tipo Verdadeiro-Falso. Suponha que o aluno esteja "chutando" todas as questões, uma vez que ele não estudou a matéria da prova. Defina as seguintes variáveis aleatórias:

$$\begin{aligned} X_1 &= \text{número de acertos entre as duas primeiras questões da prova} \\ Y_1 &= \text{número de acertos entre as duas últimas questões da prova} \\ X_2 &= \text{número de acertos entre as três primeiras questões da prova} \\ Y_2 &= \text{número de acertos entre as três últimas questões da prova} \end{aligned}$$

   (a) Construa uma tabela com o espaço amostral associado a este experimento, listando todas as possibilidades de acerto e os valores de X_1, Y_1, X_2, Y_2 e suas probabilidades.

   (b) Construa a função de distribuição conjunta de (X_1, Y_1) com as respectivas marginais.

   (c) Construa a função de distribuição conjunta de (X_2, Y_2) com as respectivas marginais.

   (d) Verfique se X_1 e Y_1 são independentes. (Resp.: Sim)

   (e) Verfique se X_2 e Y_2 são independentes. (Resp.: Não)

   (f) Por que já era de se esperar as diferenças observadas em (d) e (e)?

   (g) Calcule a covariância entre X_1 e Y_1. (Resp.: 0)

   (h) Calcule a covariância entre X_2 e Y_2. (Resp.: 5/16)

   (i) Calcule as seguintes distribuições condicionais com suas esperanças condicionais:

$$X_2 \,|\, Y_2 = 0 \qquad X_2 \,|\, Y_2 = 1 \qquad X_2 \,|\, Y_2 = 2 \qquad X_2 \,|\, Y_2 = 3$$

   (j) Calcule $\mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left(X_2 \,|\, Y_2\right)\right]$.

4. Uma moeda honesta é lançada 4 vezes. Seja X o número de caras nos 2 primeiros lançamentos e seja Y o número de caras nos 3 últimos lançamentos.

   (a) Liste todos os elementos do espaço amostral deste experimento, epsecificando os valores de X e Y.

   (b) Construa a função de distribuição conjunta de X e Y.

   (c) Calcule $\mathrm{E}(X), \mathrm{E}(Y), \mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y)$

   (d) Calcule $\mathrm{Cov}(X, Y)$ e $\mathrm{Corr}(X, Y)$.

   (e) Se $Z = X + Y$, calcule $\mathrm{E}(Z)$ e $\mathrm{Var}(Z)$

   (f) Se $W = X - Y$, calcule $\mathrm{E}(W)$ e $\mathrm{Var}(W)$.

Capítulo 2

Vetores Aleatórios Contínuos

2.1 Introdução

Como no caso unidimensional, há uma grande semelhança entre os conceitos relativos a vetores aleatórios discretos e contínuos. Assim, introduziremos os principais conceitos relativos a vetores aleatórios bidimensionais, para depois apresentar alguns exemplos.

2.2 Definição

Sem entrar em muito rigor matemático, definiremos um vetor aleatório $k-$dimensional contínuo como um vetor formado por k variáveis aleatórias contínuas definidas no mesmo espaço amostral. O enfoque deste curso será nos vetores aleatórios bidimensionais.

2.3 Função densidade conjunta

Seja (X, Y) um vetor aleatório contínuo. A função densidade conjunta $f(x, y)$ é uma função que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $f(x, y) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$

3. $\mathrm{P}(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_{c}^{d} \int_{a}^{b} f(x, y) dx dy$

2.4 Densidades marginais

As densidades marginais de X e Y são:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int f(x,y)dy \qquad (2.1)\\
f_Y(y) &= \int f(x,y)dx
\end{aligned}
$$

Nessa definição, integrar em relação a uma variável equivale a deixar que essa variável assuma todos os seus possíveis valores. Assim, observe que, ao calcular a densidade de X para um valor específico x, isto é, calcular $f_X(x)$, deixamos y "varrer" todos os seus possíveis valores (integrando em relação a y – dy). Analogamente, ao calcular a densidade de Y para um valor específico y, isto é, calcular $f_Y(y)$, deixamos x "varrer" todos os seus possíveis valores (integrando em relação a x – dx).

2.5 Distribuições e esperanças condicionais

Por definição, temos que

$$f_{X|y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \qquad (2.2)$$

Note que, para cada y temos uma densidade condicional diferente. Analogamente,

$$f_{Y|x}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \qquad (2.3)$$

e para cada x temos uma densidade condicional diferente. Como no caso discreto, definem-se as seguintes esperanças condicionais:

$$\mathrm{E}_X(X \mid Y = y) = \int x\, f_{X|y}(x|y)dx = \int x\, \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx \qquad (2.4)$$

$$\mathrm{E}_Y(Y|X = x) = \int y\, f_{Y|x}(y|x)dy = \int y\, \frac{f(x,y)}{f_X(x)}dy \qquad (2.5)$$

Note que, para cada valor y de Y temos um valor diferente de $\mathrm{E}_X(X|Y = y)$ e para cada valor x de X, temos um valor diferente de $\mathrm{E}_Y(Y|X = x)$. Assim, aqui também podemos definir uma função g que associa, a cada valor y de Y, o valor $\mathrm{E}_X(X|Y = y)$ e outra função h que associa a cada valor x de X, o valor $\mathrm{E}_Y(Y|X = x)$, ou seja,

$$
\begin{aligned}
g &: y \longmapsto g(y) = \mathrm{E}_X(X|Y = y)\\
h &: x \longmapsto h(x) = \mathrm{E}_Y(Y|X = x)
\end{aligned}
$$

Como X e Y são variáveis aleatórias, essas funções definem novas variáveis aleatórias

$g(Y)$ e $h(X)$ cujas esperanças são calculadas como

$$\mathrm{E}_Y[g(Y)] = \int g(y) f_Y(y) dy \tag{2.6}$$

$$\mathrm{E}_X[h(X)] = \int h(x) f_X(x) dx \tag{2.7}$$

Como no caso discreto, vamos estabelecer a notação

$$\begin{aligned} g(Y) &= \mathrm{E}_X(X|Y) \\ h(X) &= \mathrm{E}_Y(Y|X) \end{aligned}$$

Usando a definição de esperança condicional dada em (2.4), temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_Y[g(Y)] &= \mathrm{E}_Y[E_X(X|Y)] = \int g(y) f_Y(y) dy \\ &= \int \mathrm{E}_X(X|Y=y) f_Y(y) dy \\ &= \int \left(\int x \, \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dx \right) f_Y(y) dy \\ &= \int \int x \, f(x,y) dx dy \\ &= \int x \left(\int f(x,y) dy \right) dx \\ &= \int x \, f_X(x) dx = \mathrm{E}(X) \end{aligned}$$

Nas duas últimas linhas usamos a definição da distribuição marginal de Y.

Analogamente, por (2.5), resulta que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_X[h(X)] &= \mathrm{E}_X[\mathrm{E}_Y(Y|X)] = \int h(x) f_X(x) dx \\ &= \int \mathrm{E}_Y(Y|X=x) f_X(x) dx \\ &= \int \left(\int y \, \frac{f(x,y)}{f_X(x)} dy \right) f_X(x) dx \\ &= \int \int y \, f(x,y) dy dx \\ &= \int y \left(\int f(x,y) dx \right) dy \\ &= \int y \, f_Y(y) dy = \mathrm{E}(Y) \end{aligned}$$

Como no caso discreto:

$$\mathrm{E}_Y\left[\mathrm{E}_X(X \mid Y)\right] = \mathrm{E}(X)$$

$$\mathrm{E}_X\left[\mathrm{E}_Y(Y \mid X)\right] = \mathrm{E}(Y)$$

2.6 Independência de variáveis aleatórias contínuas

A definição de independência de variáveis aleatórias contínuas é análoga à definição no caso discreto:

DEFINIÇÃO Independência de variáveis aleatórias contínuas

Seja (X, Y) um vetor aleatório contínuo com função densidade conjunta $f(x, y)$. Sejam $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ as densidades marginais de X e Y, respectivamente. Então, diz-se que X e Y são variáveis aleatórias independentes se

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \qquad \forall x, y$$

ou seja, a densidade conjunta é o produto das densidades marginais para todo par (x, y) no domínio de definição.

2.7 Funções de variáveis aleatórias contínuas

Assim como no caso discreto, conhecida a densidade conjunta de (X, Y), podemos ter interesse em estudar a densidade de uma variável aleatória definida como uma função $h(X, Y)$, em que h é uma função real, isto é, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e novamente uma atenção especial será dada às combinações lineares, ou seja, funções do tipo $h(X, Y) = aX + bY$, com a e b números reais quaisquer.

2.7.1 Esperança de funções de variáveis aleatórias

TEOREMA 2.1

Sejam X, Y variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta $f(x, y)$ e seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Então

$$E[h(X, Y)] = \int\int h(x, y)\, f(x, y) dx dy$$

TEOREMA 2.2

Sejam X, Y variáveis aleatórias contínuas com densidade conjunta $f(x, y)$ e seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função definida por $h(X, Y) = aX + bY$ com a e b números reais quaisquer. Então

$$E[h(X, Y)] = a\, E(X) + b\, E(Y)$$

2.8 Covariância e correlação

As definições de covariância e correlação são as mesmas vistas para o caso discreto

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathrm{E}\left[X - \mathrm{E}(X)\right]\left[Y - \mathrm{E}(Y)\right] = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
\mathrm{Corr}(X, Y) &= \mathrm{E}\left(\frac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y - \mathrm{E}(Y)}{\sigma_Y}\right) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}
\end{aligned}$$

valendo todas as propriedades vistas anteriormente para o caso discreto. Em particular, se X e Y são variáveis aleatórias contínuas independentes, então $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$; a recíproca, em geral, não é verdadeira, uma vez que covariância indica uma relação linear entre as variáveis.

2.9 Observações sobre o cálculo de integrais duplas

Um teorema fundamental no cálculo de integrais duplas é o teorema de Fubini que estabelece, a grosso modo, que para funções contínuas a ordem de integração não importa, ou seja:

$$\begin{aligned}
\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy &= \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx\right] dy \\
&= \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy\right] dx
\end{aligned}$$

Na primeira linha, estamos integrando, primeiro, em relação a x, mantendo y fixo e, por último, integramos em relação a y. Na segunda linha, inverte-se a ordem: primeiro, integramos em relação a y, mantendo x fixo, e depois integramos em relação a x. O que se pode ver é que a ordem de integração não é importante, ou seja, obtemos o mesmo resultado. No entanto, dependendo da região de integração, uma das maneiras pode ser mais simples que a outra. É fundamental esboçar a região de integração.

Uma segunda observação importante sobre o cálculo de integrais duplas diz respeito aos limites de integração. Para defini-los corretamente, é fundamental esboçar a região de definição da função e analisar a variação de y para cada valor de x e vice-versa. Ao integrar em relação a y, isso significa que estamos fixando x e deixando y variar; assim, temos que olhar, para cada x, o domínio de variação de y. reciprocamente, ao integrar em relação a x, isso significa que estamos fixando y e deixando x variar; assim, temos que olhar, para cada y, o domínio de variação de x.

EXEMPLO 2.1 Função constante

Considere a seguinte função:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para desenhar a região de definição da função, note, primeiramente, que tanto x quanto y são menores que 1. Isso restringe a região a um quadrado. Mas há mais uma condição: $x \leq y$. Traçando a diagonal $y = x$ nesse quadrado, a região de definição é a parte superior, conforme ilustrado pela parte sombreada na Figura 2.1.

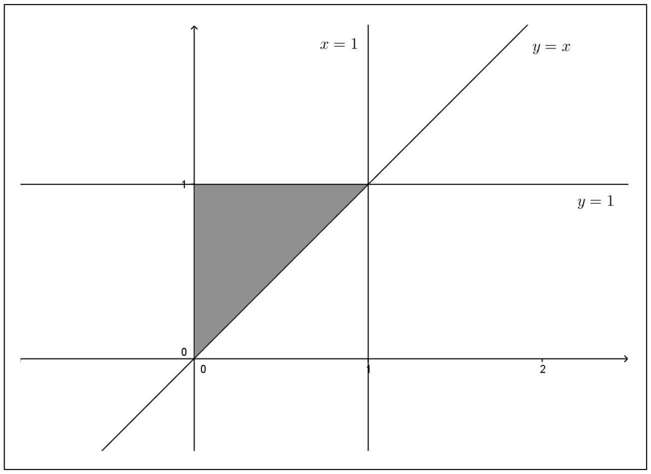

Figura 2.1 – Domínio de definição de $f(x, y)$ - Exemplo 2.1

- Validade da função densidade

  Vamos mostrar que $f(x, y)$ realmente define uma função densidade. Obviamente, $f(x, y) \geq 0$. Resta mostrar que a integral ao longo da região de definição da função densidade é 1.

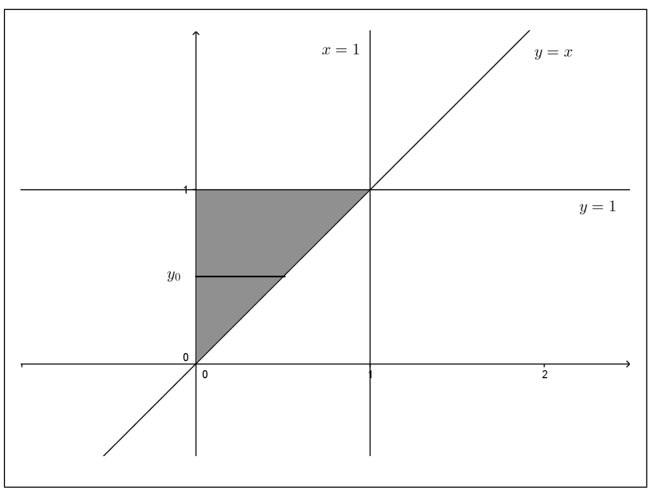

Figura 2.2 – Variação de x para um y fixo – Exemplo 2.1

Observe a Figura 2.2: na região de definição, para cada y_0 fixo no intervalo $[0, 1]$, o valor de x varia de 0 até y_0 – veja que o segmento de reta para um y_0 fixo vai desde o eixo vertical ($x = 0$) até encontrar a reta $y = x$. Seguindo essa estrutura de variação das variáveis, vamos integrar primeiro em relação a x, com y fixo, e depois, integramos em relação a y: $\int \left[\int f(x, y)dx\right] dy$.

$$\int \int f(x, y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^y 2dx\right] dy = \int_0^1 [2x]_0^y \, dy = \int_0^1 2ydy = y^2\Big|_0^1 = 1$$

Dessa forma, estão satisfeitas as condições e $f(x, y)$ realmente define uma função densidade.

Poderíamos ter invertido a ordem de integração; veja a Figura 2.3. Para cada x_0 fixo no intervalo $[0, 1]$, y varia de x_0 até 1 – o segmento vertical correspondente a x_0 fixo vai desde a reta $y = x$ até a reta horizontal $y = 1$.

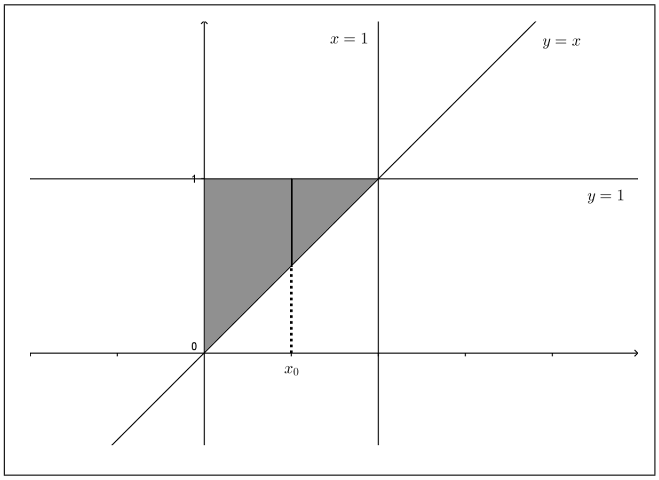

Figura 2.3 – Variação de y para um x fixo – Exemplo 2.1

$$\int\int f(x, y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_x^1 2dy\right] dx = \int_0^1 2(1-x)dx = (2x - x^2)\Big|_0^1 = 1$$

- Cálculo de $P(X \le 1/2, Y \le 1/2)$.

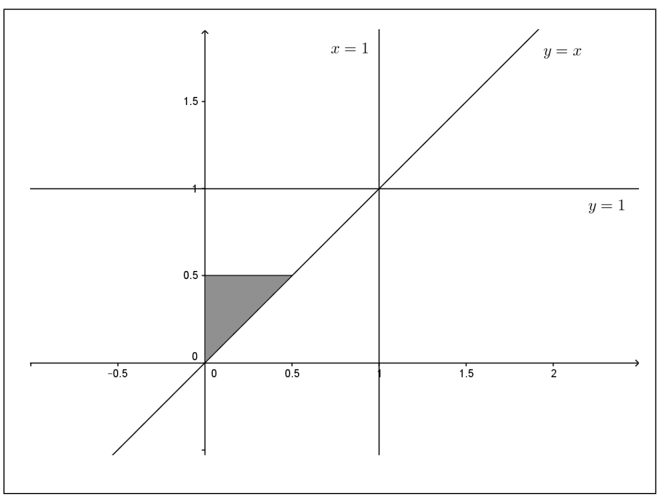

Figura 2.4 – Região de integração: $P(X \le \frac{1}{2}, Y \le \frac{1}{2})$ – Exemplo 2.1

De forma análoga, na Figura 2.4 a região sombreada representa o evento $\left(X \le \frac{1}{2}, Y \le \frac{1}{2}\right)$. Assim, para o cálculo de $P(X \le 1/2, Y \le 1/2)$, temos que considerar essa região de integração.

$$P(X \le 1/2, Y \le 1/2) = \int_0^{1/2} \left[\int_0^y 2dx\right] dy = \int_0^{1/2} 2ydy = y^2\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{4}$$

♦♦

A interpretação geométrica da integral dupla é que ela representa o volume sob a região de definição. Um erro comum é achar que a área da região de definição tem que ser 1. Note nesse exemplo que a região de definição é um triângulo de área $\frac{1}{2}$.

- Cálculo das densidades marginais

  Vamos calcular as densidades marginais. Analisando a Figura 2.2, podemos ver que, para $y \in [0,1]$, x varia de 0 a y. Logo,

$$f_Y(y) = \int f(x,y)dx = \int_0^y 2dx = 2y \qquad 0 \leq y \leq 1$$

  Note que, como função de y, $f_Y(y)$ é uma função linear. Deste resultado podemos ver que

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^1 y2ydy = 2\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}$$

  Pela Figura 2.3, para cada $x \in [0,1]$, y varia de x até 1. Logo,

$$f_X(x) = \int f(x,y)dy = \int_x^1 2dy = 2y|_x^1 = 2(1-x) \qquad 0 \leq x \leq 1$$

  que é também uma função linear de x. Podemos ver que

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^1 x\,[2(1-x)]\,dx = \left.\left(x^2 - 2\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

  Na Figura 2.5 ilustram-se essas densidades marginais e seus valores esperados.

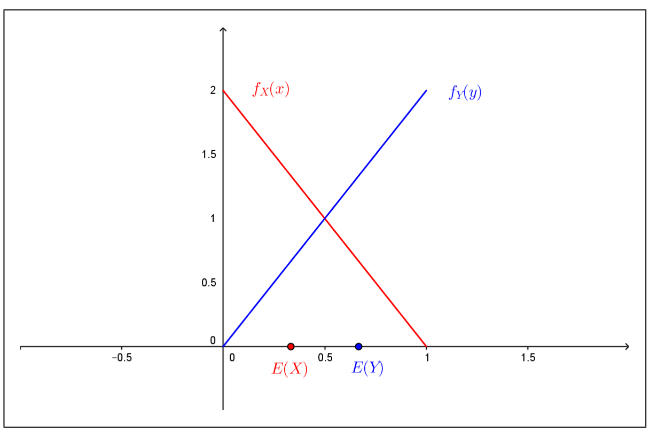

Figura 2.5 – Densidades marginais – Exemplo 2.1

♦♦

- Distribuição condicional de X dado $Y = y$

  Vimos que, dado y, x pode variar no intervalo $[0, y]$. Temos que

$$f_{X|y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2}{2y} = \frac{1}{y} \qquad 0 \leq x \leq y$$

  Note que essa é uma função de x, isto é, dado y, estamos calculando a distribuição condicional de X; podemos ver que essa é uma função constante (não depende de

x), o que caracteriza uma densidade `uniforme` no intervalo $[0, y]$. Logo, a esperança condicional de X dado $Y = y$ é o ponto médio do intervalo, ou seja,

$$\mathrm{E}(X|Y = y) = \frac{y}{2} = g(y)$$

Então, como função de y, $E(X|Y = y)$ é uma função linear.

Como $g(y) = \mathrm{E}_X(X|Y = y)$ é uma função de y, segue que $g(Y) = E_X(X|Y)$ é uma variável aleatória e, portanto, podemos calcular sua esperança:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_Y[g(Y)] &= \mathrm{E}_Y[\mathrm{E}_X(X|Y)] = \int g(y) f_Y(y) dy \\
&= \int_0^1 \frac{y}{2} 2y\, dy = \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3} = \mathrm{E}(X)
\end{aligned}$$

- Distribuição condicional de Y dado $X = x$

  Dado x, vimos que y pode variar de x até 1.

$$f_{Y|x}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2}{2(1-x)} = \frac{1}{1-x} \qquad x \leq y \leq 1$$

que também é uma densidade `uniforme` no intervalo $[x, 1]$. Logo, a esperança condicional de Y dado $X = x$ é o ponto médio do intervalo:

$$E(Y|X = x) = \frac{x+1}{2} = h(x)$$

Como $h(x) = \mathrm{E}_Y(Y|X = x)$ é uma função de x, segue que $h(X) = E_Y(Y|X)$ é uma variável aleatória e, portanto, podemos calcular sua esperança:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_X[h(X)] &= \mathrm{E}_X[\mathrm{E}_Y(Y|X)] = \int h(x) f_X(x) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x+1}{2}\right)[2(1-x)]dx = \int_0^1 (1-x^2)dx \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} = \mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

- Covariância

  Temos que calcular

$$\mathrm{E}(XY) = \int\int xyf(x,y)dxdy$$

Seguindo a mesma lógica de integração usada para mostrar a validade da função densidade, vamos integrar primeiro em relação a x e depois em relação a y, com auxílio da Figura 2.2.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= \int_0^1 y\left[\int_0^y 2x dx\right] dy = \int_0^1 y\left[x^2\right]_0^y dy = \int_0^1 y^3 dy = \frac{y^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} \\
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{36}
\end{aligned}$$

Como a covariância é diferente de 0, segue que X e Y não são independentes.

EXEMPLO 2.2 Variáveis independentes

Sejam X, Y variáveis aleatórias com densidade conjunta dada por $f(x, y) = 4xy$, $0 < x < 1; 0 < y < 1$ Vamos verificar se X e Y são independentes.

Na Figura 2.6 ilustra-se o domínio de definição de f. É interessante observar que, para qualquer x, y varia de 0 a 1 e, reciprocamente, para qualquer y, x também varia de 0 a 1, ou seja, os limites de variação de ambas as variáveis não dependem uma da outra.

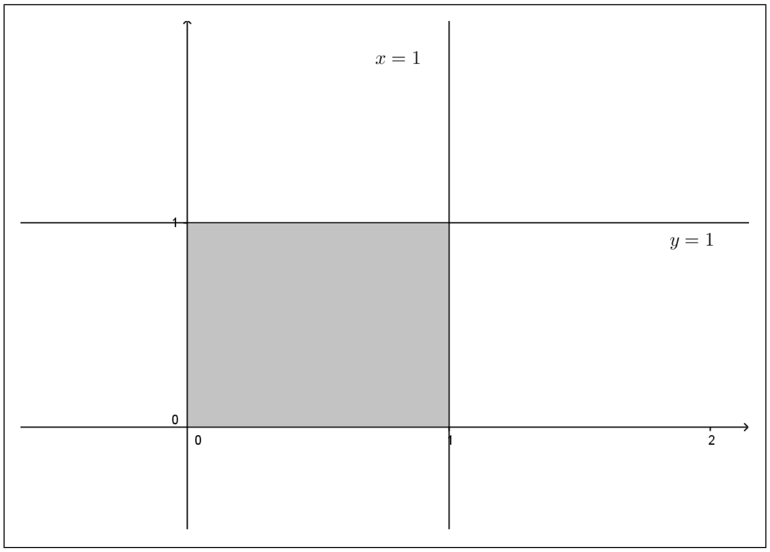

Figura 2.6 – Domínio de definição $f(x, y)$ – Exemplo 2.2

Além disso, podemos escrever a densidade conjunta como

$$f(x, y) = 4xy = (2x)(2y)$$

ou seja, conseguimos fatorar a densidade conjunta em dua partes, uma dependendo apenas de x e outra apenas de y. Temos fortes indícios da independência de X e Y. Para confirmar, vamos calcular as marginais:

$$f_X(x) = \int_0^1 4xy\, dy = 4x \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^1 = 2x \qquad 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 4xy\, dx = 4y \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = 2y \qquad 0 < y < 1$$

Como antecipado, isso demonstra que X e Y são independentes.

EXEMPLO 2.3 Função linear

Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com a seguinte função densidade conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} cx & 0 < y < x,\ y < 1 - x \\ \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Gráfico da região de definição de f

  Na Figura 2.7 ilustram-se as regiões $0 < y < x$ (abaixo da reta $y = x$) e $y < 1 - x$ (à esquerda da reta $y = 1 - x$). Como $y > 0$, a região de interseção, ou seja, a região de definição corresponde à área sombreada.

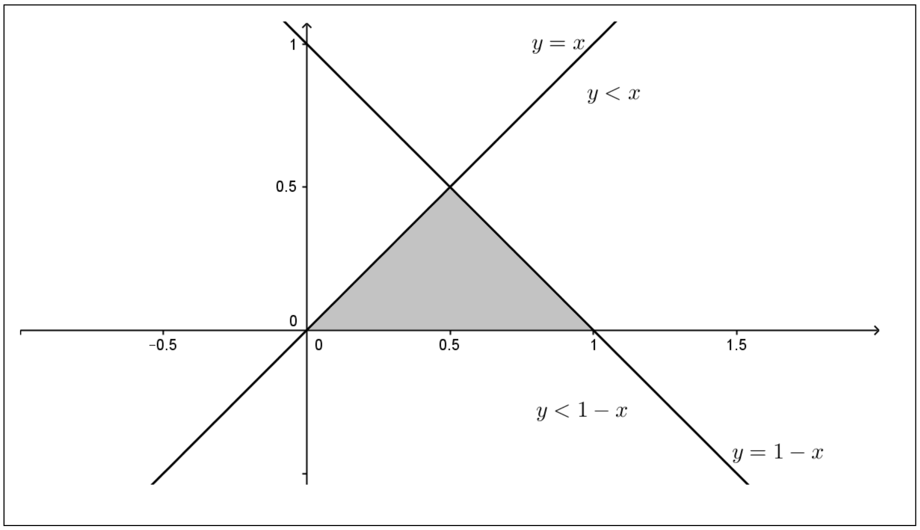

Figura 2.7 – Domínio de definição de $f(x, y)$ do Exemplo Global

Para achar o ponto de interseção das duas retas, basta explicitar as condições e resolver o sistema:

$$\begin{cases} y = x \\ y = 1 - x \end{cases}$$

Substitutindo a primeira equação na segunda, obtemos que $y = 1 - y \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = 1/2$. Como neste ponto de interseção $y = x$, concluimos que o ponto de interseção é o ponto $(1/2; 1/2)$, conforme ilustrado no gráfico acima.

- Valor de c para validade da função

  Como $f(x, y) \geq 0$, temos que ter $c > 0$. A segunda condição é

$$\int \int_R f(x, y) dx dy = 1$$

onde R é o domínio de variação de X e Y. Analisando a Figura 2.7, vemos que, para cada y no intervalo $(0; 1/2)$, a abcissa x varia de y a $1 - y$ (são as 2 retas que definem R). Note que começamos fixando y e depois olhamos a variação de x; isso implica na seguinte ordem de integração:

$$\int_0^{1/2} \left(\int_y^{1-y} cx dx \right) dy = 1 \Leftrightarrow \int_0^{1/2} \left(\int_y^{1-y} x dx \right) dy = \frac{1}{c} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{1/2} \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_y^{1-y} dy = \frac{1}{c} \Leftrightarrow \int_0^{1/2} \left[(1 - y)^2 - y^2 \right] dy = \frac{2}{c} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{1/2} (1 - 2y) dy = \frac{2}{c} \Leftrightarrow \left(y - y^2 \right) \Big|_0^{1/2} = \frac{2}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{c} \Leftrightarrow \frac{2}{8} = \frac{2}{c} \Leftrightarrow c = 8$$

O mesmo resultado é obtido invertendo-se a ordem de integração. A diferença é que temos que "quebrar" o domínio de variação de x em 2 partes: $0 < x \leq 1/2$ e $1/2 < x < 1$. Para $x \in (0; 1/2]$, vemos na Figura 2.7 que $0 < y < x$ e para $x \in (1/2; 1)$, $0 < y < 1 - x$. Então, temos

$$\int\int_R f(x,y)dxdy = 1 \Leftrightarrow \int_0^{1/2}\left(\int_0^x cxdy\right)dx + \int_{1/2}^1\left(\int_0^{1-x} cxdy\right)dx = 1 \Leftrightarrow$$
$$\int_0^{1/2} cx\left(\int_0^x dy\right)dx + \int_{1/2}^1 cx\left(\int_0^{1-x} dy\right)dx = 1 \Leftrightarrow$$
$$\int_0^{1/2} cx^2dx + \int_{1/2}^1 cx(1-x)dx = 1 \Leftrightarrow c\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{1/2} + \left(c\frac{x^2}{2} - c\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_{1/2}^1 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\frac{c}{24} + \left(\frac{c}{2} - \frac{c}{3}\right) - \left(\frac{c}{8} - \frac{c}{24}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{c + 12c - 8c - 3c + c}{24} = 1 \Leftrightarrow \frac{3c}{24} = 1 \Leftrightarrow c = 8$$

Resulta, então, que

$$f(x,y) = \begin{cases} 8x & 0 < y < x, \ y < 1 - x \\ \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Marginal de X, esperança e variância

  Para a marginal de X, novamente temos que "quebrar" o domínio de variação nos intervalos $(0; 1/2]$ e $(1/2; 1)$. Para $x \in (0; 1/2]$, vemos na Figura 2.7 que $0 < y < x$ e, neste caso,

$$f_X(x) = \int_0^x 8xdy = 8x\int_0^x dy = 8x^2$$

  Para $x \in (1/2; 1)$, $0 < y < 1 - x$, e assim

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 8xdy = 8x\int_0^{1-x} dy = 8x(1-x)$$

  Logo,

$$f_X(x) = \begin{cases} 8x^2 & 0 < x \leq 1/2 \\ \\ 8x(1-x) & 1/2 < x < 1 \end{cases} \tag{2.8}$$

  Note que

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_X(x)dx &= \int_0^{1/2} 8x^2dx + \int_{1/2}^1 (8x - 8x^2)dx = 8\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{1/2} + \left(8\frac{x^2}{2} - 8\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_{1/2}^1 \\ &= \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{8} + \left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(4\cdot\frac{1}{4} - \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - 1 + \frac{1}{3} = 1\end{aligned}$$

  ou seja, realmente temos uma função densidade (note que f_X é não negativa no intervalo $(0, 1)$. Veja seu gráfico na Figura 2.8.

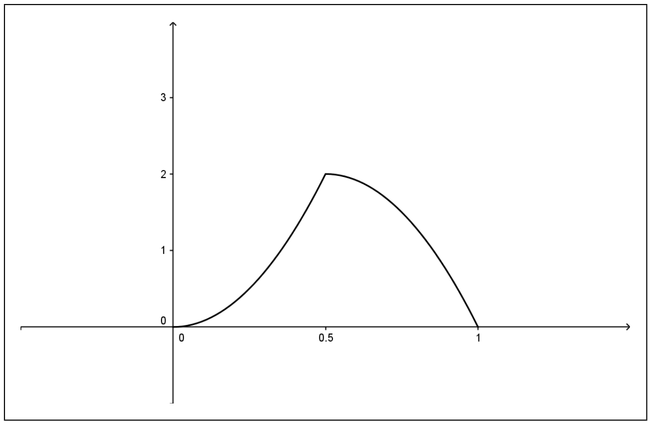

Figura 2.8 – Gráfico de f_X do Exemplo 2.3

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_0^1 x f_X(x)dx = \int_0^{1/2} x 8x^2 dx + \int_{1/2}^1 x8x(1-x)dx \\
&= 8\,\frac{x^4}{4}\bigg|_0^{1/2} + 8\,\frac{x^3}{3}\bigg|_{1/2}^1 - 8\frac{x^4}{4}\bigg|_{1/2}^1 \\
&= 2\,x^4\Big|_0^{1/2} + \frac{8}{3}\,x^3\Big|_{1/2}^1 - 2\,x^4\Big|_{1/2}^1 \\
&= 2\cdot\frac{1}{16} + \frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{8}\right) - 2\left(1-\frac{1}{16}\right) \\
&= \frac{1}{8} + \frac{8}{3}\cdot\frac{7}{8} - 2\cdot\frac{15}{16} \\
&= \frac{1}{8} + \frac{7}{3} - \frac{15}{8} = \frac{7}{3} - \frac{14}{8} = \frac{56-42}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^2) &= \int_0^1 x^2 f_X(x)dx = \int_0^{1/2} x^2 8x^2 dx + \int_{1/2}^1 x^2 8x(1-x)dx \\
&= 8\,\frac{x^5}{5}\bigg|_0^{1/2} + 8\,\frac{x^4}{4}\bigg|_{1/2}^1 - 8\frac{x^5}{5}\bigg|_{1/2}^1 \\
&= \frac{8}{5}\,x^5\Big|_0^{1/2} + 2\,x^4\Big|_{1/2}^1 - \frac{8}{5}\,x^5\Big|_{1/2}^1 \\
&= \frac{8}{5}\cdot\frac{1}{32} + 2\left(1-\frac{1}{16}\right) - \frac{8}{5}\left(1-\frac{1}{32}\right) \\
&= \frac{1}{20} + \frac{15}{8} - \frac{31}{20} = \frac{15}{8} - \frac{30}{20} = \frac{15}{8} - \frac{3}{2} = \frac{15-12}{8} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{3}{8} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{3}{8} - \frac{49}{144} = \frac{54-49}{144} = \frac{5}{144}$$

- Marginal de Y, esperança e variância

Como visto anteriormente, para cada y fixo no intervalo $(0; 1/2)$, x varia de y a $1 - y$. Logo,

$$f_Y(y) = \int_y^{1-y} 8x dx = 4x^2 \Big|_y^{1-y} = 4(1-y)^2 - 4y^2 = 4 - 8y + 4y^2 - 4y^2$$

ou seja:

$$f_Y(y) = 4(1-2y) \qquad 0 < y < 1/2 \tag{2.9}$$

Note que é fundamental explicitar o domínio de variação de y, de acordo com a região conjunta, para que se tenha uma função densidade:

$$\int_0^{1]2} f_Y(y) dy = \int_0^{1/2} (4-8y) dy = (4y - 4y^2 \Big|_0^{1/2} = \frac{4}{2} - 4 \cdot \frac{1}{4} = 2 - 1 = 1$$

Veja seu gráfico na Figura 2.9.

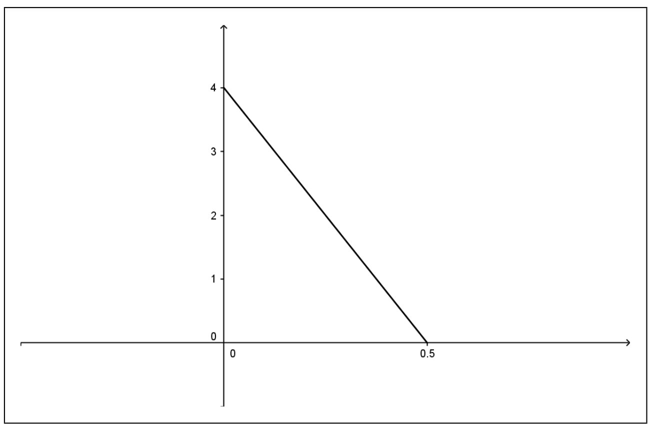

Figura 2.9 – Gráfico de f_X do Exemplo 2.3

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^{1/2} y f_Y(y) dy = \int_0^{1/2} y4(1-2y) dy = \int_0^{1/2} \left(4y - 8y^2\right) dy \\ &= 4 \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{1/2} - 8 \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^{1/2} = 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_0^{1/2} y^2 f_Y(y) dy = \int_0^{1/2} y^2 4(1-2y) dy = \int_0^{1/2} \left(4y^2 - 8y^3\right) dy \\ &= 4 \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^{1/2} - 8 \left.\frac{y^4}{4}\right|_0^{1/2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{4-3}{24} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{Var}(Y) = \frac{1}{24} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{24} - \frac{1}{36} = \frac{3-2}{72} = \frac{1}{72}$$

- Calcule a distribuição condicional de X dado $Y = y$ e sua esperança $g(y) = E(X|Y = y)$ – essa esperança é uma função de y!

Note que $f_{X|y}(x|y)$ é uma função de x; para cada $y \in (0;1/2)$, temos uma distribuição condicional diferente

$$f_{X|y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{8x}{4(1-2y)} = \frac{2x}{1-2y} \qquad 0 < x < 1$$

Para cada y, vimos que x varia de y a $1-y$; logo

$$\begin{aligned} g(y) = \mathrm{E}(X|Y=y) &= \int x\, f_{X|y}(x|y)dx = \int_y^{1-y} x \frac{2x}{1-2y} dx = \frac{1}{1-2y} \cdot \left(\frac{2x^3}{3} \right) \Big|_y^{1-y} \\ &= \frac{2}{3(1-2y)} \cdot \left[(1-y)^3 - y^3 \right] = \frac{2\left(1-3y+3y^2-2y^3\right)}{3(1-2y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[g(Y)] = \mathrm{E}[\mathrm{E}(X|Y)] &= \int h(y) f_Y(y) dy = \int_0^{1/2} \frac{2\left(1-3y+3y^2-2y^3\right)}{3(1-2y)} \cdot 4(1-2y)dy \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{1/2} \left(1-3y+3y^2-2y^3\right) dy = \\ &= \frac{8}{3} \left(y - 3\frac{y^2}{2} + y^3 - 2\frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^{1/2} \\ &= \frac{8}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} \right) \\ &= \frac{8}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{8} - \frac{1}{32} \right) = \frac{8}{3} \cdot \frac{16-8-1}{32} = \frac{8}{3} \cdot \frac{7}{32} = \frac{7}{12} = \mathrm{E}(X) \end{aligned}$$

- Calcule a distribuição condicional de Y dado $X = x$ e sua esperança $h(x)) = E(Y|X = 2)$ – essa esperança é uma função de x !

  Note que $f_{Y|x}(y|x)$ é uma função de y; para cada $x \in (0;1)$, temos uma distribuição condicional diferente. Mas aqui $f_X(x)$ é definida por duas expressões diferentes, uma para cada um dos intervalos $(0;1/2]$ e $(1/2;1)$. Logo, a condicional $f_{Y|x}(y|x)$ também será definida por duas expressões.

  Para $x \in (0;1/2]$

$$f_{Y|x}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{8x}{8x^2} = \frac{1}{x}$$

  Para $x \in (1/2;1)$

$$f_{Y|x}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{8x}{8x(1-x)} = \frac{1}{1-x}$$

  Logo,

$$f_{Y|x}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & 0 < y < 1/2; 0 < x \leq 1/2 \\ \\ \dfrac{1}{1-x} & 0 < y < 1/2; 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

$$h(x) = \mathrm{E}(Y|X=x) = \int y f_{Y|X}(y|x) dy$$

Como a densidade é definida por duas expressões, o mesmo ocorrerá com $\mathrm{E}(Y|X=x)$.

Para $x \in (0;1/2]$, vimos que y varia de 0 até x; logo

$$h(x) = \mathrm{E}(Y|X=x) = \int_0^x y\frac{1}{x}dy = \frac{1}{x}\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^x = \frac{x}{2}$$

Para $x \in (1/2;1)$, vimos que y varia de 0 até $1-x$; logo

$$h(x) = \mathrm{E}(Y|X=x) = \int_0^{1-x} y\frac{1}{1-x}dy = \frac{1}{1-x}\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{1-x} = \frac{1-x}{2}$$

Logo

$$h(x) = \mathrm{E}(Y|X=x) = h(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & 0 < x \leq 1/2 \\ \\ \dfrac{1-x}{2} & 1/2 < x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[h(X)] &= \mathrm{E}[\mathrm{E}(Y|X] = \int h(x)f_X(x)dx) = \\
&= \int_0^{1/2} \frac{x}{2}.8x^2dx + \int_{1/2}^1 \frac{1-x}{2}\cdot 8x(1-x)dx \\
&= \int_0^{1/2} 4x^3dx + 4\int_{1/2}^1 x(1-x)^2dx \\
&= \left.x^4\right|_0^{1/2} + 4\int_{1/2}^1 (x-2x^2+x^3)dx \\
&= \frac{1}{16} + 4\left.\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\right|_{1/2}^1 \\
&= \frac{1}{16} + 4\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}\right)\right] \\
&= \frac{1}{16} + 4\left[\frac{6-8+3}{12} - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{64}\right)\right] \\
&= \frac{1}{16} + 4\left[\frac{1}{12} - \frac{1}{8} + \frac{1}{12} - \frac{1}{64}\right] \\
&= \frac{1}{16} + 4\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{64}\right] = \frac{1}{16} + 4\cdot\frac{32-24-3}{192} \\
&= \frac{1}{16} + \frac{5}{48} = \frac{8}{48} = \frac{1}{6} = \mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

- Covariância e correlação

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= \int\int xyf_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int_0^{1/2}\left(\int_y^{1-y} xy8xdx\right)dy \\
&= 8\int_0^{1/2} y\left(\int_y^{1-y} x^2dx\right)dy \\
&= 8\int_0^{1/2} y\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_y^{1-y} dy \\
&= \frac{8}{3}\int_0^{1/2} y\left[(1-y)^3-y^3\right]dy \\
&= \frac{8}{3}\int_0^{1/2} y\left(1-3y+3y^2-2y^3\right)dy \\
&= \frac{8}{3}\left[\frac{y^2}{2}-y^3+\frac{3}{4}y^4-\frac{2}{5}y^5\right]_0^{1/2} \\
&= \frac{8}{3}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{16}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{32}\right) \\
&= \frac{1}{8}-\frac{1}{30} \\
&= \frac{15-4}{120}=\frac{11}{120}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{11}{120}-\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{6}=\frac{11}{2^3\cdot5\cdot3}-\frac{7}{2^3\cdot3^2}=\frac{33-35}{2^3\cdot3^2.5}=-\frac{2}{2^3\cdot3^2.5}=-\frac{1}{180}$$

$$\mathrm{Corr}(X,Y)=-\frac{\frac{1}{180}}{\sqrt{\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{144}}}=-\frac{\frac{24}{180}}{\sqrt{\frac{35}{3}}}=-\frac{2}{15}\cdot\sqrt{\frac{3}{35}}\approx-0,039$$

♦♦

EXEMPLO 2.4

Seja (X,Y) um vetor aleatório com função densidade conjunta dada por

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}x(x-y) & 0<x<2; -x<y<x\\ 0 & \text{caso contrário}\end{cases}$$

- Validade da função densidade

  Como $x>0$, o sinal de $f(x,y)$ é determinado pelo termo $x-y$. Para que $f(x,y)\geq 0$, temos que ter $x-y\geq 0$, ou equivalentemente $y\leq x$, condição que é satisfeita no domínio de definição de f.

Para mostrar que $\int\int f(x,y)dxdy = 1$ vamos analisar o domínio de definição de f, ilustrado como a parte sombreada da Figura 2.10.

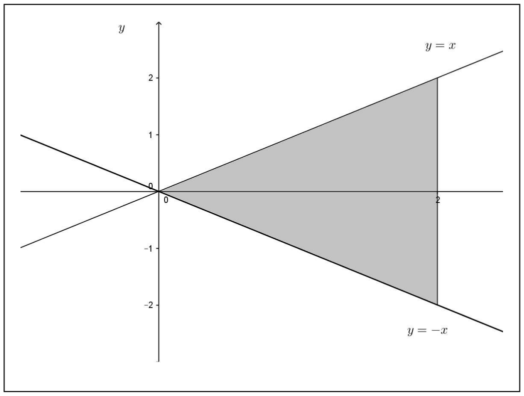

Figura 2.10 – Domínio de definição de $f(x,y)$ - Exemplo 2.4

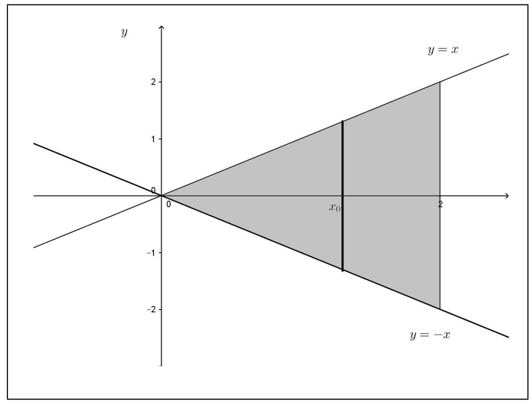

Figura 2.11 – Variação de y para um x fixo – Exemplo 2.4

Nesse domínio, para cada valor de x, y varia de $-x$ a $+x$. Veja a Figura 2.11. Logo,

$$\begin{aligned}
\int\int f(x,y)dxdy &= \int_0^2 \int_{-x}^{+x} \frac{1}{8}x(x-y)dydx = \\
&= \frac{1}{8}\int_0^2 \int_{-x}^{+x} (x^2 - xy)dydx \\
&= \frac{1}{8}\int_0^2 \left(x^2y - x\frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{-x}^{+x} dx \\
&= \frac{1}{8}\int_0^2 \left[\left(x^3 - \frac{x^3}{2} \right) - \left(-x^3 - \frac{x^3}{2} \right) \right] dx \\
&= \frac{1}{8}\int_0^2 2x^3 dx = \frac{1}{8}\left(\frac{x^4}{2} \right)\Bigg|_0^2 = \frac{16}{16} = 1
\end{aligned}$$

Logo, $f(x,y)$ é uma função densidade.

Note que, nesse exemplo, a inversão da ordem de integração é mais trabalhosa, pois temos que considerar dois casos, conforme ilustrado na Figura 2.12: (i) $0 < y < 2$ com x variando de y a 2 (segmento superior em azul) e (ii) $-2 < y < 0$, com x variando de $-y$ a 2 (segmento inferior em vermelho):

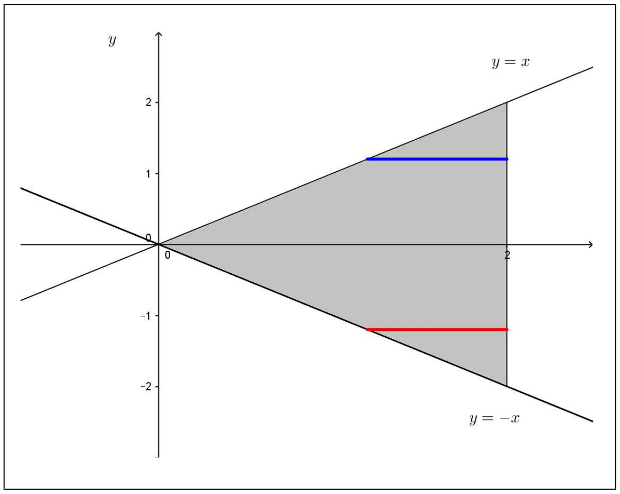

Figura 2.12 – Variação de x para um y fixo – $0 < y < 2$ e $-2 < y < 0$ – Exemplo 2.4

O cálculo da integral é o seguinte:

$$\begin{aligned}
&\int_0^2 \int_y^2 \frac{1}{8}x(x-y)dxdy + \int_{-2}^0 \int_{-y}^2 \frac{1}{8}x(x-y)dxdy \\
= &\int_0^2 \left[\frac{x^3}{24} - \frac{y}{8}\frac{x^2}{2}\right]_y^2 dy + \int_{-2}^0 \left[\frac{x^3}{24} - \frac{y}{8}\frac{x^2}{2}\right]_{-y}^2 dy \\
= &\int_0^2 \left[\left(\frac{8}{24} - \frac{y}{4}\right) - \left(\frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{16}\right)\right] dy + \int_{-2}^0 \left[\left(\frac{8}{24} - \frac{y}{4}\right) - \left(-\frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{16}\right)\right] dy \\
= &\int_0^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{y}{4} - \frac{y^3}{24} + \frac{y^3}{16}\right) dy + \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{3} - \frac{y}{4} + \frac{y^3}{24} + \frac{y^3}{16}\right) dy \\
= &\left[\frac{y}{3} - \frac{y^2}{8} - \frac{1}{24}\frac{y^4}{4} + \frac{1}{16}\frac{y^4}{4}\right]_0^2 + \left[\frac{y}{3} - \frac{y^2}{8} + \frac{1}{24}\frac{y^4}{4} + \frac{1}{16}\frac{y^4}{4}\right]_{-2}^0 \\
= &\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) = \frac{4}{3} - \frac{2}{6} = 1
\end{aligned}$$

♦♦

- Densidades marginais e suas esperanças

Analisando a Figura 2.11, podemos ver que, para $x \in (0, 2)$, y varia de $-x$ a $+x$. Logo, para $x \in (0, 2)$

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-x}^{+x} \frac{1}{8}x(x-y)dy = \frac{1}{8}\int_{-x}^{+x}(x^2 - xy)dy = \frac{1}{8}\left(x^2y - x\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-x}^{+x} \\
&= \frac{1}{8}\left[\left(x^3 - \frac{x^3}{2}\right) - \left(-x^3 - \frac{x^3}{2}\right)\right] = \frac{2x^3}{8} = \frac{x^3}{4}
\end{aligned}$$

Então,

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{4} & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e daí resulta que

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^2 x\frac{x^3}{4}dx = \frac{1}{4}\frac{x^5}{5}\bigg|_0^2 = \frac{32}{20} = \frac{8}{5}$$

Para calcularmos $f_Y(y)$, teremos que considerar as duas partes do domínio de definição de y : $(-2,0)$ e $[0,2)$, conforme ilustrado na Figura 2.12. Para $y \in (-2,0)$, x varia de $-y$ a 2 (segmento inferior vermelho). Logo,

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-y}^2 \frac{1}{8}x(x-y)dx = \frac{1}{8}\int_{-y}^2 (x^2 - xy)dx = \frac{1}{8}\left(\frac{x^3}{3} - y\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_{-y}^2 \\
&= \frac{1}{8}\left[\left(\frac{8}{3} - 2y\right) - \left(-\frac{y^3}{3} - \frac{y^3}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{5}{6}y^3 - 2y + \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{48}\left(5y^3 - 12y + 16\right) \qquad -2 < y < 0
\end{aligned}$$

Para $y \in [0,2)$, x varia de y a 2 (segmento superior azul). Logo,

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{y}^2 \frac{1}{8}x(x-y)dx = \frac{1}{8}\int_{y}^2 (x^2 - xy)dx = \frac{1}{8}\left(\frac{x^3}{3} - y\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_{y}^2 \\
&= \frac{1}{8}\left[\left(\frac{8}{3} - 2y\right) - \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^3}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{6}y^3 - 2y + \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{48}\left(y^3 - 12y + 16\right) \qquad 0 \le y < 2
\end{aligned}$$

Resumindo:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{48}\left(5y^3 - 12y + 16\right) & -2 < y < 0 \\[2ex] \dfrac{1}{48}\left(y^3 - 12y + 16\right) & 0 \le y < 2 \end{cases}$$

Resulta que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &= \int y f_Y(y)dy = \int_{-2}^0 y\frac{1}{48}\left(5y^3 - 12y + 16\right)dy + \int_0^2 y\frac{1}{48}\left(y^3 - 12y + 16\right)dy \\
&= \frac{1}{48}\left(y^5 - 4y^3 + 8y^2\right)\bigg|_{-2}^0 + \frac{1}{48}\left(\frac{y^5}{5} - 4y^3 + 8y^2\right)\bigg|_0^2 \\
&= \frac{1}{48}\left\{0 - \left[(-2)^5 - 4(-2)^3 + 8(-2)^2\right]\right\} + \frac{1}{48}\left(\frac{32}{5} - 32 + 32\right) \\
&= \frac{1}{48}\left(32 - 32 - 32 + \frac{32}{5}\right) = -\frac{1}{48} \times \frac{128}{5} = -\frac{8}{15}
\end{aligned}$$

Na Figura 2.13 ilustram-se essas densidades marginais e seus valores esperados.

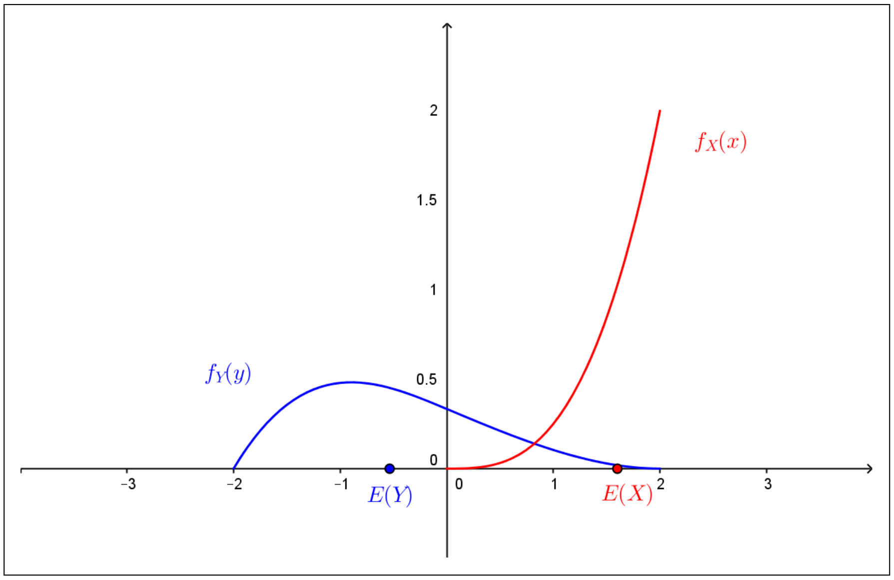

Figura 2.13 – Densidades marginais – Exemplo 2.4 ♦♦

- Distribuição condicional de Y dado $X = x$

  Vimos acima que, dado x, y pode variar no intervalo $[-x, x]$. Temos que

$$f_{Y|x}(y|X = x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{8}x(x - y)}{\frac{x^3}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}y\right) \qquad -x \leq y \leq x$$

  Note que essa é uma função linear de y e, portanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_Y(Y|X = x) &= \int y\, f_{Y|x}(Y|X = x = \int_{-x}^{x} y\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}y\right) dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2}y^2\right) dy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\frac{y^2}{2} - \frac{1}{x^2}\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-x}^{x} \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x^2}\frac{x^3}{3}\right) - \left(\frac{1}{x}\frac{(-x)^2}{2} - \frac{1}{x^2}\frac{(-x)^3}{3}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right) - \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right)\right] = -\frac{x}{3} = h(x)
\end{aligned}$$

  Como $h(x) = \mathrm{E}_Y(Y|X = x)$ é uma função de x, segue que $h(X) = E_Y(Y|X)$ é uma variável aleatória e, portanto, podemos calcular sua esperança:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_X[h(X)] &= \mathrm{E}_X[\mathrm{E}_Y(Y|X)] = \int h(x)f_X(x)dx \\
&= \int_0^2 -\frac{x}{3}\frac{x^3}{4}dx = -\frac{1}{12}\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^2 = -\frac{8}{15} = \mathrm{E}(Y)
\end{aligned}$$

- Distribuição condicional de X dado $Y = y$

  Dada a natureza das densidades envolvidas, não calcularemos essa distribuição condicional, uma vez que as integrais se tornam mais difíceis, fugindo do objetivo do curso.

2.10 Exercícios propostos

1. Seja (X, Y) um vetor aleatório cuja função densidade é constante na região $A \subset \mathbb{R}^2$ definida por $A = \{(x, y); 0 < y < x; x + y < 1\}$. Determine

   (a) a função densidade conjunta de X e Y.

   (b) as marginais f_X e f_Y

   (c) $E(X), E(Y), Var(X), Var(Y)$

   (d) $P(X < 0,5; Y > 0,25)$

   (e) $P(X + Y > 1/2)$

   (f) a covariância e a correlação entre X e Y.

2. Seja (X, Y) um vetor aleatório cuja função densidade é constante na região $A \subset \mathbb{R}^2$ definida por $A = \{(x, y) \,|\, 0 < x < 1; x + y < 1\}$. Determine

   (a) a função densidade conjunta de X e Y.

   (b) as marginais f_X e f_Y

   (c) $E(X), E(Y), Var(X), Var(Y)$

   (d) $P(X < 0,5; Y > 0,5)$

   (e) a covariância e a correlação entre X e Y.

3. Considere a seguinte função densidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y :

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{se } 0 < x < y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   (a) Obtenha as densidades marginais de X e Y, identificando as suas respectivas distribuições de probabilidade.

   (b) Verifique se X e Y são independentes, justificando a sua resposta.

4. Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com a seguinte função densidade conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} cy^2 & \text{se } 0 < x < 2 \text{ e } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

   (a) Faça um gráfico ilustrando o domínio de variação de X e Y.

   (b) Calcule o valor da constante c.

   (c) Calcule as marginais de X e Y, mostrando que realmente definem uma função densidade.

   (d) Calcule $E(X), E(Y), Var(X), Var(Y)$.

   (e) X e Y são independentes? Justifique sua resposta.

   (f) Calcule $P(Y > 2 - X)$.

   (g) Calcule $P(X \leq 1)$

Capítulo 3

A distribuição normal bidimensional

Se $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ sua densidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \qquad -\infty < x < \infty \tag{3.1}$$

e vimos que $\mathrm{E}(X) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Vamos ver agora o caso da normal bidimensional.

Se (X, Y) tem distribuição normal bidimensional, então a densidade conjunta é

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}A\right)$$

onde

$$A = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]$$

As densidades marginais são normais:

$$\begin{aligned} X &\sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right) \\ Y &\sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right) \end{aligned}$$

e

$$\rho = \mathrm{Corr}(X,Y) \Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = \rho\sigma_x\sigma_y$$

As distribuições condicionais são normais:

$$Y|X = x \sim N\left(\eta_x, \zeta^2\right)$$

onde

$$\begin{aligned} \eta_x &= \mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x) \\ \zeta^2 &= \left(1-\rho^2\right)\sigma_y^2 \end{aligned}$$

e

$$X|Y = y \sim N\left(\eta_y; \xi^2\right)$$

onde

$$\begin{aligned}
\eta_y &= \mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y - \mu_y\right) \\
\xi^2 &= \left(1 - \rho^2\right)\sigma_x^2
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
h(x) &= E(Y|X = x) = \mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x) \\
g(y) &= E(X|Y = y) = \mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y - \mu_y\right)
\end{aligned}$$

e ambas são funções lineares.

No Apêndice A apresentam-se as demonstrações de todos os resultados acima.

3.1 Exercícios propostos

1. Seja X o tempo (em segundos) necessário para um corredor completar os primeiros 500 metros de uma corrida e seja Y o tempo (em segundos) necessário para ele completar os próximos 500 metros na mesma corrida. Suponha que (X, Y) tenha distribuição normal bivariada com os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned}
\mu_X &= 59 \\
\mu_Y &= 60 \\
\sigma_X &= \sigma_Y = 1 \\
\rho &= 0,5.
\end{aligned}$$

   (a) Calcule $\mathrm{P}(X \leq 60)$ e $\mathrm{P}(Y \leq 59)$.

   (b) Se ele correu os primeiros 500 metros em 60 segundos, qual é a probabilidade de que ele leve menos de 59 segundos para completar os 500 metros seguintes?

Capítulo 4

Exercícios Resolvidos

4.1 Variáveis Bidimensionais Discretas

1. A tabela da distribuição conjunta de X e Y é dada a seguir.

		X		
		1	2	3
	0	0,1	0,1	0,1
Y	1	0,2	0	0,3
	2	0	0,1	0,1

(a) Determine as distribuições marginais de X e Y.

(b) Obtenhas as esperanças e as variâncias de X e Y.

(c) Verifique se X e Y são independentes.

(d) Calcule $P(X \leq 2)$ e $P(X = 2, Y \leq 1)$

(e) Calcule $P(X = 1|Y = 0)$ e $P(Y = 2|X = 3)$.

(f) Calcule a covariância e a correlação entre X e Y.

Solução

(a)

		X			
		1	2	3	$P(Y = y)$
	0	0,1	0,1	0,1	0,3
Y	1	0,2	0	0,3	0,5
	2	0	0,1	0,1	0,2
$P(X = x)$		0,3	0,2	0,5	1,0

(b)

$$\begin{aligned}
E(X) &= 1 \times 0,3 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,5 = 2,2 \\
E(X^2) &= 1^2 \times 0,3 + 2^2 \times 0,2 + 3^2 \times 0,5 = 5,6 \\
Var(X) &= 5,6 - (2,2)^2 = 0,76 \\
E(Y) &= 1 \times 0,5 + 2 \times 0,2 = 0,9 \\
E(Y^2) &= 1^2 \times 0,5 + 2^2 \times 0,2 = 1,3 \\
Var(Y) &= 1,3 - (0,9)^2 = 0,49
\end{aligned}$$

(c) X e Y não são independentes pois

$$P(X = 1, Y = 2) = 0 \neq P(X = 1) \times P(Y = 2) = 0,3 \times 0,2 = 0,06$$

(d)

$$\begin{aligned}
P(X \leq 2) &= P(X = 1) + P(X = 2) = 0,5 \\
P(X = 2, Y \leq 1) &= P(X = 2, Y = 0) + P(X = 2, Y = 1) = 0,1 + 0 = 0,1
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
P(X = 1|Y = 0) &= \frac{P(X = 1, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3} \\
P(Y = 2|X = 3) &= \frac{P(X = 3, Y = 2)}{P(X = 3)} = \frac{0,1}{0,5} = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
E(XY) &= 0 \times 1 \times 0,1 + 0 \times 2 \times 0,1 + 0 \times 3 \times 0,1 + \\
&\quad 1 \times 1 \times 0,2 + 1 \times 2 \times 0,0 + 1 \times 3 \times 0,3 + \\
&\quad 2 \times 1 \times 0,0 + 2 \times 2 \times 0,1 + 2 \times 3 \times 0,1 = 2,1 \\
Cov(X, Y) &= E(XY) - E(X)\,E(Y) = 2,1 - 2,2 \times 0,9 = 0,12 \\
Corr(X, Y) &= \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0,12}{\sqrt{0,76 \times 0,49}} = 0,1966
\end{aligned}$$

2. A tabela da distribuição conjunta de X e Y é dada a seguir.

		X		
		−1	0	1
	−1	1/12	0	1/12
Y	0	1/6	0	1/6
	1	1/4	0	1/4

(a) Calcule $E(X + Y)$ e $Var(X + Y)$.

(b) Se $Z = aX + bY$, calcule a e b de modo que $E(Z) = 10$ e $Var(Z) = 600$.

Solução

(a) $\mathrm{E}(X) = 0 \qquad \mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) = 1$

$\mathrm{E}(Y) = -\dfrac{2}{12} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$

$\mathrm{E}(Y^2) = \dfrac{2}{12} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{3}$

$\mathrm{Var}(Y) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{5}{9}$

$\mathrm{E}(XY) = 0 \Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = 0 - 0 = 0$

$\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) = \dfrac{1}{3}$

$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) = 1 + \dfrac{5}{9} = \dfrac{14}{9}$

(b) $\mathrm{E}(Z) = 10 \Leftrightarrow a\,\mathrm{E}(X) + b\,\mathrm{E}(Y) = 10 \Leftrightarrow b = 30$

$\mathrm{Var}(Z) = 600 \Leftrightarrow a^2\,\mathrm{Var}(X) + b^2\,\mathrm{Var}(Y) = 600 \Leftrightarrow a^2 + 900 \times \dfrac{5}{9} = 600 \Leftrightarrow a^2 = 100 \Leftrightarrow$ $a = \pm 10$

3. A tabela da distribuição conjunta de X e Y é dada a seguir.

		X		
		1	2	3
	1	0,1	0,1	0,0
Y	2	0,1	0,2	0,3
	3	0,1	0,1	0,0

(a) Determine a função de probabilidade de $X + Y$ e, a partir dela, calcule $\mathrm{E}(X+Y)$. Pode-se obter a mesma resposta de outra maneira?

(b) Determine a função de probabilidade de XY e, a partir dela, calcule $\mathrm{E}(XY)$.

(c) Mostre que, embora $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$, X e Y não são independentes.

Solução

(a)

z	2	3	4	5
$\mathrm{P}(X+Y=z)$	0,1	0,2	0,3	0,4

$\mathrm{E}(X+Y) = 0,2 + 0,6 + 1,2 + 2,0 = 4,0 = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$

$\mathrm{E}(X) = 1 \times 0,3 + 2 \times 0,4 + 3 \times 0,3 = 2,0$

$\mathrm{E}(Y) = 1 \times 0,2 + 2 \times 0,6 + 3 \times 0,2 = 2,0$

(b)

z	1	2	3	4	6
$\mathrm{P}(XY=z)$	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4

$\mathrm{E}(XY) = 0,1 + 0,4 + 0,3 + 0,8 + 2,4 = 4,0 = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$

X e Y não são independentes pois, por exemplo,

$\mathrm{P}(X=3, Y=3) = 0 \neq \mathrm{P}(X=3)\,\mathrm{P}(Y=3) = 0,3 \times 0,2 = 0,06$

4. Uma urna contém 3 bolas numeradas de 1 a 3. Duas bolas são retiradas ao acaso e sem reposição. Se X =número da primeira bola retirada e Y = número da segunda bola retirada, calcule $\mathrm{P}(X < Y)$.

Solução

Note que $\mathrm{P}(X=i, Y=j) = \mathrm{P}(X=i) \times \mathrm{P}(Y=j|X=i) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \qquad i \neq j = 1,2,3.$

Então, $\mathrm{P}(X<Y) = \mathrm{P}(X=1,Y=2) + \mathrm{P}(X=1,Y=3) + \mathrm{P}(X=2,Y=3) = \frac{3}{6} = 0,5$

5. Um aluno faz um teste de múltipla escolha com 4 questões do tipo Verdadeiro-Falso. Suponha que o aluno esteja "chutando" todas as questões, uma vez que ele não estudou a matéria da prova. Defina as seguintes variáveis aleatórias:

$$\begin{aligned} X_1 &= \text{número de acertos entre as duas primeiras questões da prova} \\ Y_1 &= \text{número de acertos entre as duas últimas questões da prova} \\ X_2 &= \text{número de acertos entre as três primeiras questões da prova} \\ Y_2 &= \text{número de acertos entre as três últimas questões da prova} \end{aligned}$$

(a) Construa uma tabela com o espaço amostral associado a este experimento, listando todas as possibilidades de acerto e os valores de X_1, Y_1, X_2, Y_2 e suas probabilidades.

(b) Construa a função de distribuição conjunta de (X_1, Y_1) com as respectivas marginais.

(c) Construa a função de distribuição conjunta de (X_2, Y_2) com as respectivas marginais.

(d) Verifique se X_1 e Y_1 são independentes.

(e) Verifique se X_2 e Y_2 são independentes.

(f) Por que já era de se esperar as diferenças observadas em (d) e (e)?

(g) Calcule a covariância entre X_1 e Y_1.

(h) Calcule a covariância entre X_2 e Y_2.

(i) Calcule as seguintes distribuições condicionais com suas esperanças condicionais:

$$X_2 \,|\, Y_2 = 0 \qquad X_2 \,|\, Y_2 = 1 \qquad X_2 \,|\, Y_2 = 2 \qquad X_2 \,|\, Y_2 = 3$$

(j) Calcule $E\left[E\left(X_2 \,|\, Y_2\right)\right]$.

Solução

(a) Vamos representar por 1 um acerto e por 0, um erro.

Q.1	Q.2	Q.3	Q.4	X_1	Y_1	X_2	Y_2	Prob.
0	0	0	0	0	0	0	0	1/16
1	0	0	0	1	0	1	0	1/16
0	1	0	0	1	0	1	1	1/16
0	0	1	0	0	1	1	1	1/16
0	0	0	1	0	1	0	1	1/16
1	1	0	0	2	0	2	1	1/16
1	0	1	0	1	1	2	1	1/16
1	0	0	1	1	1	1	1	1/16
0	1	1	0	1	1	2	2	1/16
0	1	0	1	1	1	1	2	1/16
0	0	1	1	0	2	1	2	1/16
1	1	1	0	2	1	3	2	1/16
1	1	0	1	2	1	2	2	1/16
1	0	1	1	1	2	2	2	1/16
0	1	1	1	1	2	2	3	1/16
1	1	1	1	2	2	3	3	1/16

(b) .

		X_1 0	1	2	$P(Y_1 = y)$
	0	1/16	2/16	1/16	1/4
Y_1	1	**2/16**	4/16	2/16	**2/4**
	2	1/16	2/16	1/16	1/4
$P(X_1 = x)$		**1/4**	2/4	1/4	1

(c) .

		X_2 0	1	2	3	$P(Y_2 = y)$
	0	1/16	1/16	**0**	0	**1/8**
Y_2	1	1/16	3/16	2/16	0	3/8
	2	0	2/16	3/16	1/16	3/8
	3	0	0	1/16	1/16	1/8
$P(X_2 = x)$		1/8	3/8	**3/8**	1/8	1

(d) Para cada uma das 9 celas, temos que $P(X_1 = x, Y_1 = y) = P(X_1 = x) \times P(Y_1 = y)$; por exemplo, para a cela (2,1), $P(X_1 = 0, Y_1 = 1) = 2/16 = P(X_1 = 0) \times P(Y_1 = 1) = (1/4) \times (2/4)$. Portanto, X_1 e Y_1 são independentes.

(e) X_2 e Y_2 não são independentes, pois, por exemplo, $P(X_2 = 2, Y_2 = 0) = 0 \neq P(X_2 = 2) \times P(Y_2 = 0) = (3/8) \times (1/8)$.

(f) Na definição de X_2 e Y_2 o número de acertos nas questões 2 e 3 é contabilizado nas duas variáveis, enquanto na definição de X_1 e Y_1 os acertos considerados são de questões diferentes.

(g) Como X_1 e Y_1 são independentes, temos que $\text{Cov}(X_1, Y_1) = 0$.

(h) Sabemos que $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

$$
\begin{aligned}
E(X_2Y_2) &= 1 \times 1 \times \frac{3}{16} + 2 \times 1 \times \frac{2}{16} + 1 \times 2 \times \frac{2}{16} + 2 \times 2 \times \frac{3}{16} + \\
&\quad 3 \times 2 \times \frac{1}{16} + 2 \times 3 \times \frac{1}{16} + 3 \times 3 \times \frac{1}{16} \\
&= \frac{44}{16} = \frac{11}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X_2) &= E(Y_2) = \frac{3}{2} \\
\text{Cov}(X_2, Y_2) &= \frac{11}{4} - \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(i)
- $X_2 | Y_2 = 0$

x	0	1	2	3
$P(X_2 = x)$	1/2	1/2	0	0

$E(X_2 | Y_2 = 0) = \frac{1}{2}$

- $X_2 | Y_2 = 1$

x	0	1	2	3
$P(X_2 = x)$	1/6	1/2	2/6	0

$E(X_2 | Y_2 = 1) = \frac{7}{6}$

- $X_2|Y_2 = 2$

x	0	1	2	3
$P(X_2 = x)$	0	1/3	1/2	1/6

$E(X_2|Y_2 = 2) = \frac{11}{6}$

- $X_2|Y_2 = 3$

x	0	1	2	3
$P(X_2 = x)$	0	0	1/2	1/2

$E(X_2|Y_2 = 3) = \frac{5}{2}$

(j) Seja $h(y) = E(X_2|Y_2 = y)$. A distribuição da variável aleatória $h(Y)$ é

y	0	1	2	3
$P(Y_2 = y)$	1/8	3/8	3/8	1/8
$h(y) = E(X_2\|Y_2 = y)$	1/2	7/6	11/6	5/2

Logo,

$$E_Y\left[E_X(X_2|Y_2)\right] = \frac{1}{8}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\times\frac{7}{6}+\frac{3}{8}\times\frac{11}{6}+\frac{1}{8}\times\frac{5}{2} = \frac{1}{16}+\frac{7}{16}+\frac{11}{16}+\frac{5}{16} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2} = E(X)$$

6. Considere o lançamento de dois dados honestos e defina X = mínimo das faces e Y =máximo das faces; quando há empate, faz-se $X = Y$.

(a) Obtenha a função de probabilidade conjunta e as funções de probabilidade marginais de X e Y.

(b) X e Y são independentes?

(c) Calcule $P(X + Y > 9)$.

(d) Calcule a função de probabilidade condicional de X dado $Y = 4$.

(e) Calcule a função de probabilidade condicional de Y dado $X = 4$.

(f) Calcule a correlação entre X e Y.

Solução

(a) No esquema a seguir, cada cela da tabela corresponde ao par (X, Y)

		Dado 1					
		1	2	3	4	5	6
	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(1,2)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
Dado 2	3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(5,6)
	6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

A distribuição conjunta e as marginais de X e Y são

		X						
		1	2	3	4	5	6	$P(Y=y)$
	1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
	2	2/36	1/36	0	0	0	0	3/36
Y	3	2/36	2/36	1/36	0	0	0	5/36
	4	2/36	2/36	2/36	1/36	0	0	7/36
	5	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	0	9/36
	6	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	11/36
$P(X=x)$		11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36	1

(b) X e Y não são indepententes, pois, por exemplo, $P(X=2,Y=1)=0 \neq P(X=2)\times P(Y=1)=\frac{9}{36}\times\frac{1}{36}$

(c) $P(X+Y>9)=P(X=4,Y=6)+P(X=5,Y=5)+P(X=5,Y=6)+P(X=6,Y=4)+P(X=6,Y=5)+P(X=6,Y=6)=\dfrac{2+1+2+0+0+1}{36}=\dfrac{1}{6}$

(d) $X|Y=4$

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x\|Y=4)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	0

(e) $Y|X=4$

y	1	2	3	4	5	6
$P(Y=y\|X=4)$	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

(f) Varrendo a tabela por linhas, obtemos que

$$\begin{aligned}
E(XY) &= 1\times\frac{1}{36}+2\times\frac{2}{36}+4\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+6\times\frac{2}{36}+9\times\frac{1}{36}\\
&+ 4\times\frac{2}{36}+8\times\frac{2}{36}+12\times\frac{2}{36}+16\times\frac{1}{36}\\
&+ 5\times\frac{2}{36}+10\times\frac{2}{36}+15\times\frac{2}{36}+20\times\frac{2}{36}+25\times\frac{1}{36}\\
&+ 6\times\frac{2}{36}+12\times\frac{2}{36}+18\times\frac{2}{36}+24\times\frac{2}{36}+30\times\frac{2}{36}+36\times\frac{1}{36}=\frac{441}{36}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= 1\times\frac{11}{36}+2\times\frac{9}{36}+3\times\frac{7}{36}+4\times\frac{5}{36}+5\times\frac{3}{36}+6\times\frac{1}{36}=\frac{91}{36}\\
\mathrm{E}(X^2) &= 1^2\times\frac{11}{36}+2^2\times\frac{9}{36}+3^2\times\frac{7}{36}+4^2\times\frac{5}{36}+5^2\times\frac{3}{36}+6^2\times\frac{1}{36}=\frac{301}{36}\\
\mathrm{E}(Y) &= 1\times\frac{1}{36}+2\times\frac{3}{36}+3\times\frac{5}{36}+4\times\frac{7}{36}+5\times\frac{9}{36}+6\times\frac{11}{36}=\frac{161}{36}\\
\mathrm{E}(Y^2) &= 1^2\times\frac{1}{36}+2^2\times\frac{3}{36}+3^2\times\frac{5}{36}+4^2\times\frac{7}{36}+5^2\times\frac{9}{36}+6^2\times\frac{11}{36}=\frac{791}{36}\\
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \frac{441}{36}-\frac{91}{36}\times\frac{161}{36}=\frac{1225}{1296}\\
\mathrm{Var}(X) &= \frac{301}{36}-\left(\frac{91}{36}\right)^2=\frac{2555}{1296}\\
\mathrm{Var}(Y) &= \frac{791}{36}-\left(\frac{161}{36}\right)^2=\frac{2555}{1296}\\
\mathrm{Corr}(X,Y) &= \frac{\frac{1225}{1296}}{\sqrt{\frac{2555}{1296}\times\frac{2555}{1296}}}=\frac{1225}{2555}=0,479452
\end{aligned}
$$

7. Sejam X e Y variáveis aleatórias com $\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(Y)=0$ e $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}(Y)=1$. Prove que $\rho(U,V)=0$, em que $U=X+Y$ e $V=X-Y$.

   Solução

   $\mathrm{Cov}(U,V) = \mathrm{Cov}(X+Y, X-Y) = \mathrm{Cov}(X,X)-\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(Y,X)-\mathrm{Cov}(Y,Y) = \mathrm{Var}(X)-\mathrm{Var}(Y)=0$

8. A tabela da distribuição conjunta de X e Y é dada a seguir.

		X		
		1	2	3
	1	0	0,2	0
Y	2	0,2	0,2	0,2
	3	0	0,2	0,0

   (a) Calcule a função de probabilidade condicional de X dado $Y=2$.

   (b) Calcule a função de probabilidade condicional de Y dado $X=2$.

   (c) Pode-se dizer que X e Y são independetens e identicamente distribuídas? Explique.

   (d) Calcule $\mathrm{Cov}(X,Y)$ e comente os resultados obtidos.

   Solução

		X			
		1	2	3	$\mathrm{P}(Y=y)$
	1	0	0,2	0	0,2
Y	2	0,2	0,2	0,2	0,6
	3	0	0,2	0,0	0,2
$\mathrm{P}(X=x)$		0,2	0,6	0,2	1

(a) $X|Y = 2$

x	1	2	3
$P(X = x\|Y = 2)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$

(b) $Y|X = 2$

y	1	2	3
$P(Y = y\|X = 2)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$

(c) Marginais de X e de Y

x	1	2	3
$P(X = x)$	0,2	0,6	0,2

y	1	2	3
$P(Y = y)$	0,2	0,6	0,2

Podemos ver que X e Y são identicamente distribuídas, mas não são independentes, pois

$$P(X = 1, Y = 1) = 0 \neq P(X = 1) \times P(Y = 1) = 0,2 \times 0,2$$

(d)

$$\begin{aligned}
&E(X) = E(Y) = 2\\
&E(XY) = 2 \times 0,2 + 2 \times 0,2 + 4 \times 0,2 + 6 \times 0,2 + 6 \times 0,2 = 4,0\\
&Cov(X, Y) = 4,0 - 2 \times 2 = 0 \Rightarrow Corr(X, Y) = 0
\end{aligned}$$

Esse exemplo ilustra o fato de que $Cov(X, Y) = 0 \nRightarrow X, Y$ independentes.

9. Uma moeda honesta é lançada 4 vezes. Seja X o número de caras nos 2 primeiros lançamentos e seja Y o número de caras nos 3 últimos lançamentos.

   (a) Liste todos os elementos do espaço amostral deste experimento, epsecificando os valores de X e Y.

   (b) Construa a função de distribuição conjunta de X e Y.

   (c) Calcule $E(X), E(Y), Var(X), Var(Y)$

   (d) Calcule $Cov(X, Y)$ e $Corr(X, Y)$.

   (e) Se $Z = X + Y$, calcule $E(Z)$ e $Var(Z)$

   (f) Se $W = X - Y$, calcule $E(W)$ e $Var(W)$.

Solução

(a)

ω	X	Y	$P(\omega)$
KKKK	2	3	1/16
KKKC	2	2	1/16
KKCK	2	2	1/16
KCKK	1	2	1/16
CKKK	1	3	1/16
KKCC	2	1	1/16
KCKC	1	1	1/16
KCCK	1	1	1/16
CCKK	0	2	1/16
CKCK	1	2	1/16
KKCC	2	1	1/16
CCCK	0	1	1/16
CCKC	0	1	1/16
CKCC	1	1	1/16
KCCC	1	0	1/16
CCCC	0	0	1/16

(b)

		X			
		0	1	2	$P(Y = y)$
	0	1/16	1/16	0	2/16
Y	1	2/16	3/16	2/16	7/16
	2	0	2/16	2/16	5/16
	3	0	1/16	1/16	2/16
$P(X = x)$		4/16	7/16	5/16	1

(c)

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 1 \times \frac{7}{16} + 2 \times \frac{5}{16} = \frac{17}{16} \\
E(X^2) &= 1^2 \times \frac{7}{16} + 2^2 \times \frac{5}{16} = \frac{27}{16} \\
\mathrm{Var}(X) &= \frac{27}{16} - \left(\frac{17}{16}\right)^2 = \frac{16 \times 27 - 17^2}{256} = \frac{143}{256} \\
E(Y) &= 1 \times \frac{7}{16} + 2 \times \frac{5}{16} + 3 \times \frac{2}{16} = \frac{23}{16} \\
E(Y^2) &= 1^2 \times \frac{7}{16} + 2^2 \times \frac{5}{16} + 3^2 \times \frac{2}{16} = \frac{45}{16} \\
\mathrm{Var}(Y) &= \frac{45}{16} - \left(\frac{23}{16}\right)^2 = \frac{16 \times 45 - 23^2}{256} = \frac{191}{256}
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= 1\times 1\times\frac{3}{16}+2\times 1\times\frac{2}{16}+2\times 1\times\frac{2}{16}+2\times 2\times\frac{2}{16}+ \\
&\quad 3\times 1\times\frac{1}{16}+3\times 2\times\frac{1}{16}=\frac{28}{16} \\
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \frac{28}{16}-\frac{17}{16}\times\frac{23}{16}=\frac{16\times 28-17\times 23}{256}=\frac{57}{256} \\
\mathrm{Corr}(X,Y) &= \frac{\frac{57}{256}}{\sqrt{\frac{143}{256}\times\frac{191}{256}}}=\frac{57}{\sqrt{143\times 191}}=0,344898
\end{aligned}
$$

(e)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Z) &= \mathrm{E}(X+Y)=\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)=\frac{17+23}{16}=\frac{5}{2} \\
\mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\,\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{143+191+2\times 57}{256}=\frac{448}{256}=\frac{7}{4}
\end{aligned}
$$

(f)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(W) &= \mathrm{E}(X-Y)=\mathrm{E}(X)-\mathrm{E}(Y)=\frac{17-23}{16}=-\frac{3}{8} \\
\mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{Var}(X-Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)-2\,\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{143+191-2\times 57}{256}=\frac{220}{256}=\frac{55}{64}
\end{aligned}
$$

10. Suponha que a função de probabilidade conjunta de X e Y seja dada por

$$
p(x,y)=\begin{cases} c|x+y| & x=-2,-1,0,1,2;\ y=-2,-1,0,1,2 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}
$$

Calcule:

(a) o valor da constante c;

(b) a função de probabilidade marginal de X;

(c) $\mathrm{P}(|X-Y|\geq 1)$.

Solução

(a) A distribuição conjunta é dada por

		X					
		-2	-1	0	1	2	$\mathrm{P}(Y=y)$
	-2	$4c$	$3c$	$2c$	$1c$	0	$10c$
	-1	$3c$	$2c$	$1c$	0	$1c$	$7c$
Y	0	$2c$	$1c$	0	$1c$	$2c$	$6c$
	1	$1c$	0	$1c$	$2c$	$3c$	$7c$
	2	0	$1c$	$2c$	$3c$	$4c$	$10c$
$\mathrm{P}(X=x)$		$10c$	$7c$	$6c$	$7c$	$10c$	1

Como a soma das probabildiades em que ser 1, resulta que $c=\dfrac{1}{40}$.

(b) A distribuição marginal de X é

x	-2	-1	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{10}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{6}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{10}{40}$

(c) $P(|X-Y| \geq 1) = 1 - P(|X-Y| = 0) = 1 - \dfrac{12}{40} = \dfrac{28}{40} = \dfrac{7}{10}$.

11. Se X, Y e Z são variáveis aleatórias duas a duas não correlacionadas e $\mathrm{Var}(X) = 1$, $\mathrm{Var}(Y) = 4$ e $\mathrm{Var}(Z) = 9$, calcule

(a) $\mathrm{Cov}(X+Y, X+Z)$

(b) $\mathrm{Corr}(U, V)$ em que $U = 5X + 2Y$ e $V = Y + Z$.

Solução

(a) $\mathrm{Cov}(X+Y, X+Z) = \mathrm{Cov}(X,X) + \mathrm{Cov}(X,Z) + \mathrm{Cov}(Y,X) + \mathrm{Cov}(Y,Z) = \mathrm{Var}(X) + 0 + 0 + 0 = 1$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(U,V) &= \mathrm{Cov}(5X+2Y, Y+Z) \\
&= 5\,\mathrm{Cov}(X,Y) + 5\,\mathrm{Cov}(X,Z) + 2\,\mathrm{Cov}(Y,Y) + 2\,\mathrm{Cov}(Y,Z) = 0 + 0 + 2\,\mathrm{Var}(Y) + 0 = 8 \\
\mathrm{Var}(U) &= \mathrm{Var}(5X+2Y) = 25\,\mathrm{Var}(X) + 4\,\mathrm{Var}(Y) + 20\,\mathrm{Cov}(X,Y) = 25 + 16 + 0 = 41 \\
\mathrm{Var}(V) &= \mathrm{Var}(Y+Z) = \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(Z) + 2\,\mathrm{Cov}(Y,Z) = 4 + 9 + 0 = 13 \\
\mathrm{Corr}(U,V) &= \frac{8}{\sqrt{41 \times 13}}
\end{aligned}$$

12. Sejam X, Y e Z três variáveis aleatórias tais que $\mathrm{Var}(X) = 1$, $\mathrm{Var}(Y) = 4$, $\mathrm{Var}(Z) = 8$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 1$, $\mathrm{Cov}(X,Z) = -1$ e $\mathrm{Cov}(Y,Z) = 2$. Determine

(a) $\mathrm{Var}(X+Y+Z)$

(b) $\mathrm{Var}(3X - Y - 2Z + 1)$

Solução

(a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X+Y+Z) &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(Z) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Z) + 2\,\mathrm{Cov}(Y,Z) \\
&= 1 + 4 + 8 + 2(1 - 1 + 2) = 17
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(3X - Y - 2Z + 1) &= \mathrm{Var}(3X - Y - 2Z) = 9\,\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 4\,\mathrm{Var}(Z) \\
&- 3\,\mathrm{Cov}(X,Y) - 6\,\mathrm{Cov}(X,Z) + 2\,\mathrm{Cov}(Y,Z) \\
&= 9 + 4 + 32 - 3 + 6 + 4 = 52
\end{aligned}$$

13. Considere realizações independentes de um experimento de Bernoulli com parâmetro p. Sejam X o número de realizações até a ocorrência do primeiro sucesso e Y o número de realizações até a ocorrência do quarto sucesso. Pede-se:

(a) a função de probabilidade conjunta de X e Y;

(b) as funções de probabilidade marginais de X e Y.

Solução

(a) $X \sim geom(p) \therefore \mathrm{P}(X = x) = p(1-p)^{x-1} \qquad x = 1, 2, \ldots$
Vamos calcular $\mathrm{P}(Y = y|X = x)$, que é a probabilidade de se obter o quarto sucesso na y-ésima realização, dado que o primeiro sucesso ocorreu na x-ésima realização. Veja a Figura 4.1: temos que ter 2 sucessos nas $y - 1 - x$ posições.

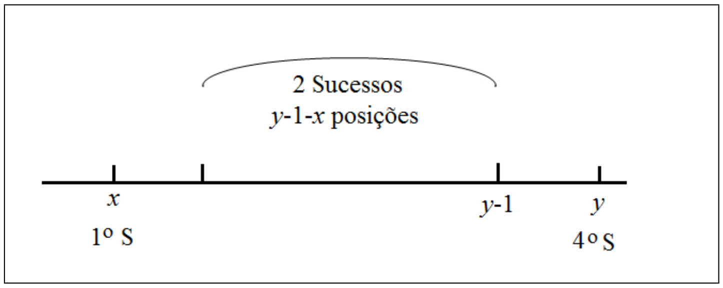

Figura 4.1 – Cálculo de $\mathrm{P}(Y = y|X = x)$

Logo,

$$\mathrm{P}(Y = y|X = x) = \binom{y-1-x}{2} p^3(1-p)^{y-1-x-2} = \binom{y-x-1}{2} p^3(1-p)^{y-x-3} \qquad y \geq x+3$$

A distribuição conjunta é

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y = y, X = x) &= \mathrm{P}(X = x)\,\mathrm{P}(Y = y|X = x) = p(1-p)^{x-1}\binom{y-x-1}{2} p^3(1-p)^{y-x-3} \\
&= \binom{y-x-1}{2} p^4(1-p)^{y-4} \qquad x = 1, 2, \cdots; y = x+3, x+4, \cdots
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que essa expressão realmente define uma função de probabilidade:

$$\begin{aligned}
\sum_x \sum_y \mathrm{P}(Y = y, X = x) &= \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=x+3}^{\infty} \binom{y-x-1}{2} p^4(1-p)^{y-4} \\
&\underbrace{=}_{z=y-x} \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{z=3}^{\infty} \binom{z-1}{2} p^4(1-p)^{z+x-4} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{z=3}^{\infty} \binom{z-1}{2} pp^3(1-p)^{x-1}(1-p)^{z-3} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} p(1-p)^{x-1} \sum_{z=3}^{\infty} \binom{z-1}{2} p^3(1-p)^{z-3}
\end{aligned}$$

Cada um dos somatórios acima é igual a 1. O primeiro somatório corresponde à soma das probabilidades da distribuição geométrica com parâmetro p. O segundo somatório corresponde à soma das probabilidades da distribuição binomial negativas com parâmetros p e 3.

(b) Para calcular as distribuições marginais, precisaremos do Teorema das Colunas do Triângulo de Pascal, que trata da soma dos elementos de uma coluna a partir da primeira linha:

Teorema das Colunas:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{p+j}{p} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{p+n}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y=y) &= \sum_{x} \mathrm{P}(Y=y, X=x) \\
&\underbrace{=}_{y \geq x+3} \sum_{x=1}^{y-3} \binom{y-x-1}{2} p^4 (1-p)^{y-4} \\
&= p^4 (1-p)^{y-4} \sum_{x=1}^{y-3} \binom{y-x-1}{2} \\
&= p^4 (1-p)^{y-4} \left[\binom{y-2}{2} + \binom{y-3}{2} + \cdots + \binom{y-y+3-1}{2} \right] \\
&= p^4 (1-p)^{y-4} \binom{y-2+1}{2+1} \\
&= \binom{y-1}{3} p^4 (1-p)^{y-4} \qquad y \geq 4
\end{aligned}$$

ou seja, $Y \sim BinNeg(p, 4)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=x) &= \sum_{y} \mathrm{P}(Y=y, X=x) \\
&\underbrace{=}_{y \geq x+3} \sum_{y=x+3}^{\infty} \binom{y-x-1}{2} p^4 (1-p)^{y-4} \\
&\underbrace{=}_{z=y-x} \sum_{z=3}^{\infty} \binom{z-1}{2} p^4 (1-p)^{x+z-4} \\
&= p(1-p)^{x-1} \sum_{z=3}^{\infty} \binom{z-1}{2} p^3 (1-p)^{z-3}
\end{aligned}$$

O último somatório é igual a 1, pois corresponde à soma das probabilidades de uma distribuição binomial negativa com parâmetros 3 e p. Logo,

$$\mathrm{P}(X=x) = p(1-p)^{x-1}$$

ou seja, $X \sim geom(p)$.

4.2 Variáveis Bidimensionais Contínuas

1. Seja (X, Y) um vetor aleatório cuja função de densidade é constante na região $A \subset \mathbb{R}^2$ definida por $A = \{(x, y); 0 < y < x; x + y < 1\}$. Determine

   (a) a função de densidade conjunta de X e Y.

   (b) as marginais f_X e f_Y

   (c) $E(X), E(Y), Var(X), Var(Y)$

   (d) $P(X < 0,5; Y > 0,25)$

   (e) $P(X + Y > 1/2)$

   (f) a covariância e a correlação entre X e Y.

   Solução

   (a) Na Figura 4.2 temos a região de definição A, representada pela parte sombreada em cinza.

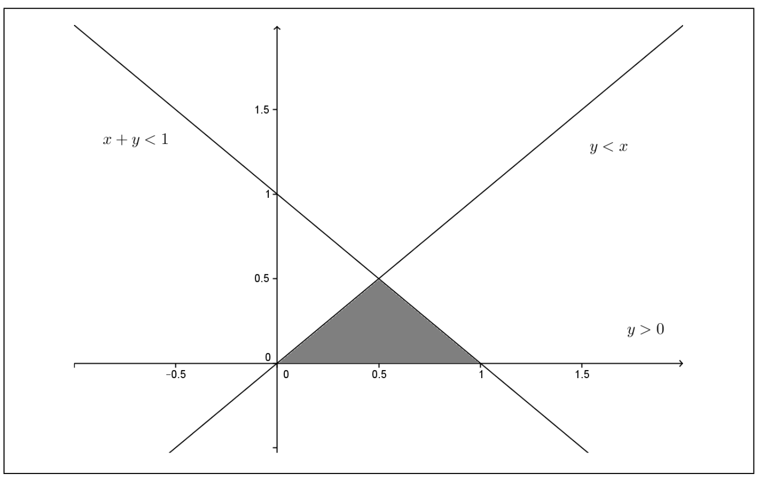

Figura 4.2 – Região de definição da função densidade do Exercício 1

Para achar o ponto de interseção das duas retas, basta explicitar as condições e resolver o sistema:

$$\begin{cases} y = x \\ y = 1 - x \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, obtemos que $y = 1 - y \implies 2y = 1 \implies y = 1/2$. Como neste ponto de interseção $y = x$, concluimos que o ponto de interseção é o ponto $(1/2; 1/2)$, conforme ilustrado na Figura 4.2.

Como a função densidade é constante nessa região, temos que ter

$$\int \int_A k dx dy = 1$$

Na região de definição A, temos que, para cada $y \in [0, 1/2]$, x varia de y a $1-y$. Logo,

$$\int_0^{1/2}\int_y^{1-y} k\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \int_0^{1/2}(1-2y)dy = \frac{1}{k} \Rightarrow \left(y-y^2\right)\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{k} \Rightarrow k = 4$$

Logo,

$$f(x,y) = \begin{cases} 4 & \text{se } 0 < x < y; x+y < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(b)

$$f_Y(y) = \int_y^{1-y} 4dx = 4[(1-y)-y] = 4-8y \qquad 0 < y < \frac{1}{2}$$

A marginal de X fica definida por partes:

- $0 < x < \frac{1}{2}$
$$f_X(x) = \int_0^x 4dy = 4x$$
- $\frac{1}{2} \leq x < 1$
$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 4dy = 4(1-x) = 4-4x$$

Logo,

$$f(x,y) = \begin{cases} 4x & \text{se } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 4-4x & \text{se } \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \text{ou } x \geq 1 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_0^{1/2} x4x\,dx + \int_{1/2}^1 x(4-4x)dx = \frac{4x^3}{3}\Big|_0^{1/2} + \left(2x^2 - \frac{4x^3}{3}\right)\Big|_{1/2}^1 \\
&= \frac{4}{3}\times\frac{1}{8} + 2 - \frac{4}{3} - 2\frac{1}{4} + \frac{4}{3}\times\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \\
\mathrm{E}(X^2) &= \int_0^{1/2} x^2 4x\,dx + \int_{1/2}^1 x^2(4-4x)dx = x^4\Big|_0^{1/2} + \left(\frac{4x^3}{3} - x^4\right)\Big|_{1/2}^1 \\
&= \frac{1}{16} + \frac{4}{3} - 1 - \frac{4}{3}\times\frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{7}{24} \\
\mathrm{Var}(X) &= \frac{7}{24} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{24} \\
\mathrm{E}(Y) &= \int_0^{1/2} y(4-8y)dy = 2y^2 - \frac{8y^3}{3}\Big|_0^{1/2} = 2\times\frac{1}{4} - \frac{8}{3}\times\frac{1}{8} = \frac{1}{6} \\
\mathrm{E}(Y^2) &= \int_0^{1/2} y^2(4-8y)dy = \left(\frac{4y^3}{3} - 2y^4\right)\Big|_0^{1/2} = \frac{4}{3}\times\frac{1}{8} - 2\times\frac{1}{16} = \frac{1}{24} \\
\mathrm{Var}(Y) &= \frac{1}{24} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{72}
\end{aligned}$$

(d) Na Figura 4.3 temos a região de integração (área sombreada de cinza) para o cálculo de $P(X < 0,5; Y > 0,25)$. Logo,

$$\begin{aligned} P(X < 0,5; Y > 0,25) &= \int_{1/4}^{1/2}\int_{y}^{1/2} 4dxdy = \int_{1/4}^{1/2} 4(0,5 - y)dy \\ &= \left(2y - 4\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{1/4}^{1/2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

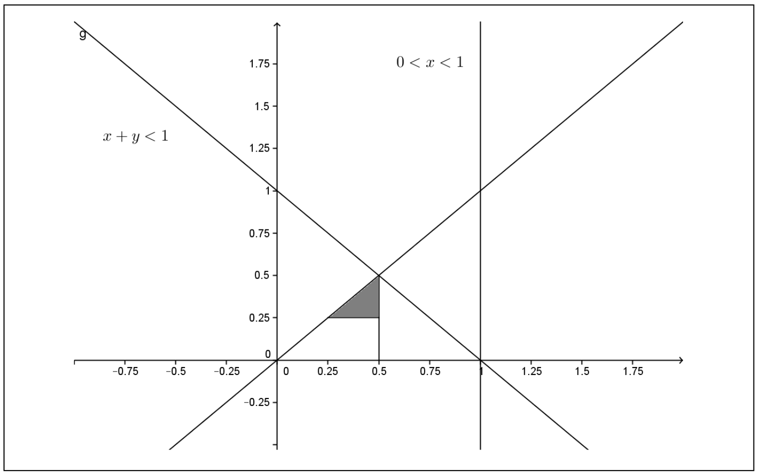

Figura 4.3 – Cálculo de $P(X < 0,5; Y > 0,25)$ – Exercício 1

(e) Na Figura 4.4 temos a região de integração (área sombreada de cinza claro e escuro) para o cálculo de $P(X + Y > 1/2)$. Logo,

$$\begin{aligned} P(X + Y > 1/2) &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{2}-x}^{x} 4dydx + \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{0}^{1-x} 4dydx \\ &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (4y)\Big|_{y=\frac{1}{2}-x}^{x} dx + + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 4(1-x)dx \\ &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (4x - 2 + 4x)dx + \left(4x - 4\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= \left(8\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} + (4-2) - \left(2 - \frac{2}{4}\right) \\ &= \left(4\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2}\right) - \left(4\frac{1}{16} - 2\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

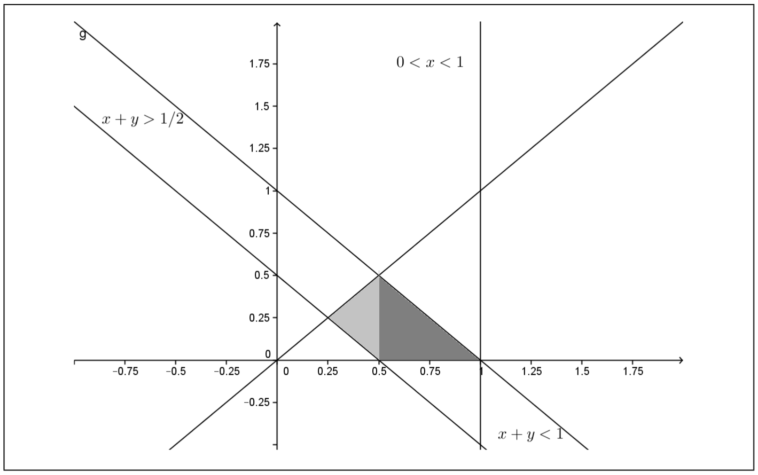

Figura 4.4 – Cálculo de $\mathrm{P}\left(X + Y > \frac{1}{2}\right)$ – Exercício 1

(f)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= \int_0^{1/2}\int_y^{1-y} 4xy\,dx\,dy = \int_0^{1/2} 4y\left(\int_y^{1-y} x\,dx\right) = \int_0^{1/2} 4y\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=y}^{1-y} dy \\
&= \int_0^{1/2} 2y[(1-y)^2 - y^2]dy = \int_0^{1/2}(2y - 4y^2)dy = \left(y^2 - \frac{4y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1/2} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{4}{3}\times\frac{1}{8} = \frac{1}{12} \\
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \frac{1}{12} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{6} = 0
\end{aligned}$$

Temos, então, que $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, mas X e Y não são independentes, pois $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.

2. Seja (X,Y) um vetor aleatório cuja função de densidade é constante na região $A \subset \mathbb{R}^2$ definida por $A = \{(x,y)\,|\,0 < x < 1; x + y < 1\}$. Determine

   (a) a função de densidade conjunta de X e Y.

   (b) as marginais f_X e f_Y

   (c) $E(X), E(Y), Var(X), Var(Y)$

   (d) $P(X < 0,5; Y > 0,5)$

   (e) a covariância e a correlação entre X e Y.

   Solução

   (a) Na Figura 4.5 temos a região de definição A, representada pela parte sombreada em cinza.
   Como a função densidade é constante nessa região, temos que ter

$$\int\int_A k\,dx\,dy = 1$$

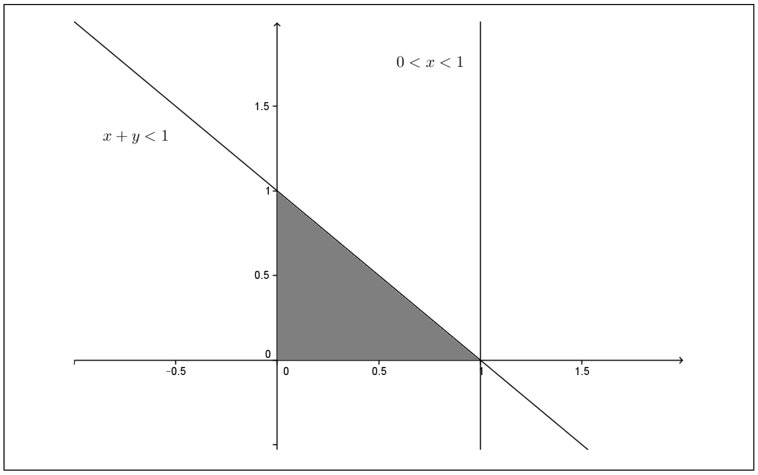

Figura 4.5 – Região de definição da função densidade do Exercício 2

Na região de definição A, temos que, para cada $y \in [0, 1]$, x varia de 0 a $1 - y$. Logo,

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} k dx dy = 1 \Rightarrow \int_0^1 (1-y) dy = \frac{1}{k} \Rightarrow \left(y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{k} \Rightarrow k = 2$$

Logo,

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 < x < 1; x + y < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(b)

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 2 dy = 2(1 - x) \qquad 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_0^{1-y} 2 dx = 2(1 - y) \qquad 0 < y < 1$$

(c) X e Y são identicamente distribuídas. Logo,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \mathrm{E}(Y) = \int_0^1 2x(1-x) dx = \left(x^2 - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \\ \mathrm{E}(X^2) &= \mathrm{E}(Y^2) = \int_0^1 2x^2(1-x) dx = \left(\frac{2x^3}{3} - 2\frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \\ \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

(d) Na Figura 4.6 temos a região de integração (área sombreada de cinza) para o cálculo de $\mathrm{P}(X < 0,5; Y > 0,5)$. Logo,

$$\mathrm{P}(X < 0,5; Y > 0,5) = \int_0^{1/2} \int_{1/2}^{1-x} 2 dy dx = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} - x \right) dx = \left(\frac{x - x^2}{2} \right) \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{8}$$

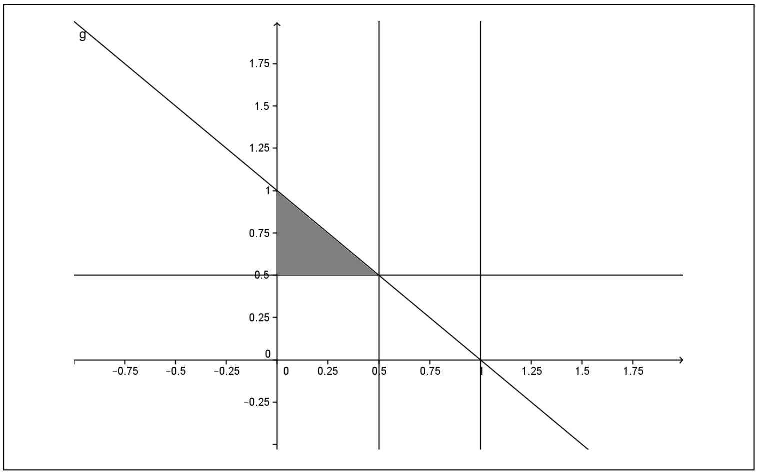

Figura 4.6 – Cálculo de $\text{P}(X < 0,5; Y > 0,5)$ – Exercício 2

(e)

$$\begin{aligned}
\text{E}(XY) &= \int_0^1 \int_0^{1-y} 2xy\,dx\,dy = \int_0^1 y \left(x^2\right)\Big|_0^{1-y} dx = \int_0^1 y(1-y)^2 dy \\
&= \int_0^1 (y - 2y^2 + y^3)dy = \left(\frac{y^2}{2} - 2\frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \\
\text{Cov}(X, Y) &= \frac{1}{12} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{36} \\
\text{Corr}(X, Y) &= \frac{-\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18} \times \frac{1}{18}}} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3. Suponha que os tempos que dois alunos, A e B, levam para resolver um problema sejam independentes e identicamente distribuídos segundo uma distribuição exponencial com média λ. Calcule a probabilidade de que A leve um tempo pelo menos duas vezes maior que o tempo de B na resolução desse problema.

   Solução

   Sejam X e Y os tempos que A e B levam para resolver o problema, respectivamente. Então X e Y são independentes e

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}, \qquad x > 0 \\
f_Y(y) &= \frac{1}{\lambda} e^{-y/\lambda}, \qquad y > 0
\end{aligned}$$

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\lambda^2} e^{-\dfrac{x+y}{\lambda}}, \qquad x > 0, y > 0$$

   O problema pede $\text{P}(X > 2Y)$. Na Figura 4.7 temos a região de integração para o cálculo de tal probabilidade.

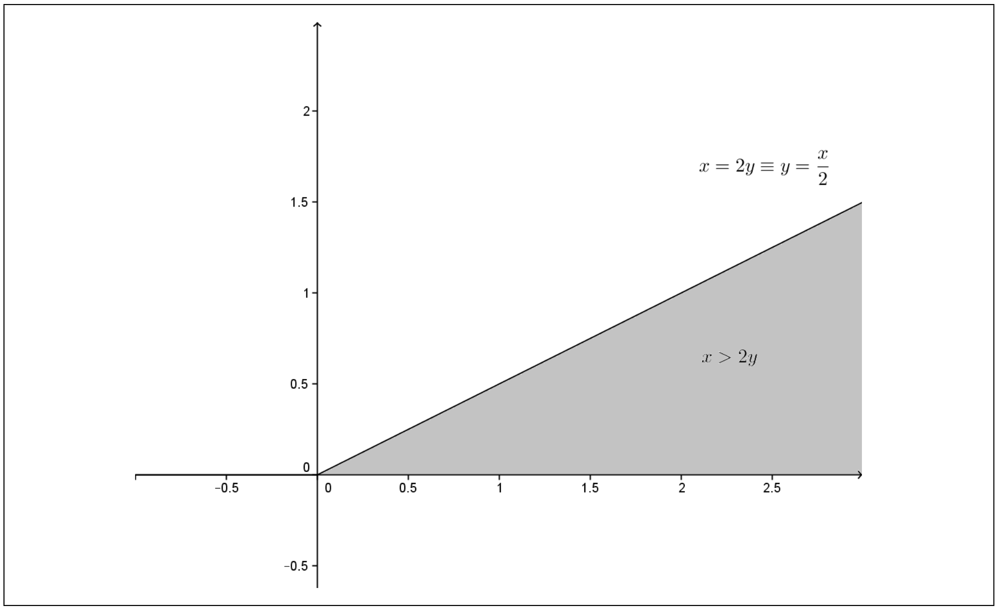

Figura 4.7 – Cálculo de $P(X > 2Y)$ – Exercício 3

$$
\begin{aligned}
P(X > 2Y) &= \int_0^\infty \left[\int_0^{x/2} \left(\frac{1}{\lambda^2} e^{-\dfrac{x+y}{\lambda}}\right) dy\right] dx = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \left(-e^{-y/\lambda}\Big|_{y=0}^{x/2}\right) dx \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \left(-e^{-x/(2\lambda)} + 1\right) dx = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda}\left(e^{-\frac{x}{\lambda}} - e^{-\frac{3x}{2\lambda}}\right) dx \\
&= \left(-e^{-\frac{x}{\lambda}} + \frac{2}{3} e^{-\frac{3x}{2\lambda}}\right)\Bigg|_{x=0}^\infty = 0 - \left(-1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

4. X e Y têm função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$
f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)} & x > 0; y > 0 \\ 0 & c.c. \end{cases}
$$

Determine as densidades marginais de X e Y.

Solução

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^\infty xe^{-x(y+1)} dy = xe^{-x} \int_0^\infty e^{-xy} dy = xe^{-x}\left(-\frac{1}{x} e^{-xy}\right)\Bigg|_{y=0}^\infty = e^{-x} \qquad x > 0 \\
X &\sim exp(1)
\end{aligned}
$$

$$
f_Y(y) = \int_0^\infty xe^{-x(y+1)} dx = \int_0^\infty x\frac{y+1}{y+1} e^{-x(y+1)} dx = \frac{1}{y+1} \int_0^\infty x(y+1) e^{-x(y+1)} dx
$$

Essa ultima integral é a esperança de uma densidade exponencial com parâmetro λ e, portanto, é igual a $\dfrac{1}{y+1}$. Logo,

$$f_Y(y) = \left(\frac{1}{y+1}\right)^2 \qquad y > 0$$

5. X e Y têm função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < y < x; 0 < x < 1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Determine as densidades marginais de X e Y.

Solução

Na Figura 4.8 temos a região de definição da função densidade conjunta.

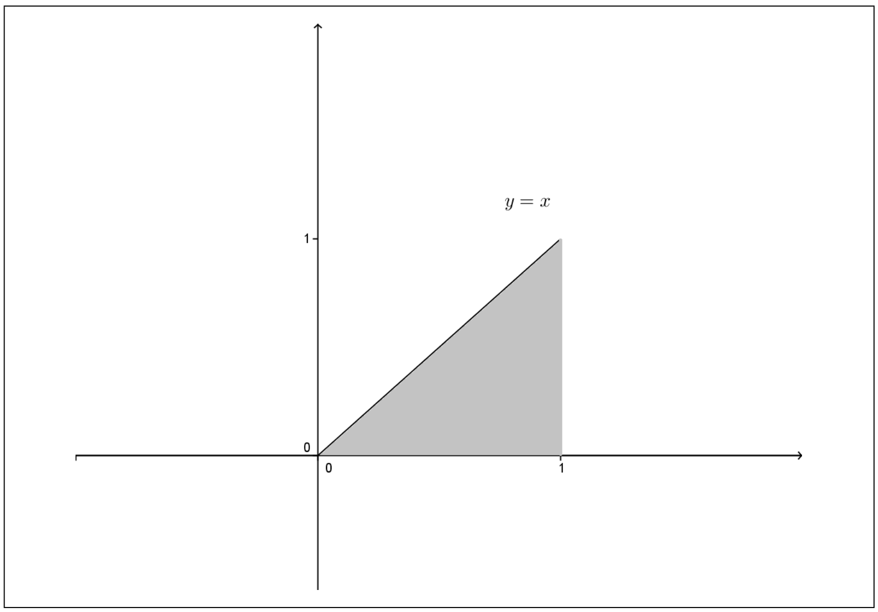

Figura 4.8 – Região de definição de $f(x, y)$ – Exercício 5

$$f_X(x) = \int_0^x \frac{1}{x} dy = 1 \qquad 0 < x < 1 \therefore X \sim Unif(0,1)$$

$$f_Y(y) = \int_y^1 \frac{1}{x} dx = \ln x|_y^1 = -\ln y \qquad 0 < y < 1$$

Note que $\ln y < 0$ para $0 < y < 1$.

6. Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3} & 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Calcule

(a) $P(X > 1/2)$;

(b) $P(Y < X)$;

(c) $P(Y < 1/2|X < 1/2)$.

Solução

(a) Nas Figuras 4.9 e 4.10 temos a região de definição de f e a região de integração para o cálculo de $P(X > 1/2)$ (parte cinza escuro), respectivamente.

$$P(X > 1/2) = \int_{1/2}^{1}\left[\int_{0}^{2}\left(x^2 + \frac{xy}{3}\right)dy\right]dx = \int_{1/2}^{1}\left(x^2y + \frac{x}{3}\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{2} dx$$

$$= \int_{1/2}^{1}\left(2x^2 + \frac{2x}{3}\right)dx = \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{3}\right)\Big|_{1/2}^{1} = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{8} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\right) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

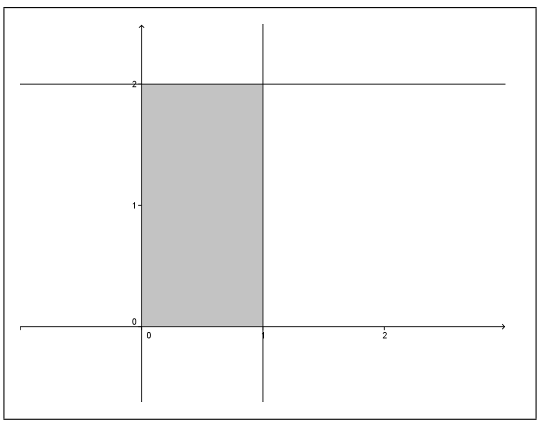

Figura 4.9 – Região de definição de $f_{X,Y}(x,y)$ – Exercício 6

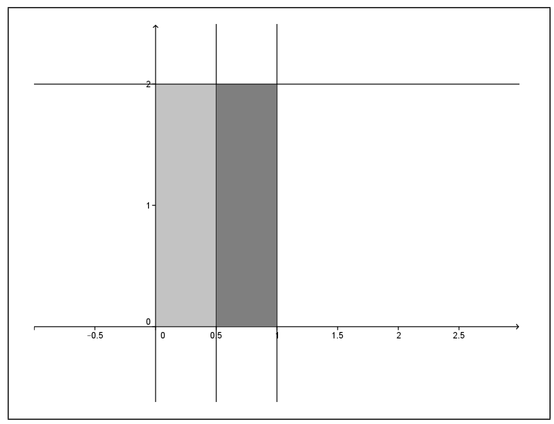

Figura 4.10 – Cálculo de $P(X > 1/2)$ – Exercício 6

(b) Na Figura 4.11 temos a região de integração (em cinza escuro) para o cálculo de $P(Y < X)$.

$$P(Y < X) = \int_{0}^{1}\left[\int_{0}^{x}\left(x^2 + \frac{xy}{3}\right)dy\right]dx = \int_{0}^{1}\left(x^2y + \frac{x}{3}\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{x} dx$$

$$= \int_{0}^{1}\left(x^3 + \frac{x^3}{6}\right)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{24}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = \frac{7}{24}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(Y < 1/2|X < 1/2) &= \frac{P(X < 1/2, Y < 1/2)}{P(X < 1/2)} = \frac{P(X < 1/2, Y < 1/2)}{1 - P(X \geq 1/2)} \\ &= \frac{P(X < 1/2, Y < 1/2)}{1 - P(X > 1/2)} = \frac{P(X < 1/2, Y < 1/2)}{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

Na Figura 4.12 temos a região de integração (em cinza escuro) para o cálculo de $P(X < 1/2, Y < 1/2)$.

$$P(X < 1/2, Y < 1/2) = \int_0^{1/2} \left[\int_0^{1/2} \left(x^2 + \frac{xy}{3} \right) dy \right] dx = \int_0^{1/2} \left(x^2 y + \frac{x}{3} \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=0}^{1/2} dx$$

$$= \int_0^{1/2} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{24} \right) dx = \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{48} \right) \Bigg|_0^{1/2} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{48} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{192}$$

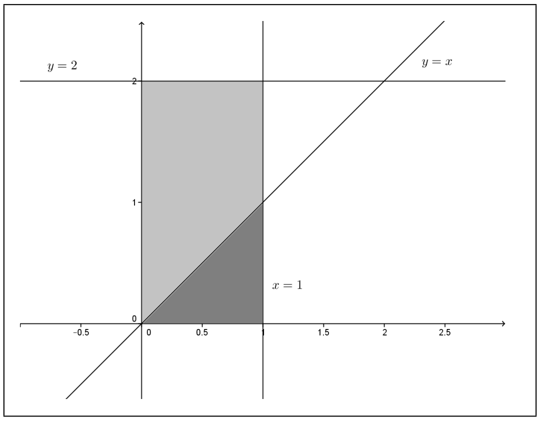

Figura 4.11 – Cálculo de P($Y < X$) – Exercício 6

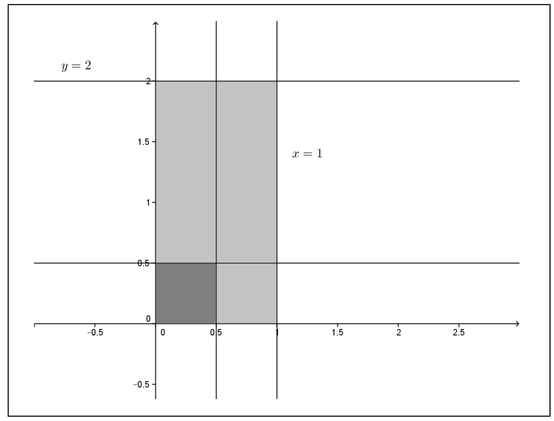

Figura 4.12 – Cálculo de P($X < 1/2, Y < 1/2$) – Exercício 6

Logo,

$$P(Y < 1/2 | X < 1/2) = \frac{\frac{5}{192}}{\frac{1}{6}} = \frac{30}{196} = \frac{15}{98}$$

7. Considere a seguinte função de densidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y :

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{se } 0 < x < y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   (a) Obtenha as densidades marginais de X e Y, identificando as suas respectivas distribuições de probabilidade.

   (b) Verifique se X e Y são independentes, justificando a sua resposta.

   Solução

   (a) Na Figura 4.13 temos a região de definição da densidade conjunta.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_x^\infty e^{-y} dy = \left(-e^{-y} \right) \Big|_x^\infty = e^{-x} \qquad x > 0 \qquad \therefore \qquad X \sim exp(1) \\ f_Y(y) &= \int_0^y e^{-y} dx = y e^{-y} \qquad y > 0 \qquad \therefore \qquad Y \sim gama(2,1) \end{aligned}$$

   (b) X e Y não são independentes, pois $f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$.

8. Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com a seguinte função de densidade conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} cy^2 & \text{se } 0 < x < 2 \text{ e } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

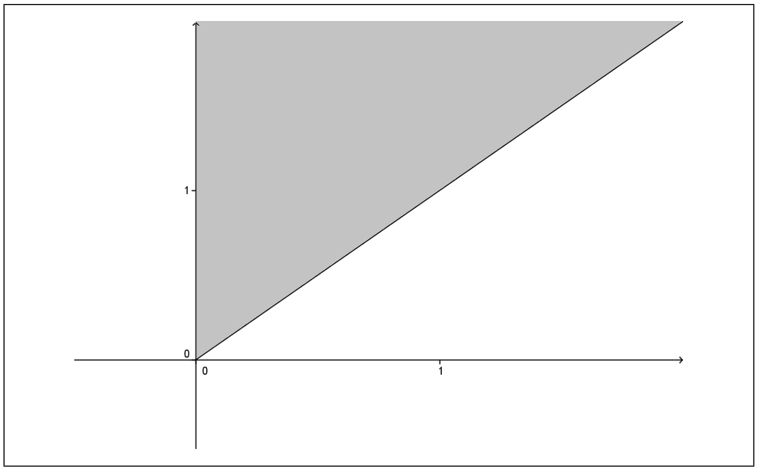

Figura 4.13 – Região de definição da função densidade conjunta – Exercício 7

(a) Faça um gráfico ilustrando o domínio de variação de X e Y.

(b) Calcule o valor da constante c.

(c) Calcule as marginais de X e Y, mostrando que realmente definem uma função de densidade.

(d) Calcule $E(X), E(Y), Var(X), Var(Y)$.

(e) X e Y são independentes? Justifique sua resposta.

(f) Calcule $P(Y > 2 - X)$.

(g) Calcule $P(X \leq 1)$

Solução

(a) Veja a Figura 4.14.

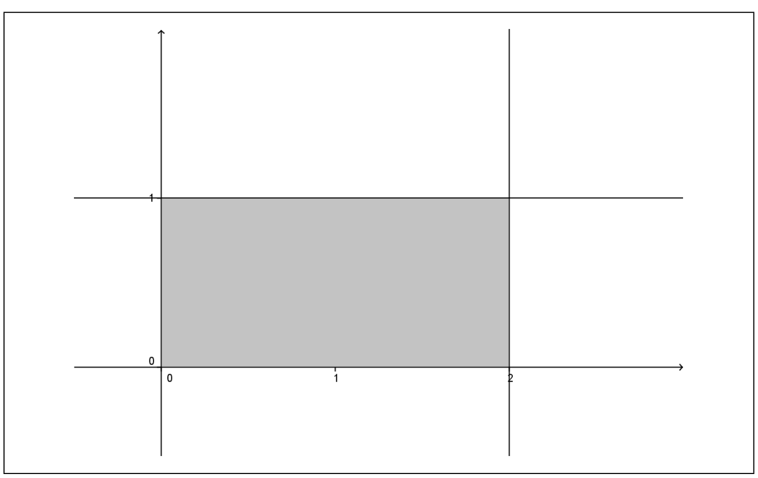

Figura 4.14 – Região de definição da função densidade conjunta – Exercício 8

(b)

$$\int_0^2 \int_0^1 cy^2 dy dx = 1 \Rightarrow \int_0^2 \left(\frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 dx = \frac{1}{c} \Rightarrow \int_0^2 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{c} \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

(c)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^1 \frac{3y^2}{2} dy = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \qquad 0 < x < 2 \qquad \therefore \qquad X \sim Unif(0,2) \\ f_Y(y) &= \int_0^2 \frac{3y^2}{2} dx = \left(\frac{3y^2}{2} x \right) \Big|_{x=0}^2 = 3y^2 \qquad 0 < y < 1 \end{aligned}$$

Verifica-se rapidamente que $\int_0^1 f_Y(y) dy = 1$ e, portanto, f_Y define uma função densidade.

(d)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 1 \\ \mathrm{Var}(X) &= \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3} \\ \mathrm{E}(Y) &= \int_0^1 y 3y^2 dy = \int_0^1 3y^3 dy = \frac{3}{4} \\ \mathrm{E}(Y^2) &= \int_0^1 y^2 3y^2 dy = \int_0^1 3y^4 dy = \frac{3}{5} \\ \mathrm{Var}(Y) &= \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{3}{30} \end{aligned}$$

(e) Temos que $f(x,y) = \frac{3}{2} y^2 = \frac{1}{2} \times 3y^2 = f_X(x) f_Y(y)$. Logo, X e Y são independentes.

(f) Na Figura 4.15 temos a região de integração para o cálculo de $\mathrm{P}(Y > 2 - X)$.

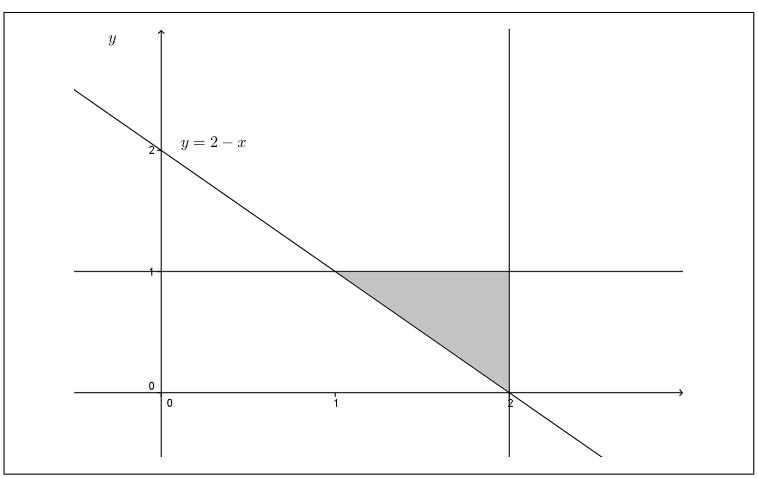

Figura 4.15 – Cálculo de $\mathrm{P}(Y > 2 - X)$ – Exercício 8

Logo,

$$\begin{aligned}
P(Y > 2 - X) &= \int_1^2 \int_{2-x}^1 \frac{3}{2} y^2 dy dx = \int_1^2 \left(\frac{y^3}{2} \right) \Big|_{y=2-x}^1 dx = \int_1^2 \frac{1 - 8 + 12x - 6x^2 + x^3}{2} dx \\
&= \left(-\frac{7x}{2} + 3x^2 - x^3 + \frac{x^4}{8} \right) \Big|_{x=1}^2 \\
&= (-7 + 12 - 8 + 2) - \left(-\frac{7}{2} + 3 - 1 + \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

(g) $X \sim Unif(0, 2) \therefore P(X \leq 1) = \dfrac{1}{2}$.

9. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas segundo uma Normal padrão. Mostre que as variáveis $U = \dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}$ e $V = \dfrac{X-Y}{\sqrt{2}}$ também são independentes e identicamente distribuídas segundo uma Normal padrão.

Solução

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}, \qquad y \in \mathbb{R}$$

$$X, Y \text{ independentes } \Rightarrow f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
U &= \frac{X+Y}{\sqrt{2}} \quad \therefore \quad U + V = \sqrt{2}X \quad \therefore \quad X = \frac{U+V}{\sqrt{2}} \\
V &= \frac{X-Y}{\sqrt{2}} \quad \therefore \quad U - V = \sqrt{2}Y \quad \therefore \quad Y = \frac{U-V}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial U} & \dfrac{\partial X}{\partial V} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial U} & \dfrac{\partial Y}{\partial V} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -1 \qquad \therefore \qquad |J| = 1$$

$$\begin{aligned}
f_{U,V}(u, v) &= |J| \, f_{X,Y}\left(u(x, y), v(x, y)\right) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(u+v)^2}{4}} e^{-\frac{(u-v)^2}{4}} \\
&= \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{u^2 + 2uv + v^2 + u^2 - 2uv + v^2}{4} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{u^2 + v^2}{2} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} \qquad u, v \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Logo, a densidade conjunta de U, V se fatora no produto de duas densidades normais padronizadas, o que prova que U, V são independentes e identicamente distribuídas como uma $N(0, 1)$.

10. Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 2(x+y) & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Encontre a densidade de $Z = X + Y$.

Solução

Vamos definir

$$\begin{cases} Z = X + Y \\ W = X \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Y = Z - W \\ X = W \end{cases}$$

Como $0 < x < y < 1$, resulta que

$$\begin{cases} 0 < w < z - w < 1 \\ 0 < w < 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2w < z < 1 + w \\ 0 < w < 1 \end{cases}$$

Nas Figuras 4.16 e 4.17 ilustra-se a transformação do espaço (X, Y) no espaço (Z, W).

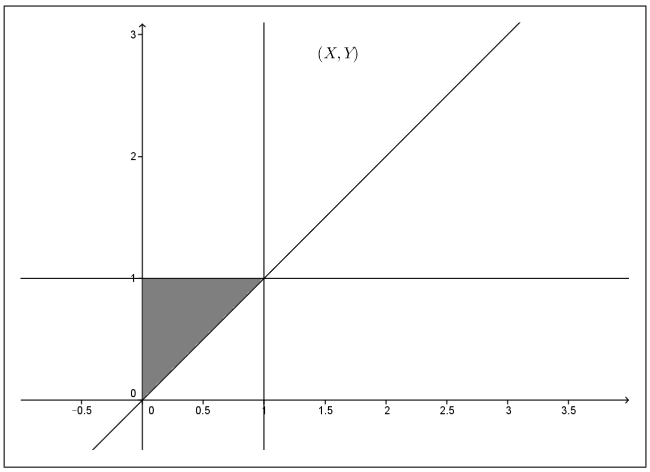

Figura 4.16 – Região de definição de $f_{X,Y}(x,y)$

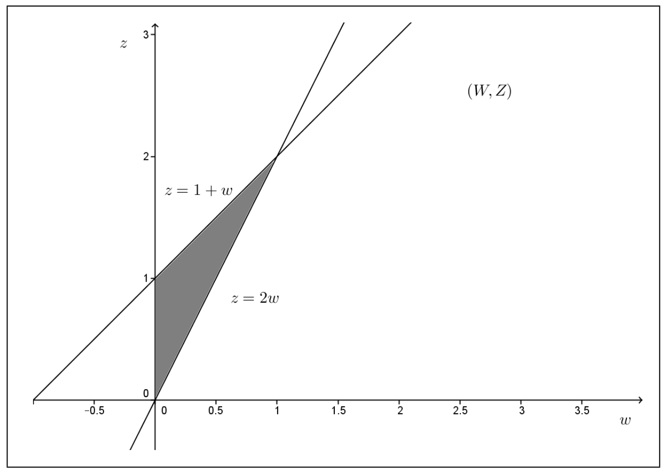

Figura 4.17 – Região de definição de $f_{Z,W}(z,w)$

O módulo do jacobiano da transformação inversa é 1 e, portanto, pelo teorema dado,

$$f_{Z,W}(z,w) = 2z \qquad 0 < w < 1; \quad 2w < z < 1 + w$$

O problema pede a densidade marginal de Z que, por definição, é $f_Z(z) = \int 2zdw$.

Para $1 \leq z < 2$, temos

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^{z/2} 2zdw = 2z\left(\frac{z}{2} - z + 1\right) = 2z - z^2$$

e para $0 \leq z < 1$,

$$f_Z(z) = \int_0^{z/2} 2zdw = 2z\frac{z}{2} = z^2$$

Na Figura 4.18 temos o gráfico de $f_Z(z)$. Note que

$$\int_0^2 f_Z(z)dz = \int_0^1 z^2 dz + \int_1^2 (2z - z^2)dz = \frac{1}{3} + \left(4 - \frac{8}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 1$$

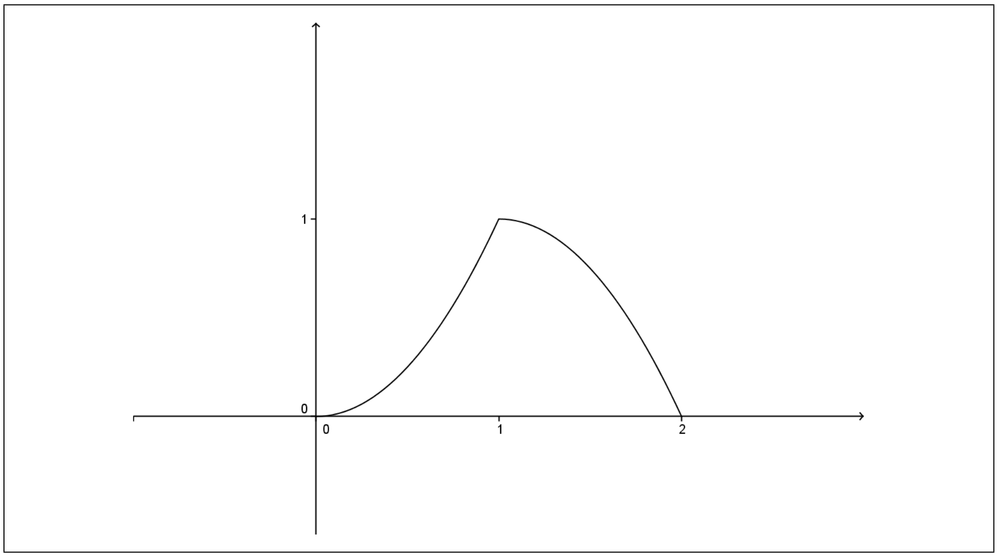

Figura 4.18 – Função densidade de $Z = X + Y$ para o Exercício 10

11. Se X, Y e Z são variáveis aleatórias duas a duas não correlacionadas e $\text{Var}(X) = 1$, $\text{Var}(Y) = 4$ e $\text{Var}(Z) = 9$, calcule

(a) $\text{Cov}(X + Y, X + Z)$

(b) $\text{Corr}(U, V)$ em que $U = 5X + 2Y$ e $V = Y + Z$.

Solução

(a) $\text{Cov}(X+Y, X+Z) = \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, X) + \text{Cov}(Y, Z) = \text{Var}(X) + 0 + 0 + 0 = 1$

(b)

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(U, V) &= \text{Cov}(5X + 2Y, Y + Z) \\
&= 5\,\text{Cov}(X, Y) + 5\,\text{Cov}(X, Z) + 2\,\text{Cov}(Y, Y) + 2\,\text{Cov}(Y, Z) = 0 + 0 + 2\,\text{Var}(Y) + 0 = 8 \\
\text{Var}(U) &= \text{Var}(5X + 2Y) = 25\,\text{Var}(X) + 4\,\text{Var}(Y) + 20\,\text{Cov}(X, Y) = 25 + 16 + 0 = 41 \\
\text{Var}(V) &= \text{Var}(Y + Z) = \text{Var}(Y) + \text{Var}(Z) + 2\,\text{Cov}(Y, Z) = 4 + 9 + 0 = 13 \\
\text{Corr}(U, V) &= \frac{8}{\sqrt{41 \times 13}}
\end{aligned}$$

12. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com $\text{E}(X) = 5$, $\text{Var}(X) = 100$, $\text{E}(Y) = 2$ e $\text{Var}(Y) = 16$. Calcule a média e o desvio-padrão das seguintes variáveis aleatórias:

(a) $U_1 = X + Y$

(b) $U_2 = X - Y$

(c) $U_3 = X + 4Y$

(d) $U_4 = 2X - 5Y$

Solução

(a) $\mathrm{E}(U_1) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) = 7$
$\mathrm{Var}(U_1) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 116 \Rightarrow \mathrm{DP}(U_1) = \sqrt{116}$

(b) $\mathrm{E}(U_2) = \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y) = 3$
$\mathrm{Var}(U_2) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 116 \Rightarrow \mathrm{DP}(U_2) = \sqrt{116}$

(c) $\mathrm{E}(U_3) = \mathrm{E}(X) + 4\,\mathrm{E}(Y) = 13$
$\mathrm{Var}(U_3) = \mathrm{Var}(X) + 16\,\mathrm{Var}(Y) = 356 \Rightarrow \mathrm{DP}(U_3) = \sqrt{356}$

(d) $\mathrm{E}(U_4) = 2\,\mathrm{E}(X) - 5\,\mathrm{E}(Y) = 0$
$\mathrm{Var}(U_3) = 4\,\mathrm{Var}(X) + 25\,\mathrm{Var}(Y) = 400 + 400 = 800 \Rightarrow \mathrm{DP}(U_2) = \sqrt{800}$

13. Sejam X, Y e Z três variáveis aleatórias tais que $\mathrm{Var}(X) = 1$, $\mathrm{Var}(Y) = 4$, $\mathrm{Var}(Z) = 8$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = 1$, $\mathrm{Cov}(X,Z) = -1$ e $\mathrm{Cov}(Y,Z) = 2$. Determine

(a) $\mathrm{Var}(X + Y + Z)$

(b) $\mathrm{Var}(3X - Y - 2Z + 1)$

Solução

(a)

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X+Y+Z) &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(Z) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Z) + 2\,\mathrm{Cov}(Y,Z)\\ &= 1 + 4 + 8 + 2(1 - 1 + 2) = 17\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(3X - Y - 2Z + 1) &= \mathrm{Var}(3X - Y - 2Z) = 9\,\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 4\,\mathrm{Var}(Z)\\ &- 3\,\mathrm{Cov}(X,Y) - 6\,\mathrm{Cov}(X,Z) + 2\,\mathrm{Cov}(Y,Z)\\ &= 9 + 4 + 32 - 3 + 6 + 4 = 52\end{aligned}$$

14. Em declarações do imposto de renda de pessoa física com informação sobre pagamento de despesas médicas, seja X a renda bruta total declarada e seja Y o valor total das despesas médicas declaradas. Suponha que (X,Y) tenha distribuição normal bivariada com os seguintes parâmetros (em unidades monetárias, quando for o caso): $\mu_X = 15$, $\mu_Y = 1$, $\sigma_X = 0,8$, $\sigma_Y = 0,1$ e $\rho = 0,6$.

(a) Para uma declaração com despesas médicas sorteada aleatoriamente, qual é a probabilidade de que a renda bruta total seja maior que 16 u.m.? E qual é a probabilidade de que o valor declarado das despesas médicas seja menor que 0,9?

(b) Encontre o valor da constante k tal que $\Pr(Y \leq k | X = 16) = 0,95$.

Solução

(a) Sabemos que $X \sim N(\mu_X; \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\mu_Y; \sigma_Y^2)$. Logo, $X \sim N(15; 0,8^2)$ e $Y \sim N(1; 0,1^2)$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X > 16) &= \mathrm{P}\left(Z > \frac{16-15}{0,8}\right) = \mathrm{P}(Z > 1,25) = 1 - \mathrm{P}(Z \leq 1,25) = 1 - \Phi(1,25) \\ &= 1 - 0,89435 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y < 0,9) &= \mathrm{P}\left(Z < \frac{0,9-1}{0,1}\right) = \mathrm{P}(Z < -1) = \mathrm{P}(Z > 1) \\ &= 1 - \mathrm{P}(Z \leq 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0,84134 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} Y|X = 16 &\sim N\left(1 + 0,6 \times \frac{0,1}{0,8}(16-15); (1 - 0,6^2) \times 0,1^2\right) \therefore \\ Y|X = 16 &\sim N(1,075; 0,0064) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y \leq k|X = 16) &= 0,95 \Leftrightarrow \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{k-1,075}{0,08}\right) = 0,95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{k-1,075}{0,08}\right) = 0,95 \Leftrightarrow \\ \frac{k-1,075}{0,08} &= 1,64 \Leftrightarrow k = 1,2062 \end{aligned}$$

15. Caixas rotuladas como "Conteúdo: 100 parafusos" são, na verdade, enchidas por peso. Suponha que os pesos de parafusos individuais sejam independentes e normalmente distribuídos com média $\mu = 5$ gramas e desvio-padrão $\sigma = 0{,}5$ grama.

    (a) Qual é a probabilidade de uma caixa com $n = 100$ parafusos pesar pelo menos 495 gramas?

    (b) Qual é a probabilidade de uma caixa com $n = 99$ parafusos pesar pelo menos 495 gramas?

Solução

X_i = peso de um parafuso individual. Temos que $X_i's$ são independentes e identicamente distribuídos com $X_i \sim N(5; 0,5^2)$

(a)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{100} X_i &\sim N(100 \times 5; 100 \times 0,5^2) \therefore \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 495\right) = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{495-500}{10 \times 0,5}\right) \\ &= \mathrm{P}(Z \geq -1) = \mathrm{P}(Z \leq 1) = \Phi(1) = 0,84134 \end{aligned}$$

(b)

$$\sum_{i=1}^{99} X_i \sim N(99 \times 5; 99 \times 0,5^2) \therefore \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{99} X_i \geq 495\right) = \mathrm{P}(Z \geq 0) = 0,5$$

16. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas segundo uma distribuição exponencial com média 1. Determine a densidade conjunta de U, V em que $U = X + Y$ e $V = X - Y$. Calcule as marginais de U, V.

Solução

$$\begin{cases} f_X(x) = e^{-x} & x > 0 \\ f_Y(y) = e^{-y} & y > 0 \end{cases}$$

Como X, Y são independentes, resulta que $f_{X,Y}(x, y) = e^{-x-y} \qquad x > 0, y > 0.$

$$\begin{cases} U = X + Y \\ V = X - Y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X = \dfrac{U+V}{2} \\ \\ Y = \dfrac{U-V}{2} \end{cases}$$

O módulo do jacobiano de transformação inversa é $J = \frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u + v > 0 \\ u - v > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u > 0 \\ u > -v \\ u > v \end{cases}$$

Nas Figuras 4.19 e 4.20 ilustra-se a transformação do espaço (X, Y) no espaço (U, V).

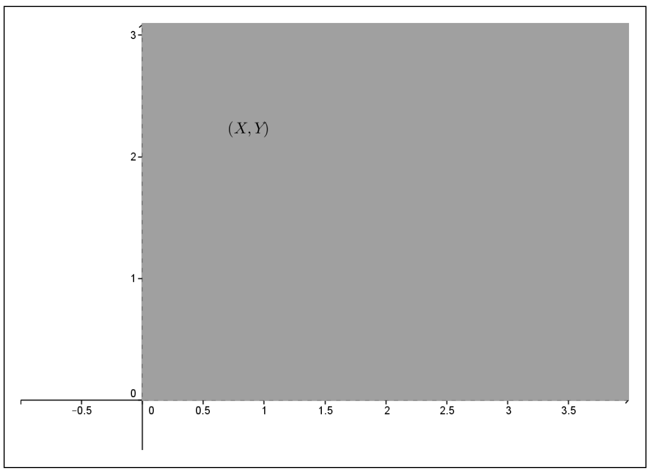

Figura 4.19 – Região de definição de $f_{X,Y}(x, y)$

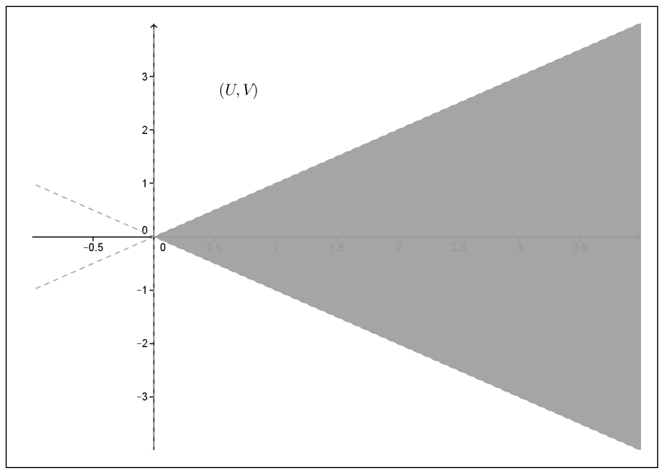

Figura 4.20 – Região de definição de $f_{Z,W}(z, w)$

Pelo teorema da transformação, resulta que

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{1}{2} e^{-\frac{u+v}{2}} e^{-\frac{u-v}{2}} = \frac{1}{2} e^{-u} \qquad u > 0, -u < v < u$$

A marginal de U é

$$f_U(u) = \int_{-u}^{u} \frac{1}{2} e^{-u} dv = \frac{1}{2} e^{-u} v \Big|_{-u}^{u} = u e^{-u} \qquad u > 0$$

Para calcular a marginal de V, temos que considerar os casos em que $v \geq 0$ e $v < 0$.

- $v \geq 0$

$$f_V(v) = \int_v^{\infty} \frac{1}{2} e^{-u} du = -\frac{1}{2} e^{-u} \Big|_v^{\infty} = \frac{1}{2} e^{-v} \qquad v > 0$$

- $v < 0$

$$f_V(v) = \int_{-v}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-u} du = -\frac{1}{2} e^{-u} \Big|_{-v}^{\infty} = \frac{1}{2} e^{v} \qquad v < 0$$

Na Figura 4.21 temos o gráfico de $f_V(v)$.

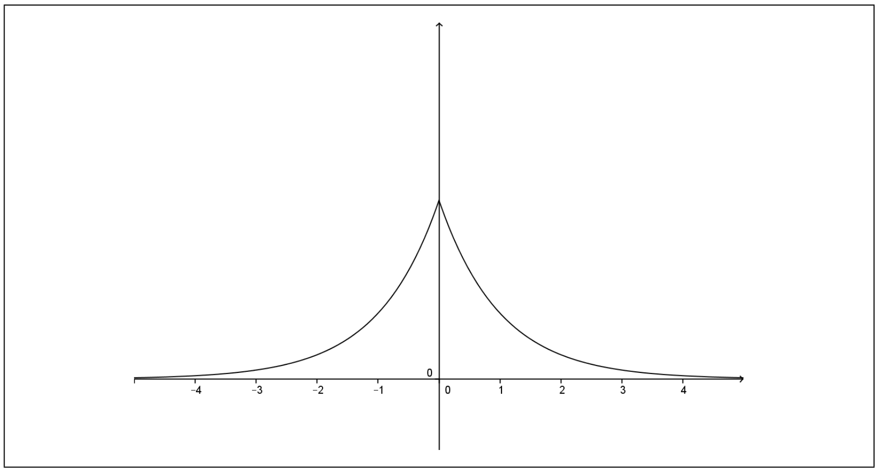

Figura 4.21 – Função densidade de $Z = X - Y$ para o Exercício 16

4.3 Variável Normal Bidimensional

1. Em declarações do imposto de renda de pessoa física com informação sobre pagamento de despesas médicas, seja X a renda bruta total declarada e seja Y o valor total das despesas médicas declaradas. Suponha que (X, Y) tenha distribuição normal bivariada com os seguintes parâmetros (em unidades monetárias, quando for o caso): $\mu_X = 15$, $\mu_Y = 1$, $\sigma_X = 0,8$, $\sigma_Y = 0,1$ e $\rho = 0,6$.

   (a) Para uma declaração com despesas médicas sorteada aleatoriamente, qual é a probabilidade de que a renda bruta total seja maior que 16 u.m.? E qual é a probabilidade de que o valor declarado das despesas médicas seja menor que $0,9$?

   (b) Encontre o valor da constante k tal que $\Pr(Y \leq k | X = 16) = 0,95$.

   Solução

   (a) Sabemos que $X \sim N(\mu_X; \sigma_X^2)$ e $Y \sim N(\mu_Y; \sigma_Y^2)$. Logo, $X \sim N(15; 0,8^2)$ e $Y \sim N(1; 0,1^2)$

$$\begin{aligned} P(X > 16) &= P\left(Z > \frac{16-15}{0,8}\right) = P(Z > 1,25) = 1 - P(Z \leq 1,25) = 1 - \Phi(1,25) \\ &= 1 - 0,89435 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y<0,9) &= \mathrm{P}\left(Z<\frac{0,9-1}{0,1}\right)=\mathrm{P}(Z<-1)=\mathrm{P}(Z>1)\\
&= 1-\mathrm{P}(Z\le 1)=1-\Phi(1)=1-0,84134
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
Y|X=16 &\sim N\left(1+0,6\times\frac{0,1}{0,8}(16-15);(1-0,6^2)\times 0,1^2\right)\therefore\\
Y|X=16 &\sim N(1,075;0,0064)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y\le k|X=16) &= 0,95\Leftrightarrow \mathrm{P}\left(Z\le\frac{k-1,075}{0,08}\right)=0,95\Leftrightarrow\Phi\left(\frac{k-1,075}{0,08}\right)=0,95\Leftrightarrow\\
\frac{k-1,075}{0,08} &= 1,64\Leftrightarrow k=1,2062
\end{aligned}
$$

2. Seja X o tempo (em segundos) necessário para um corredor completar os primeiros 500 metros de uma corrida e seja Y o tempo (em segundos) necessário para ele completar os próximos 500 metros na mesma corrida. Suponha que (X,Y) tenha distribuição normal bivariada com os seguintes parâmetros:

$$
\begin{aligned}
\mu_X &= 59\\
\mu_Y &= 60\\
\sigma_X &= \sigma_Y=1\\
\rho &= 0,5.
\end{aligned}
$$

(a) Calcule $\mathrm{P}(X\le 60)$ e $\mathrm{P}(Y\le 59)$.

(b) Se ele correu os primeiros 500 metros em 60 segundos, qual é a probabilidade de que ele leve menos de 59 segundos para completar os 500 metros seguintes?

Solução

(a)

$$
X\sim N(59;1)\qquad\therefore\qquad
\begin{aligned}
\mathrm{P}(X\le 60) &= \mathrm{P}\left(Z\le\frac{60-59}{1}\right)=\Phi(1,0)=0,84134\\
&= 0,5+tab(1,0)
\end{aligned}
$$

$$
Y\sim N(60;1)\qquad\therefore\qquad
\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y\le 59) &= \mathrm{P}\left(Z\le\frac{59-60}{1}\right)=\Phi(-1,0)=1-\Phi(1)=0,15866\\
&= 0,5-tab(1,0)
\end{aligned}
$$

(b) O problema pede $\mathrm{P}(Y<59|X=60)$. Sabemos que $Y|X=60\sim N(60+0,5\times\frac{1}{1}(60-59);(1-0,5^2)\times 1)$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y<59|X=60) &= \mathrm{P}\left(Z<\frac{59-60,5}{\sqrt{0,75}}\right)=\mathrm{P}(Z<-1,73)=\mathrm{P}(Z>1,73)\\
&= 1-\Phi(1,73)=0,5-tab(1,73)=0,04182
\end{aligned}
$$

3. Caixas rotuladas como "Conteúdo: 100 parafusos" são, na verdade, enchidas por peso. Suponha que os pesos de parafusos individuais sejam independentes e normalmente distribuídos com média $\mu = 5$ gramas e desvio-padrão $\sigma = 0{,}5$ grama.

   (a) Qual é a probabilidade de uma caixa com $n = 100$ parafusos pesar pelo menos 495 gramas?

   (b) Qual é a probabilidade de uma caixa com $n = 99$ parafusos pesar pelo menos 495 gramas?

Solução

X_i = peso de um parafuso individual. Temos que $X_i's$ são independentes e identicamente distribuídos com $X_i \sim N(5; 0,5^2)$

(a)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{100} X_i &\sim N(100 \times 5; 100 \times 0,5^2) \therefore \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 495\right) = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{495 - 500}{10 \times 0,5}\right) \\ &= \mathrm{P}(Z \geq -1) = \mathrm{P}(Z \leq 1) = \Phi(1) = 0,84134\end{aligned}$$

(b)

$$\sum_{i=1}^{99} X_i \sim N(99 \times 5; 99 \times 0,5^2) \therefore \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{99} X_i \geq 495\right) = \mathrm{P}(Z \geq 0) = 0,5$$

Apêndice A

A distribuição normal bidimensional

A.1 Função densidade

A função densidade normal bidimensional é dada pela função

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}A\right) \tag{A.1}$$

onde

$$A = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right] \tag{A.2}$$

Os parâmetros dessa distribuição são $\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho$.

Para facilitar os cálculos subsequentes, vamos reescrever A da seguinte forma:

$$A = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - \rho^2\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]$$

Note que somamos e subtraímos o mesmo termo. Reorganizando os termos:

$$A = \frac{1}{1-\rho^2}\left\{\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \rho^2\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right] + \left[\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - \rho^2\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\}$$

O termo entre o primeiro par de colchetes é da forma $a^2 - 2ab + b^2$; logo, podemos escrever

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{1-\rho^2}\left\{\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right) - \rho\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)\right]^2 + \left[\left(1-\rho^2\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\} = \\
&= \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right) - \rho\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)\right]^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 = \\
&= \frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x-\mu_x)\sigma_y - \rho\sigma_x(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 = \\
&= \frac{1}{(1-\rho^2)\,\sigma_x^2}\left[x-\mu_x-\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\mu_y)\right]^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2
\end{aligned}$$

Então, podemos escrever a densidade conjunta como

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\rho^2\right)\sigma_x^2}\left[x-\mu_x-\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-\mu_y\right)\right]^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}\sqrt{2\pi\sigma_x^2(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\rho^2\right)\sigma_x^2}\left[x-\mu_x-\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-\mu_y\right)\right]^2\right\} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]$$

[lembre-se que $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$].

Se definimos

$$\begin{aligned} \eta(y) &= \mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-\mu_y\right) \qquad \text{(A.3)} \\ \xi^2 &= \left(1-\rho^2\right)\sigma_x^2 \end{aligned}$$

então podemos escrever:

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\xi^2}\left(x-\eta(y)\right)^2\right] \qquad \text{(A.4)}$$

é interessante notar que η_y depende apenas de y e ξ é uma constante.

Se somarmos e subtrairmos $\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2$ em (A.2), obteremos de forma análoga a seguinte expressão para $f(x,y)$:

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\zeta^2}\left(x-\eta(x)\right)^2\right] \qquad \text{(A.5)}$$

onde

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_y}\left(x-\mu_x\right) \qquad \text{(A.6)} \\ \zeta^2 &= \left(1-\rho^2\right)\sigma_y^2 \end{aligned}$$

A.2 Densidades Marginais

As densidades marginais são calculadas como

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int f(x,y)dy \\ f_Y(y) &= \int f(x,y)dx \end{aligned}$$

Vamos calcular $f_Y(y)$ usando a expressão (A.4):

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int f(x,y)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\xi^2}(x-\eta(y))^2\right] \right\} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\xi^2}(x-\eta(y))^2\right] dx
\end{aligned}
$$

Mas o integrando é a função densidade de uma variável aleatória normal com média $\eta(y)$ (que não depende de x) e variância ξ^2 (uma constante): compare o integrando com a função densidade $N(\mu;\sigma^2)$ dada em (3.1). Logo, essa integral é igual a 1, pelas propriedades da função densidade e isso nos dá

$$
f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]
$$

que é a expressão da densidade normal com média μ_y e variância σ_y^2.

Por simetria (note a simetria de x e y na função densidade conjunta), ou usando a expressão (A.5), concluímos que $f_X(x)$ é normal com média μ_x e variância σ_x^2.

A.3 Covariância e Correlação

Seja (X,Y) um vetor normal bidimensional. Vamos calcular a covariância entre X e Y. Por definição, temos que $\text{Cov}(X,Y) = \text{E}(XY) - \text{E}(X)\,\text{E}(Y)$; no caso da normal bidimensional, isso significa que $\text{Cov}(X,Y) = \text{E}(XY) - \mu_x\mu_y$. Precisamos, então, calcular $\text{E}(XY)$. Por definição,

$$
\begin{aligned}
\text{E}(XY) &= \int\int xyf(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\xi^2}(x-\eta(y))^2\right] dxdy
\end{aligned}
$$

Analisando a expressão que define $\eta(y)$ e ξ, podemos ver que ξ é constante e $\eta(y)$ depende apenas de y. Assim,

$$
E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ y \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right] \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\xi^2}(x-\eta(y))^2\right] dx \right\} dy
$$

Note a integral com relação a x : por definição, ela é a esperança de uma densidade normal com média $\eta(y)$ e variância ξ^2 ou seja, a integral com relação a x é $\eta(y) = \mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-\mu_y\right)$.

Logo,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ y \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right] \left[\mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \left(y - \mu_y \right) \right] \right\} dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} y \left[\mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \left(y - \mu_y \right) \right] f_Y(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_x y f_Y(y) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} y \left(y - \mu_y \right) f_Y(y) dy \\
&= \mu_x \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(y^2 - y\mu_y \right) f_Y(y) dy
\end{aligned}
$$

A primeira integral é a média de $f_Y(y)$, ou seja, é μ_y. Já a segunda integral é

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \left(y^2 - y\mu_y \right) f_Y(y) dy = E(Y^2 - \mu_y Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \mu_y \, \mathrm{E}(Y)
$$

Como $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$, resulta que

$$
\sigma_y^2 = \mathrm{E}(Y^2) - [\mathrm{E}(Y)]^2 = \mathrm{E}(Y^2) - \mu_y^2 \Longrightarrow \mathrm{E}(Y^2) = \sigma_y^2 + \mu_y^2
$$

Substituindo, resulta que a segunda integral é

$$
\mathrm{E}(Y^2) - \mu_y \, \mathrm{E}(Y) = \sigma_y^2 + \mu_y^2 - \mu_y^2 = \sigma_y^2
$$

Substituindo obtemos que

$$
\mathrm{E}(XY) = \mu_x \mu_y + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \sigma_y^2 = \mu_x \mu_y + \rho \sigma_x \sigma_y
$$

e, portanto,

$$
\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X) \, \mathrm{E}(Y) = \mu_x \mu_y + \rho \sigma_x \sigma_y - \mu_x \mu_y = \rho \sigma_x \sigma_y
$$

Finalmente, como a correlação é igual a $\dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$, resulta que, se (X, Y) tem distribuição normal bidimensional, então

$$
\rho = \mathrm{Corr}(X, Y)
$$

Dessa forma, os parâmetros da distribuição normal bidimensional são μ_x, μ_y (médias das marginais), σ_x^2, σ_y^2 (variâncias das marginais) e ρ (correlação entre X e Y).

A.4 Distribuições Condicionais

Por definição, temos que

$$\begin{aligned}
f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \\
&= \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}A\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_x^2}(x-\mu_x)^2\right]} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2\sigma_x^2}(x-\mu_x)^2\right] \\
&= \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(A-\frac{1}{\sigma_x^2}(x-\mu_x)^2\right)\right]
\end{aligned}$$

Vamos trabalhar o termo que aparece entre parênteses na exponencial, somando e subtraindo um termo apropriado para completar o quadrado:

$$A-\frac{1}{\sigma_x^2}(x-\mu_x)^2 = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)+\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]-\frac{1}{\sigma_x^2}(x-\mu_x)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-\rho^2}\left[-2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)+\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]+\left[\frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2-\frac{1}{\sigma_x^2}(x-\mu_x)^2\right] \\
&= \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)+\rho^2\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2-\rho^2\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right] \\
&\quad+\left[\frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2-\frac{1}{\sigma_x^2}(x-\mu_x)^2\right] \\
&= \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)+\rho^2\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right]-\frac{\rho^2}{1-\rho^2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 \\
&\quad+\left[\frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2-\frac{1}{\sigma_x^2}(x-\mu_x)^2\right] \\
&= \frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}-\rho\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right]^2+\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\left[-\frac{\rho^2}{1-\rho^2}+\frac{1}{1-\rho^2}-1\right] \\
&= \frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}-\rho\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right]^2+\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\left(\frac{-\rho^2+1-1+\rho^2}{1-\rho^2}\right) \\
&= \frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}-\rho\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right]^2 \\
&= \frac{1}{\sigma_y^2(1-\rho^2)}\left[y-\mu_y-\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)\right]^2
\end{aligned}$$

Logo,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma_y^2(1-\rho^2)}\left[y - \mu_y - \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)\right]^2\right\}$$

Usando (A.6), conclui-se que

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\zeta^2}(y-\eta(x))^2\right]$$

Assim, a distribuição condicional de $Y|X = x$ é uma normal com média

$$\eta(x) = \mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)$$

e variância

$$\zeta^2 = \left(1-\rho^2\right)\sigma_y^2$$

Por simetria, a distribuição condicional de $X|Y = y$ é uma normal com média

$$\eta(y) = \mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-\mu_y\right)$$

e variância

$$\xi^2 = \left(1-\rho^2\right)\sigma_x^2$$

Note que as esperanças condicionais são funções lineares, isto é:

$$E(Y|X = x) = \mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)$$

e

$$E(X|Y = y) = \eta_y = \mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-\mu_y\right)$$