Universidade Federal Fluminense

Instituto de Matemática e Estatística

Departamento de Estatística

Inferência Estatística - Uma Introdução

Ana Maria Lima de Farias
Departamento de Estatística

Agosto 2015

Sumário

Capítulo 1

Inferência estatística – Conceitos básicos

No estudo de estatística descritiva, já foi visto como resumir um conjunto de dados através de tabelas de frequências, gráficos e medidas de posição e dispersão. Depois, foram estudados modelos probabilísticos, discretos ou contínuos, para descrever determinados fenômenos. Agora, essas ferramentas serão utilizadas no estudo de um importante ramo da Estatística, conhecido como Inferência Estatística, que busca métodos de fazer afirmações sobre características de uma população, conhecendo-se apenas resultados de uma amostra.

1.1 Introdução

No estudo da estatística descritiva, vimos que população é o conjunto de elementos para os quais se deseja estudar determinada(s) característica(s). Vimos também que uma amostra é um subconjunto da população. No estudo da inferência estatística, o objetivo principal é obter informações sobre uma população a partir das informações de uma amostra e aqui vamos precisar de definições mais formais de população e amostra. Para facilitar a compreensão destes conceitos, iremos apresentar alguns exemplos a título de ilustração.

EXEMPLO 1.1

Em um estudo antropométrico em nível nacional, uma amostra de 5000 adultos é selecionada dentre os adultos brasileiros e uma das variáveis de estudo é a altura.

Neste exemplo, a população é o conjunto de todos os brasileiros adultos. No entanto, o interesse (um deles, pelo menos) está na altura dos brasileiros. Assim, nesse estudo, a cada sujeito da população associamos um número correspondente à sua altura. Se determinado sujeito é sorteado para entrar na amostra, o que nos interessa é esse número, ou seja, sua altura. Como vimos, essa é a definição de variável aleatória: uma função que associa a cada ponto do espaço amostral um número real. Dessa forma, a nossa população pode ser representada pela variável aleatória X = “altura do adulto brasileiro”. Como essa é uma variável aleatória contínua, a ela está associada uma função densidade de probabilidade f e da literatura, sabemos que é razoável supor que essa densidade seja a densidade normal. Assim, nossa população, nesse caso, é representada por uma variável aleatória $X \sim N\left(\mu; \sigma^2\right)$. Conhecendo os valores de μ e σ teremos informações completas sobre a nossa população.

Uma forma de obtermos os valores de μ e σ é medindo as alturas de todos os brasileiros adultos. Mas esse seria um procedimento caro e demorado. Uma solução, então, é retirar uma amostra (subonjunto) da população e estudar essa amostra. Suponhamos que essa amostra seja retirada com reposição e que os sorteios sejam feitos de forma independente, isto é, o resultado de cada extração não altera o resultado das demais extrações. Ao sortearmos o primeiro elemento, estamos realizando um experimento que dá origem à variável aleatória X_1 =“altura do primeiro elemento”; o segundo elemento dá origem à variável aleatória X_2 =“altura do segundo elemento” e assim por diante. Como as extrações são feitas com reposição, todas as variável aleatória $X_1, X_2, \ldots$ têm a mesma distribuição, que reflete a distribuição da altura de todos os brasileiros adultos. Para uma amostra específica, temos os valores observados $x_1, x_2, \ldots$ dessas variáveis aleatórias.

♦♦

EXEMPLO 1.2

Consideremos, agora, um exemplo baseado em pesquisas eleitorais, em que estamos interessados no resultado do segundo turno de uma eleição presidencial brasileira. Mais uma vez, nossos sujeitos de pesquisa são pessoas com 16 anos ou mais, aptas a votar. O interesse final é saber a proporção de votos de um e outro candidato. Vamos considerar uma situação simplificada em que não estamos considerando votos nulos, indecisos, etc. Então, cada sujeito de pesquisa dá origem a uma variável aleatória binária, isto é, uma variável aleatória que assume apenas dois valores. Como visto, podemos representar esses valores por 1 (candidato A) e 0 (candidato B), o que define uma variável aleatória de Bernoulli, ou seja, essa população pode ser representada pela variável aleatória $X \sim Bern(p)$. O parâmetro p representa a probabilidade de um sujeito dessa população votar no candidato A. Uma outra interpretação é que p representa a proporção populacional de votantes no candidato A.

Para obtermos informação sobre p, retira-se uma amostra da população e, como antes, vamos supor que essa amostra seja retirada com reposição. Ao sortearmos o primeiro elemento, estamos realizando um experimento que dá origem à variável aleatória X_1 = “voto do primeiro elemento”; o segundo elemento dá origem à variável aleatória X_2 = “voto do segundo elemento” e assim por diante. Como as extrações são feitas com reposição, todas as variável aleatória $X_1, X_2, \ldots$ têm a mesma distribuição de Bernoulli populacional, isto é, $X_i \sim Bern(p), i = 1, 2, \ldots$ e são independentes.

♦♦

1.2 População

A inferência estatística trata do problema de se obter informação sobre uma população a partir de uma amostra. Embora a população real possa ser constituída de pessoas, empresas, animais, etc., as pesquisas estatísticas buscam informações sobre determinadas características dos sujeitos, características essas que podem ser representadas por números. Sendo assim, a cada sujeito da população está associado um número, o que nos permite apresentar a seguinte definição.

DEFINIÇÃO **População**

A população de uma pesquisa estatística pode ser representada por uma variável aleatória X que descreve a característica de interesse.

Os métodos de inferência nos permitirão obter estimativas dos parâmetros da distribuição de probabilidade de tal variável aleatória, que pode ser contínua ou discreta.

1.3 Amostra aleatória simples

Como já dito, é bastante comum o emprego da amostragem em pesquisas estatísticas. Nas pesquisas por amostragem, uma amostra é selecionada da população de interesse e todas as conclusões serão baseadas apenas nessa amostra. Para que seja possível inferir resultados para a população a partir da amostra, é necessário que esta seja "representativa" da população.

Embora existam vários métodos de seleção de amostras, vamos nos concentrar aqui no caso mais simples, que é a *amostragem aleatória simples*. Segundo tal método, toda amostra de mesmo tamanho n tem igual chance (probabilidade) de ser sorteada. é possível extrair amostras aleatórias simples com e sem reposição. Quando estudamos as distribuições binomial e hipergeométrica, vimos que a distribuição binomial correspondia a extrações com reposição e a distribuição hipergeométrica correspondia a extrações sem reposição. No entanto, para populações grandes - ou infinitas - extrações com e sem reposição não levam a resultados muito diferentes. Assim, no estudo da Inferência Estatística, lidaremos sempre com amostragem aleatória simples *com* reposição. Este método de seleção atribui a cada elemento da população a mesma probabilidade de ser selecionado e esta probabilidade se mantém constante ao longo do processo de seleção da amostra (se as extrações fossem sem reposição isso não aconteceria). No restante desse curso omitiremos a expressão "com reposição", ou seja, o termo amostragem (ou amostra) aleatória simples sempre se referirá à amostragem com reposição. Por simplicidade, muitas vezes abreviaremos o termo amostra aleatória simples por aas.

Uma forma de se obter uma amostra aleatória simples é escrever os números ou nomes dos elementos da população em cartões iguais, colocar estes cartões em uma urna misturando-os bem e fazer os sorteios necessários, tendo o cuidado de colocar cada cartão sorteado na urna antes do próximo sorteio. Na prática, em geral são usados programas de computador, uma vez que as populações tendem a ser muito grandes.

Agora vamos formalizar o processo de seleção de uma amostra aleatória simples, de forma a relacioná-lo com os problemas de inferência estatística que iremos estudar.

Seja uma população representada por uma variável aleatória X. De tal população será sorteada uma amostra aleatória simples com reposição de tamanho n. Como visto nos exemplos anteriores, cada sorteio dá origem a uma variável aleatória X_i e, como os sorteios são com reposição, todas essas variáveis são independentes e têm a mesma distribuição de X. Isso nos leva à seguinte definição.

DEFINIÇÃO Amostra aleatória simples

Uma **amostra aleatória simples** (aas) de tamanho n de uma variável aleatória X (população) é um conjunto de n variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_n$ independentes e identicamente distribuídas (iid).

É interessante notar a convenção usual: o valor observado de uma variável aleatória X é representado pela letra minúscula correspondente. Assim, depois do sorteio de uma amostra aleatória simples de tamanho n, temos valores observados $x_1, x_2, \ldots, x_n$ das respectivas variáveis aleatórias.

1.4 Estatísticas e parâmetros

Obtida uma amostra aleatória simples, é possível calcular diversas características desta amostra, como, por exemplo, a média, a mediana, a variância, etc. Qualquer uma destas características é uma função de $X_1, X_2, ..., X_n$ e, portanto, o seu valor depende da amostra sorteada. Sendo assim, cada uma dessas características ou funções é também uma variável aleatória. Por exemplo, a média amostral é a variável aleatória definida por

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Temos, então, a seguinte definição:

DEFINIÇÃO Estatística amostral

Uma **estatística amostral** ou **estimador** T é qualquer função da amostra $X_1, X_2, ..., X_n$, isto é,

$$T = g(X_1, X_2, ..., X_n)$$

em que g é uma função qualquer.

As estatísticas amostrais que consideraremos neste curso são

- média amostral

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \tag{1.1}$$

- variância amostral

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 && (1.2)\\ &= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right) && (1.3)\\ &= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n}\right) && (1.4)\end{aligned}$$

Para uma amostra específica, o valor obido para o estimador será denominado **estimativa** e, em geral, será representada por letras minúsculas. Por exemplo, temos as seguintes notações correspondentes à média amostral e à variância: $\overline{x}$ e s^2.

Outras estatísticas possíveis são o mínimo amostral, o máximo amostral, a amplitude amostral, etc.

De forma análoga, temos as características de interesse da população. No entanto, para diferenciar entre as duas situações (população e amostra), atribuimos nomes diferentes.

DEFINIÇÃO Parâmetro

Um **parâmetro** é uma característica da população.

Assim, se a população é representada pela variável aleatória X, alguns parâmetros são a esperança $\mathrm{E}(X)$ e a variância $\mathrm{Var}(X)$ de X.

Com relação às características mais usuais, vamos usar a seguinte notação:

Característica	Parâmetro (população)	Estatística (amostra)
Média	μ	$\overline{X}$
Variância	σ^2	S^2
Número de elementos	N	n

Lembre-se que, para uma variável aleatória discreta (finita) uniforme,

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[X_i - \mathrm{E}(X)]^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[X_i - \mu]^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \mu^2$$

1.5 Distribuições amostrais

Nos problemas de inferência, estamos interessados em estimar um parâmetro θ da população (por exemplo, a média populacional) através de uma amostra aleatória simples $X_1, X_2, ..., X_n$. Para isso, usamos uma estatística T (por exemplo, a média amostral) e, com base no valor obtido para T a partir de uma particular amostra, iremos tomar as decisões que o problema exige. Já foi dito que T é uma variável aleatória, uma vez que depende da amostra sorteada; amostras diferentes fornecerão diferentes valores para T.

EXEMPLO 1.3

Considere a população é $\{1, 3, 6, 8\}$, isto é, este é o conjunto dos valores da característica de interesse da população em estudo. Assim, para esta população, ou seja, para essa variável aleatória X temos

$$\mathrm{E}(X) = \mu = \frac{1}{4}(1 + 3 + 6 + 8) = 4,5$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \sigma^2 = \frac{1}{4}\left[(1-4,5)^2 + (3-4,5)^2 + (6-4,5)^2 + (8-4,5)^2\right] \\
&= 7,25
\end{aligned}$$

Suponha que dessa população iremos extrair uma amostra aleatória simples de tamanho 2 e a estatística que iremos calcular é a média amostral. Algumas possibilidades de amostra são {1,1}, {1,3},{6,8}, para as quais os valores da média amostral são 1, 2 e 7, respectivamente. Podemos ver, então, que há uma variabilidade nos valores da estatística e, assim, seria interessante que conhecêssemos tal variabilidade. Conhecendo tal variabilidade, temos condições de saber "quão infelizes" podemos ser no sorteio da amostra. No exemplo acima, as amostras {1,1} e {8,8} são as que têm média amostral mais afastada da verdadeira média populacional. Se esses valores tiverem chance muito mais alta do que os valores mais próximos de $\mathrm{E}(X)$, podemos ter sérios problemas.

Para conhecer o comportamento da média amostral, teríamos que conhecer todos os possíveis valores de $\overline{X}$, o que equivaleria a conhecer todas as possíveis amostras de tamanho 2 de tal população. Nesse exemplo, como só temos 4 elementos na população, a obtenção de todas as amostras aleatórias simples de tamanho 2 não é difícil.

Lembre-se do estudo de análise combinatória: como o sorteio é feito com reposição, em cada um dos sorteios temos 4 possibilidades. Logo, o número total de amostras aleatórias simples é $4 \times 4 = 16$. Por outro lado, em cada sorteio, cada elemento da população tem a mesma chance de ser sorteado; como são 4 elementos, cada elemento tem probabilidade 1/4 de ser sorteado. Finalmente, como os sorteios são independentes, para obter a probabilidade de um par de elementos pertencer à amostra basta multiplicar as probabilidades (lembre-se que $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$ quando A e B são independentes). Na Tabela 1.1 a seguir listamos todas as possíveis amostras, com suas respectivas probabilidades e para cada uma delas, apresentamos o valor da média amostral.

Analisando esta tabela, podemos ver que os possíveis valores de $\overline{X}$ são 1; 2; 3; 3,5; 4,5; 5,5; 6; 7; 8 e podemos construir a sua função de de probabilidade, notando, por exemplo, que

Tabela 1.1 – Distribuição amostral da média amostral

Amostra	Probabilidade	Média amostral $\overline{x}$
$(1,1)$	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(1+1)/2 = 1$
$(1,3)$	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(1+3)/2 = 2$
$(1,6)$	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(1+6)/2 = 3,5$
$(1,8)$	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(1+8)/2 = 4,5$
$(3,1)$	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(3+1)/2 = 2$
$(3,3)$	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(3+3)/2 = 3$
$(3,6)$	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(3+6)/2 = 4,5$
$(3,8)$	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(3+8)/2 = 5,5$
$(6,1)$	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(6+1)/2 = 3,5$
$(6,3)$	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(6+3)/2 = 4,5$
$(6,6)$	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(6+6)/2 = 6$
$(6,8)$	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(6+8)/2 = 7$
$(8,1)$	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(8+1)/2 = 4,5$
$(8,3)$	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(8+3)/2 = 5,5$
$(8,6)$	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(8+6)/2 = 7$
$(8,8)$	$(1/4) \times (1/4) = 1/16$	$(8+8)/2 = 8$

o valor 2 pode ser obtido através de duas amostras: (1,3) ou (3,1). Como essas amostras correspondem a eventos mutuamente exclusivos, a probabilidade de se obter uma média amostral igual a 2 é

$$P(\overline{X} = 2) = P(\{1,3\} \cup \{3,1\}) = P(\{1,3\}) + P(\{3,1\}) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16}$$

Com o mesmo raciocínio, obtemos a seguinte função de probabilidade para $\overline{X}$:

$\overline{x}$	1	2	3	3,5	4,5	5,5	6	7	8
$P(\overline{X} = \overline{x})$	1/16	2/16	1/16	2/16	4/16	2/16	1/16	2/16	1/16

Note que a variável aleatória de interesse aqui é $\overline{X}$! Daí segue que

$$\begin{aligned}
E(\overline{X}) &= 1 \times \frac{1}{16} + 2 \times \frac{2}{16} + 3 \times \frac{1}{16} + 3,5 \times \frac{2}{16} + \\
&\quad 4,5 \times \frac{5}{16} + 5,5 \times \frac{2}{16} + 6 \times \frac{1}{16} + 7 \times \frac{2}{16} + 8 \times \frac{1}{16} \\
&= 4,5 = \mu
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
Var(\overline{X}) &= (1-4,5)^2 \times \frac{1}{16} + (2-4,5)^2 \times \frac{2}{16} + (3-4,5)^2 \times \frac{1}{16} \\
&\quad +(3,5-4,5)^2 \times \frac{2}{16} + (4,5-4,5)^2 \times \frac{5}{16} + (5,5-4,5)^2 \times \frac{2}{16} \\
&\quad +(6-4,5)^2 \times \frac{1}{16} + (7-4,5)^2 \times \frac{2}{16} + (8-4,5)^2 \times \frac{1}{16} \\
&= 3,625 = \frac{7,25}{2} = \frac{\sigma^2}{2} = \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

Neste exemplo podemos ver que $\mathrm{E}(\overline{X}) = \mu$ e $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \sigma^2/2$, onde 2 é o tamanho da amostra. Esses resultados estão nos dizendo que, em média (esperança), a estatística $\overline{X}$ é igual à média da população e que sua variância é igual à variância da população dividida pelo tamanho da amostra. Na Figura 1.1 temos os gráficos da função de probabilidade de X (população) na parte superior e de $\overline{X}$ (amostra) na parte inferior. Podemos ver que a média de ambas é 4,5 (ambas são simétricas em torno de 4,5) e que a distribuição de $\overline{X}$ tem menor dispersão em torno dessa média. Note que essa média e essa variância são calculadas ao longo de todas as possíveis amostras aleatórias simples de tamanho 2.

Consideremos, agora, a mesma situação, só que, em vez de estudarmos a média amostral, uma medida de posição, vamos estudar a dispersão. Como visto, a variância populacional é $Var(X) = 7,25$. Para a amostra, vamos trabalhar com dois estimadores. Um deles será S^2, definido na Equação (1.2) e o outro,

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \tag{1.5}$$

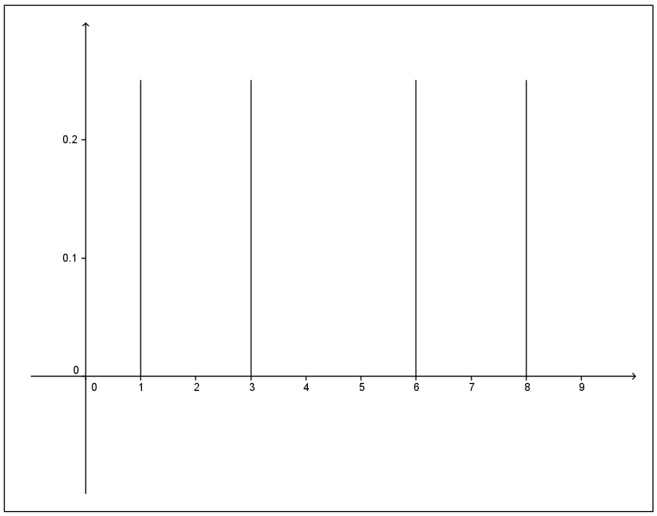
Da mesma forma que fizemos para a média amostral, vamos calcular o valor dessas estatísticas para cada uma das amostras. Na Tabela 1.2 temos os resultados parciais e globais de interesse.

Tabela 1.2 – Distribuição amostral de 2 estimadores da variância

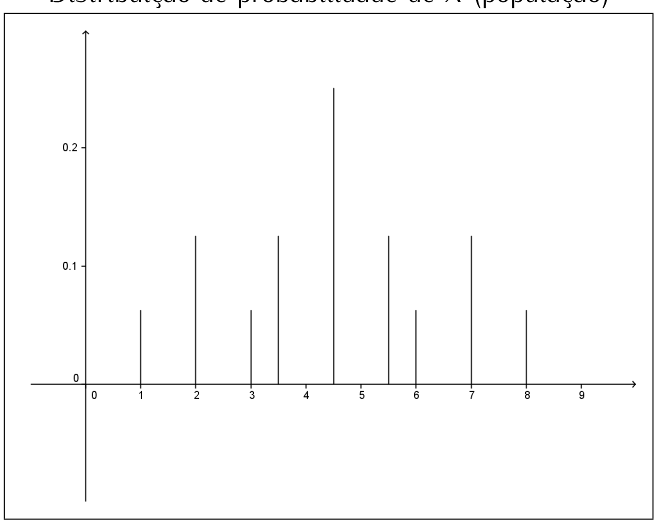
Amostra	$\overline{x}$	$(x_1-\overline{x})^2$	$(x_2-\overline{x})^2$	$\sum_{i=1}^{2}(x_i-\overline{x})^2$	S^2	$\widehat{\sigma}^2$
(1, 1)	1	$(1-1)^2$	$(1-1)^2$	0	0	0
(1, 3)	2	$(1-2)^2$	$(3-2)^2$	2	2	1
(1, 6)	3,5	$(1-3,5)^2$	$(6-3,5)^2$	12,5	12,5	6,25
(1, 8)	4,5	$(1-4,5)^2$	$(8-4,5)^2$	24,5	24,5	12,25
(3, 1)	2	$(3-2)^2$	$(1-2)^2$	2	2	1
(3, 3)	3	$(3-3)^2$	$(3-3)^2$	0	0	0
(3, 6)	4,5	$(3-4,5)^2$	$(6-4,5)^2$	4,5	4,5	2,25
(3, 8)	5,5	$(3-5,5)^2$	$(8-5,5)^2$	12,5	12,5	6,25
(6, 1)	3,5	$(6-3,5)^2$	$(1-3,5)^2$	12,5	12,5	6,25
(6, 3)	4,5	$(6-4,5)^2$	$(3-4,5)^2$	4,5	4,5	2,25
(6, 6)	6	$(6-6)^2$	$(6-6)^2$	0	0	0
(6, 8)	7	$(6-7)^2$	$(8-7)^2$	2	2	1
(8, 1)	4,5	$(8-4,5)^2$	$(1-4,5)^2$	24,5	24,5	12,25
(8, 3)	5,5	$(8-5,5)^2$	$(3-5,5)^2$	12,5	12,5	6,25
(8, 6)	7	$(8-7)^2$	$(6-7)^2$	2	2	1
(8, 8)	8	$(8-8)^2$	$(8-8)^2$	0	0	0

Podemos ver que a função de probabilidade de S^2 é

s^2	0	2	4,5	12,5	24,5
$\mathrm{P}(S^2 = s^2)$	4/16	4/16	2/16	4/16	2/16



Distribuição de probabilidade de X (população)



Distribuição de probabilidade de $\overline{X}$ ($n = 2$)

Figura 1.1 – Função de probabilidade de X e de $\overline{X}$ para aas de tamanho 2 tiradas da população $\{1, 3, 6, 8\}$

e a função de probabilidade de $\widehat{\sigma}^2$ é

k	0	1	2, 25	6, 25	12, 25
$P(\widehat{\sigma}^2 = k)$	4/16	4/16	2/16	4/16	2/16

Para essas distribuições temos:

$$
\begin{aligned}
E(S^2) &= 0 \times \frac{4}{16} + 2 \times \frac{4}{16} + 4,5 \times \frac{2}{16} + 12,5 \times \frac{4}{16} + 24,5 \times \frac{2}{16} \\
&= \frac{116}{16} = 7,25 = \sigma^2 = \mathrm{Var}(X)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
E(\widehat{\sigma}^2) &= 0 \times \frac{4}{16} + 1 \times \frac{4}{16} + 2,25 \times \frac{2}{16} + 6,25 \times \frac{4}{16} + 12,25 \times \frac{2}{16} \\
&= \frac{58}{16} = 3,625
\end{aligned}
$$

Vemos que, em média, S^2 é igual à variância populacional, o que não ocorre com $\widehat{\sigma}^2$.

Estes dois exemplos ilustram o fato de que qualquer estatística amostral T é uma variável aleatória, que assume diferentes valores para cada uma das diferentes amostras e tais valores, juntamente com a probabilidade de cada amostra, nos forneceriam a função de probabilidades de T , caso fosse possível obter todas as amostra aleatória simples de tamanho n da população. Isso nos leva à seguinte definição, que é um conceito central na Inferência Estatística.

DEFINIÇÃO **Distribuição amostral de um estimador**

A **distribuição amostral** de uma estatística T é a função de probabilidades de T ao longo de todas as possíveis amostras de tamanho n.

Podemos ver que a obtenção da distribuição amostral de qualquer estatística T é um processo tão ou mais complicado do que trabalhar com a população inteira. Na prática, o que temos é uma única amostra e é com essa única amostra que temos que tomar as decisões pertinentes ao problema em estudo. Esta tomada de decisão, no entanto, será facilitada se conhecermos resultados teóricos sobre o comportamento da distribuição amostral.

1.6 Propriedades de estimadores

No exemplo anterior, relativo à variância amostral, vimos que $E(S^2) = \sigma^2$ e $aEsp(\widehat{\sigma}^2) \neq \sigma^2$. Analogamente, vimos também que $E(\overline{X}) = \mu$. Vamos entender direito o que esses resultados significam, antes de passar a uma definição formal da propriedade envolvida.

Dada uma população, existem muitas e muitas amostras aleatórias simples de tamanho n que podem ser sorteadas. Cada uma dessas amostras resulta em um valor diferente da estatística de interesse ($\overline{X}$ e S^2, por exemplo). O que esses resultados estão mostrando é como esses diferentes valores se comportam em relação ao verdadeiro (mas desconhecido) valor do parâmetro.

Considere a Figura 1.2, em que o alvo representa o valor do parâmetro e os "tiros", indicados pelos símbolo x, representam os diferentes valores amostrais da estatística de interesse.

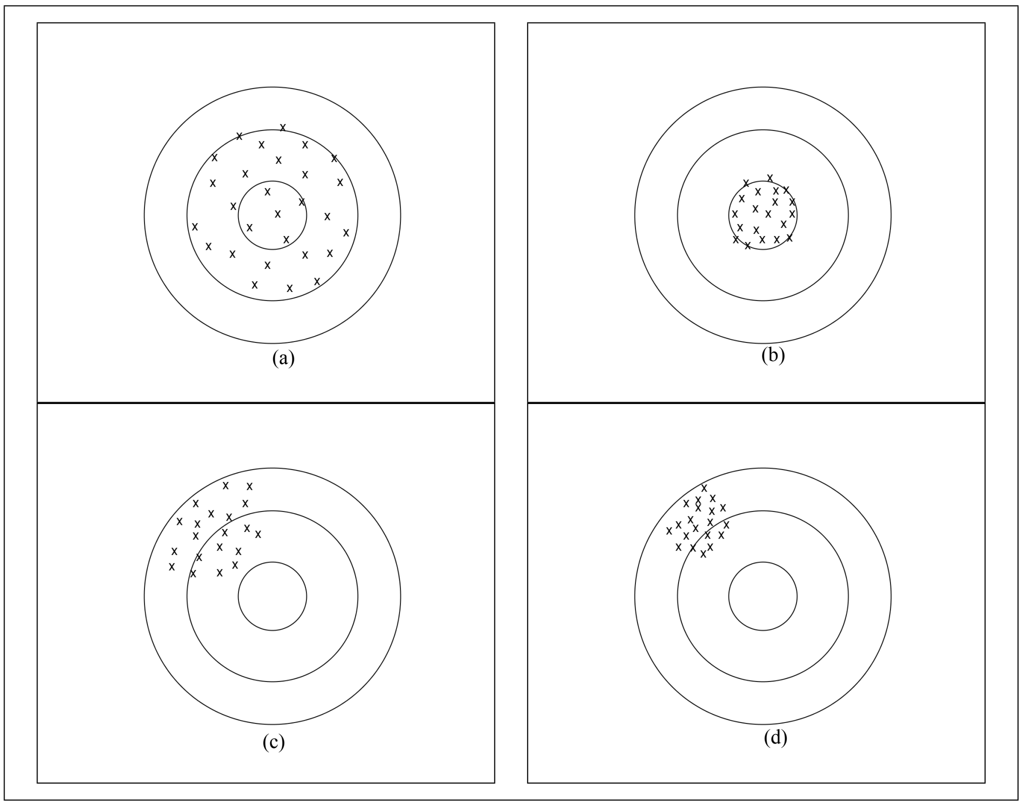


Figura 1.2 – Propriedades de estimadores

Nas partes (a) e (b) da figura, os tiros estão em torno do alvo, enquanto nas partes (c) e (d) isso não acontece. Comparando as partes (a) e (b), podemos ver que na parte (b) os tiros estão mais concentrados em torno do alvo, isto é, têm menor dispersão. Isso reflete uma pontaria mais certeira do atirador em (b). Analogamente, nas partes (c) e (d), embora ambos os atiradores estejam com a mira deslocada, os tiros do atirador (d) estão mais concentrados em torno de um alvo; o deslocamento poderia até ser resultado de um desalinhamento da arma. Já o atirador (c), além de estar com o alvo deslocado, ele tem os tiros mais espalhados, o que reflete menor precisão.

- Nas partes (a) e (b), temos dois estimadores que fornecem estimativas centradas em torno do verdadeiro valor do parâmetro, ou seja, as diferentes amostras fornecem valores distribuídos em torno do verdadeiro valor do parâmetro. A diferença é que em (a) esses valores estão mais dispersos e, assim, temos mais chance de obter uma amostra "infeliz", ou seja, uma amostra que forneça um resultado muito afastado do valor do parâmetro. Essas duas propriedades estão associadas à esperança e à variância do estimador, que são medidas de centro e dispersão, respectivamente.

- Nas partes (c) e (d), as estimativas estão centradas em torno de um valor diferente do parâmetro de interesse e, na parte (c), a dispersão é maior.

Temos, assim, ilustrados os seguintes conceitos.

DEFINIÇÃO Estimador não-viesado

Um estimador T é dito um **estimador não-viesado** do parâmetro θ, se $\mathrm{E}(T) = \theta$.

Como nos exemplos vistos, essa esperança é calculada ao longo de todas as possíveis amostras, ou seja, é a esperança da distribuição amostral de T. Nas partes (a) e (b) da Figura 1.2 os estimadores são não-viesados e nas partes (c) e (d), os estimadores são viesados.

Com relação aos estimadores $\overline{X}$, S^2 e $\widehat{\sigma}^2$, temos que os dois primeiros são não-viesados para estimar a média e a variância populacionais, respectivamente, enquanto $\widehat{\sigma}^2$ é viesado para estimar a variância populacional. Essa é a razão para se usar S^2, e não $\widehat{\sigma}^2$.

DEFINIÇÃO Eficiência de um estimador

Se T_1 e T_2 são dois estimadores não-viesados do parâmetro θ, diz-se que T_1 é **mais eficiente** que T_2, se $\mathrm{Var}(T_1) < \mathrm{Var}(T_2)$.

Na Figura 1.2, o estimador da parte (b) é mais eficiente que o estimador da parte (a).

Uma outra propriedade dos estimadores está relacionada à ideia bastante intuitiva de que, à medida que se aumenta o tamanho da amostra, mais perto devemos ficar do verdadeiro valor do parâmetro.

DEFINIÇÃO Consistência

Uma sequência $\{T_n\}$ de estimadores de um parâmetro θ é consistente se, para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{|T_n - \theta| > \varepsilon\right\} = 0$$

Uma maneira alternativa de verificar se uma sequência de estimadores é consistente é dada a seguir.

TEOREMA 1.1

Uma sequência $\{T_n\}$ de estimadores de um parâmetro θ é consistente se

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} E(T_n) &= \theta \\ \lim_{n\to\infty} Var(T_n) &= 0 \end{aligned}$$

▼

EXEMPLO 1.4

Amostras de tamanho 3 serão retiradas da população $\{1, 2, 4, 6, 8\}$. Considere os seguintes estimadores para a média da população:

- média amostral:
$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$
- média amostral ponderada:
$$\overline{X}_p = \frac{X_1 + 2X_2 + X_3}{4}$$
- ponto médio
$$\Delta = \frac{\min(X_1, X_2, X_3) + \max(X_1, X_2, X_3)}{2}$$

Mostre que

(a) $\overline{X}$ e $\overline{X}_p$ são não-viesados;

(b) $\overline{X}$ é mais eficiente que $\overline{X}_p$;

(c) Δ é viesado, mas sua variância é menor que a variância de $\overline{X}$ e de $\overline{X}_p$.

Solução

Para a população temos que

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1+2+4+6+8}{5} = 4,2 \\ \sigma^2 &= \frac{1^2+2^2+4^2+6^2+8^2}{5} - (4,2)^2 = 6,56 \end{aligned}$$

Pelo princípio da multiplicação, o número total de amostras é $5 \times 5 \times 5 = 125$ e cada uma dessas amostras tem probabilidade $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$.

X	1	1	1 _	1 _	1	X	1	1	2 _	1 _	2	X	1	1	_	2 _	4
1	1	2	4	1	1	4	1	2	7	2	2	8	1	2		3	4
1	1	4	2	1	2	4	1	4	3	2	2	8	1	4		3	4
1	1	6	8	2	3	4	1	6		3	3	8	1	6	5	4	4
1	1	8		2	4	4	1	8		3	4	8	1	8		4	4
1	2	1	4	1	1	4	2	1	7	2	2	8	2	1		3	4
1	2	2	5	1	1	4	2	2	8	2	3	8	2	2	4	3	5
1	2	4	7	2	2	4	2	4		3	3	8	2	4		4	5
1	2	6	3	2	3	4	2	6	4	3	4	8	2	6		4	5
1	2	8		3	4	4	2	8		4	5	8	2	8	6	5	5
1	4	1	2	2	2	4	4	1	3	3	2	8	4	1		4	4
1	4	2	7	2	2	4	4	2		3	3	8	4	2		4	5
1	4	4	3	3	2	4	4	4	4	4	4	8	4	4		5	6
1	4	6		3	3	4	4	6		4	5	8	4	6	6	5	6
1	4	8		4	4	4	4	8		5	6	8	4	8		6	6
1	6	1	8	3	3	4	6	1		4	3	8	6	1	5	5	4
1	6	2	3	3	3	4	6	2	4	4	4	8	6	2		5	5
1	6	4		4	3	4	6	4		5	5	8	6	4	6	6	6
1	6	6		4	3	4	6	6		5	5	8	6	6		6	7
1	6	8	5	5	4	4	6	8	6	6	6	8	6	8		7	7
1	8	1		4	4	4	8	1		5	4	8	8	1		6	4
1	8	2		4	4	4	8	2		5	5	8	8	2	6	6	5
1	8	4		5	4	4	8	4		6	6	8	8	4		7	6
1	8	6	5	5	4	4	8	6	6	6	6	8	8	6		7	7
1	8	8		6	4	4	8	8		7	6	8	8	8	8	8	8
2	1	1	4	1	1	5	1	1	8	2	3						
2	1	2	5	1	1	5	1	2	3	2	3						
2	1	4	7	2	2	5	1	4		3	3						
2	1	6	3	2	3	5	1	6		3	3						
2	1	8		3	4	5	1	8	5	4	4						
2	2	1	5	1	1	5	2	1	3	2	3						
2	2	2	2	2	2	5	2	2		3	4						
2	2	4	8	2	3	5	2	4	4	3	4						
2	2	6		3	4	5	2	6		4	4						
2	2	8	4	3	5	5	2	8		4	5						
2	4	1	7	2	2	5	4	1		3	3						
2	4	2	8	3	3	5	4	2	4	4	4						
2	4	4		3	3	5	4	4		4	5						
2	4	6	4	4	4	5	4	6		5	5						
2	4	8		4	5	5	4	8	6	5	6						
2	6	1	3	3	3	5	6	1		4	3						
2	6	2		4	4	5	6	2		5	4						
2	6	4	4	4	4	5	6	4		5	5						
2	6	6		5	4	5	6	6	6	6	6						
2	6	8		5	5	5	6	8		6	7						
2	8	1		4	4	5	8	1	5	5	4						
2	8	2	4	5	5	5	8	2		6	5						
2	8	4		5	5	5	8	4	6	6	6						
2	8	6		6	5	5	8	6		7	7						
2	8	8	6	6	5	5	8	8		7	7						

Figura 1.3 – Distribuição amostral de estimadores da média

Na Figura 1.3 estão listadas as 125 amostras possíveis, juntamente com os valores de cada um dos estimadores.

A partir daí, obtemos as distribuições de probabilidade dos estimadores:

$\overline{X}$	$P(\overline{X} = x)$	Cálculo de $E(\overline{X})$	Cálculo de $E(\overline{X}^2)$
x	p	$x \cdot p$	$x^2 \cdot p$
1	1/125	3/375	$(3/3)^2\,(1/125)$
4/3	3/125	12/375	$(4/3)^2\,(3/125)$
5/3	3/125	15/375	$(5/3)^2\,(3/125)$
2	4/125	24/375	$(6/3)^2\,(4/125)$
7/3	6/125	42/375	$(7/3)^2\,(6/125)$
8/3	6/125	48/375	$(8/3)^2\,(6/125)$
3	9/125	81/375	$(9/3)^2\,(9/125)$
10/3	9/125	90/375	$(10/3)^2\,(9/125)$
11/3	12/125	132/375	$(11/3)^2\,(12/125)$
4	10/125	120/375	$(12/3)^2\,(10/125)$
13/3	9/125	117/375	$(13/3)^2\,(9/125)$
14/3	12/125	168/375	$(14/3)^2\,(12/125)$
5	6/125	90/375	$(15/3)^2\,(6/125)$
16/3	12/125	192/375	$(16/3)^2\,(12/125)$
17/3	3/125	51/375	$(17/3)^2\,(3/125)$
6	10/125	180/375	$(18/3)^2\,(10/125)$
20/3	6/125	120/375	$(20/3)^2\,(6/125)$
22/3	3/125	66/375	$(22/3)^2\,(3/125)$
8	1/125	24/375	$(24/3)^2\,(1/125)$
	Soma	1575/375	$22305/\,(9 \times 125)$

Logo,

$$E(\overline{X}) = \frac{1575}{375} = 4,2 = \mu$$

e

$$\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{22305}{9 \times 125} - (4,2)^2 = 2,186667 = \frac{6,56}{3} = \frac{\sigma^2}{3}$$

$\overline{X}_p$ x	$P(\overline{X}_p = x)$ p	Cálculo de $E(\overline{X}_p)$ $x \cdot p$	Cálculo de $E(\overline{X}_p^2)$ $x^2 \cdot p$
4/4	1/125	4/500	$(4/4)^2\,(1/125)$
5/4	2/125	10/500	$(5/4)^2\,(2/125)$
6/4	2/125	12/500	$(6/4)^2\,(2/125)$
7/4	4/125	28/500	$(7/4)^2\,(4/125)$
8/4	3/125	24/500	$(8/4)^2\,(3/125)$
9/4	4/125	36/500	$(9/4)^2\,(4/125)$
10/4	6/125	60/500	$(10/4)^2\,(6/125)$
11/4	6/125	66/500	$(11/4)^2\,(6/125)$
12/4	8/125	96/500	$(12/4)^2\,(8/125)$
13/4	4/125	52/500	$(13/4)^2\,(4/125)$
14/4	10/125	140/500	$(14/4)^2\,(10/125)$
15/4	4/125	60/500	$(15/4)^2\,(4/125)$
16/4	9/125	144/500	$(16/4)^2\,(9/125)$
17/4	4/125	68/500	$(17/4)^2\,(4/125)$
18/4	10/125	180/500	$(18/4)^2\,(10/125)$
19/4	4/125	76/500	$(19/4)^2\,(4/125)$
20/4	8/125	160/500	$(20/4)^2\,(8/125)$
21/4	4/125	84/500	$(21/4)^2\,(4/125)$
22/4	8/125	176/500	$(22/4)^2\,(8/125)$
23/4	2/125	46/500	$(23/4)^2\,(2/125)$
24/4	7/125	168/500	$(24/4)^2\,(7/125)$
25/4	2/125	50/500	$(25/4)^2\,(2/125)$
26/4	6/125	156/500	$(26/4)^2\,(6/125)$
28/4	4/125	112/500	$(28/4)^2\,(4/125)$
30/4	2/125	60/500	$(30/4)^2\,(2/125)$
32/4	1/125	32/500	$(32/4)^2\,(1/125)$
	Soma	2100/500	$40200/(16 \times 125)$

Logo,

$$E(\overline{X}_p) = 4,2 = \mu$$

e

$$\mathrm{Var}(\overline{X}_p) = \frac{40200}{16 \times 125} - (4.2)^2 = 2,46$$

Δ	$P(\Delta = x)$	Cálculo de $E(\Delta)$	Cálculo de $E(\Delta^2)$
x	p	$x \cdot p$	$x^2 \cdot p$
2/2	1/125	2/250	$(2/2)^2\,(1/125)$
3/2	6/125	18/250	$(3/2)^2\,(6/125)$
4/2	1/125	4/250	$(4/2)^2\,(1/125)$
5/2	12/125	60/250	$(5/2)^2\,(12/125)$
6/2	6/125	36/250	$(6/2)^2\,(6/125)$
7/2	18/125	126/250	$(7/2)^2\,(18/125)$
8/8	13/125	104/250	$(8/2)^2\,(13/125)$
9/2	24/125	216/250	$(9/2)^2\,(24/125)$
10/2	24/125	240/250	$(10/2)^2\,(24/125)$
12/2	13/125	156/250	$(12/2)^2\,(13/125)$
14/2	6/125	84/250	$(14/2)^2\,(6/125)$
16/2	1/125	16/250	$(16/2)^2\,(1/125)$
	Soma	1062/250	$9952/(4 \times 125)$

Logo,

$$E(\Delta) = \frac{1062}{250} = 4,248$$

e

$$Var(\Delta) = \frac{9952}{4 \times 125} - (4,248)^2 = 1,858496$$

Na tabela a seguir apresentamos o resumo dos resultados obtidos.

	Parâmetro populacional	Estimador $\overline{X}$	$\overline{X}_p$	Δ
Média	$\mu = 4,2$	4,2000	4,2000	4,2480
Variância	$\sigma^2 = 6,56$	2,1867	2,4600	1,8585

Conclui-se que $\overline{X}$ e $\overline{X}_p$ são estimadores não-viesados de μ e que $\overline{X}$ é mais eficiente que $\overline{X}_p$, uma vez que $Var(\overline{X}) < Var(\overline{X}_p)$.

O estimador Δ é viesado, pois $E(\Delta) \neq \mu$. No entanto, a variância desse estimador é menor que as variâncias dos dois estimadores não-viesados. à vezes, na prática, podemos trabalhar com estimadores viesados com variância pequena, desde que o viés não seja muito grande.

1.7 Alguns métodos de obtenção de estimadores

Definidas as propriedades desejáveis de um estimador, a questão que se coloca é: como conseguir estimadores? Neste curso vamos ver 2 métodos, que, no entanto, não esgotam as possibilidades. Por exemplo, no estudo dos modelos de regressão é usado o método dos mínimos quadrados, que não será abordado aqui.

O contexto geral é o seguinte: de uma população representada pela variável aleatória X extrai-se uma amostra aleatória simples $X_1, X_2, \ldots, X_n$ com o objetivo de se estimar um parâmetro $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)$. A distribuição de probabilidade f da variável X depende de tal parâmetro, o que representaremos por $f(x; \theta)$.

1.7.1 Método dos momentos

A idéia geral do método dos momentos é a seguinte: o estimador $\widehat{\theta}$ será obtido como solução das equações que igualam os momentos populacionais aos momentos amostrais.

DEFINIÇÃO Momento de uma variável aleatória

O momento μ_k de ordem k de uma variável aleatória X é definido como

$$\mu_k = \mathrm{E}(X^k)$$

Se X é contínua, temos que

$$\mu_k = \int x^k f(x; \theta) dx$$

e para o caso discreto

$$\mu_k = \sum_x x^k f(x; \theta)$$

DEFINIÇÃO Momento amostral

Dada uma amostra aleatória simples $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de uma população X, o momento amostral m_k de ordem k é definido como

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

DEFINIÇÃO Método dos momentos

$\widehat{\theta}$ é o estimador para θ obtido pelo método dos momentos se ele for solução das equações

$$m_k = \mu_k \qquad k = 1, 2, \ldots, r$$

EXEMPLO 1.5 Distribuição de Poisson

Seja $X \sim Poi(\lambda)$. Vamos obter o estimador pelo métodos dos momentos para λ. A função de probabilidade de X é

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

e foi visto que $\mathrm{E}(X) = \lambda = \mu_1$. Igualando

$$\mu_1 = m_1 \Rightarrow \widehat{\lambda} = \overline{X}$$

EXEMPLO 1.6 Distribuição Exponencial

Seja $X \sim \exp(\beta)$. Então

$$f(x; \beta) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}$$

e $\mathrm{E}(X) = \beta$. Como na Poisson, o estimador pelo método dos momentos será $\widehat{\beta} = \overline{X}$. Com a outra parametrização

$$f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

temos que $\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ e o estimador pelo método dos momentos de λ é $\widehat{\lambda} = \dfrac{1}{\overline{X}}$.

EXEMPLO 1.7 Distribuição Normal

Se $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \mu \Rightarrow \mu_1 = \mu \\ \mathrm{Var}(X) &= \sigma^2 \Rightarrow \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = \sigma^2 \Rightarrow \mu_2 - (\mu_1)^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$

Resulta que os estimadores pelo método dos momentos são

$$\begin{aligned} \widehat{\mu} &= \overline{X} \\ \widehat{\sigma}^2 &= m_2 - m_1^2 = \frac{1}{n} \sum X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{n} \sum \left(X_i - \overline{X} \right)^2 \end{aligned}$$

1.7.2 Método da máxima verossimilhança

Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória simples retirada de uma população $X \sim f_X(x; \theta)$, então $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias (porque dependem da amostra a ser sorteada) independentes e identicamente distribuídas e sua distribuição conjunta é

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i; \theta)$$

pela hipótese de independência das variáveis aleatórias. O parâmetro θ é desconhecido, mas fixo, ou seja, $f_X(x; \theta)$ depende deste único parâmetro. Depois de sorteada a amostra, os valores observados de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ estão fixos. O método da máxima verossimilhança consiste em estimar o parâmetro θ pelo valor $\widehat{\theta}$ que maximiza a probabilidade de se observar esses valores da amostra.

A título de ilustração deste conceito, vamos considerar uma amostra aleatória simples de tamanho 1 retirada de uma população $N(\mu; 1)$. Nosso objetivo é estimar a média a partir desta amostra de tamanho 1. Suponhamos que a amostra sorteada resulte na observação $x = 2$. Essa observação poderia ter vindo de qualquer distribuição normal com variância 1. Na Figura 1.4 temos 3 dessas possíveis distribuições: todas têm variância 1, mas suas médias são diferentes. Os pontos coloridos correspondem ao valor da respectiva função de densidade no ponto observado $x = 2$. O método de máxima verossimilhança fornece o estimador $\widehat{\mu}$ como sendo aquele que maximiza $f_\mu(2)$. Note que agora quem está variando é o parâmetro μ, ou seja, estamos escolhendo o "melhor" μ, que é aquele que maximiza $f(2)$. Podemos ver que o máximo ocorre quando $\mu = 2$ (curva do meio, em azul).

Vamos, agora, formalizar esse procedimento.

DEFINIÇÃO Estimador de Máxima Verossimilhança

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os valores observados de uma amostra aleatória simples $X_1, X_2, \ldots, X_n$ retirada de uma população $X \sim f_X(x; \theta)$. A função de verossimilhança é definida por

$$L(\theta|\mathbf{x}) = L(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) \tag{1.6}$$

Note que a função de verossimilhança é uma função de θ; os valores x_i estão fixos, correspondendo à amostra observada.
O estimador de máxima verossimilhança de θ é o valor $\widehat{\theta}$ que maximiza $L(\theta|\mathbf{x})$.

O processo para encontrar o estimador de máxima verossimilhança consiste, então, em maximizar a função de verossimilhança (1.6). Muitas vezes esse processo de maximização ficará mais simples se trabalharmos com o logaritmo natural de $L(\theta|\mathbf{x})$. Como a função logarítmica

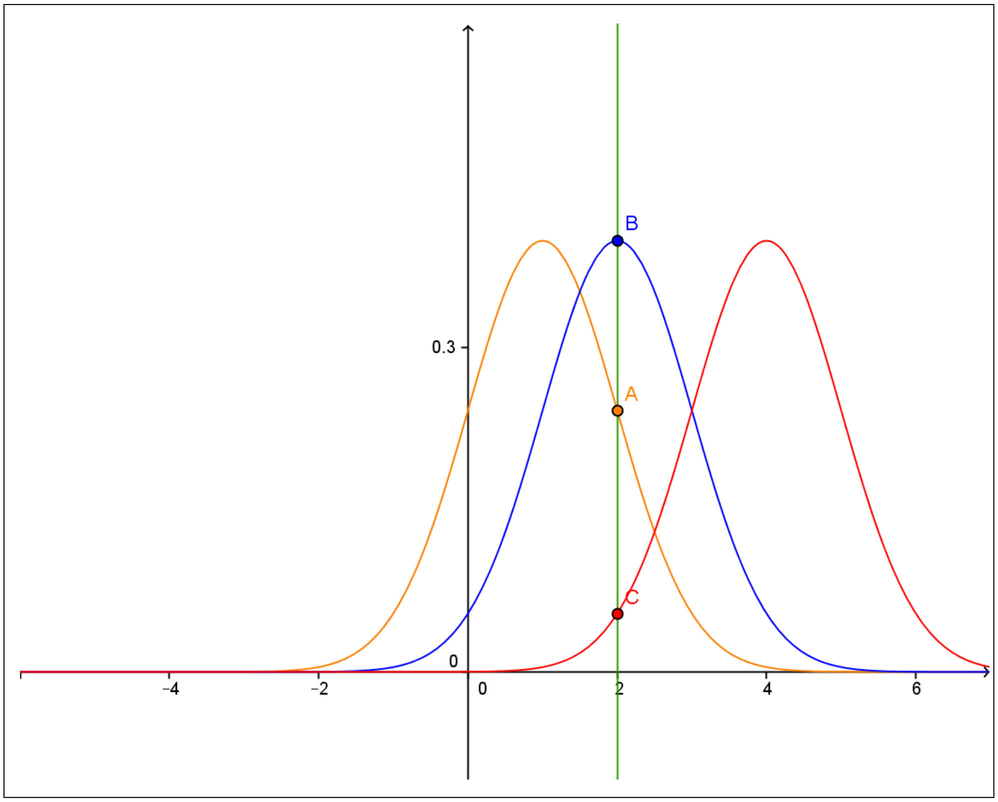


Figura 1.4 – Exemplo da máxima verossimilhança - amostra de tamanho 1 da $N(\mu; 1)$

é crescente, os máximos de $L(\theta|\mathbf{x})$ e $\ln L(\theta|\mathbf{x})$ ocorrerão no mesmo ponto. Vamos denotar por $\ell(\theta|\mathbf{x})$ o logaritmo natural da função de verossimilhança, isto é:

$$\ell(\theta|\mathbf{x}) = \ln L(\theta|\mathbf{x}) \tag{1.7}$$

Essa função é chamada função log-verossimilhança.

EXEMPLO 1.8 Distribuição de Poisson

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples da população $X \sim Poi(\lambda)$. Então, a função de probabilidade conjunta é

$$\mathrm{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right)$$

e a função de verossimilhança é

$$L(\lambda|\mathbf{x}) = L(\lambda|x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right)$$

Tomando o logaritmo natural da função de verossimilhança obtém-se

$$\begin{aligned}
\ell(\lambda|\mathbf{x}) &= \ln L(\lambda|\mathbf{x}) = \ln \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) = \sum_{i=1}^{n} \ln \left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) \\
&= sum_{i=1}^{n} \left[\ln(\lambda^{x_i}) + \ln e^{-\lambda} - \ln x_i! \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i \ln \lambda) + \sum_{i=1}^{n} [(-\lambda) \ln e] - \sum_{i=1}^{n} (\ln x_i!) \\
&= \ln \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i - n\lambda - \sum_{i=1}^{n} (\ln x_i!)
\end{aligned}$$

Para achar o máximo de $\ell(\lambda|\mathbf{x})$ temos que derivar em relação a λ e igualar essa derivada a zero:

$$\frac{d\ell(\lambda|\mathbf{x})}{d\lambda} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\widehat{\lambda}} \sum_{i=1}^{n} x_i - n = 0 \Leftrightarrow \widehat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Leftrightarrow \widehat{\lambda} = \overline{X}$$

A derivada segunda é

$$\frac{d^2\ell(\lambda|\mathbf{x})}{d\lambda^2} = -\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} x_i < 0$$

e, portanto, $\widehat{\lambda} = \overline{X}$ corresponde a um ponto de máximo global, uma vez que $\lim_{\lambda \to \infty} L(\lambda|\mathbf{x}) = 0$.

EXEMPLO 1.9 Distribuição normal

Para uma população é $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, a função de verossimilhança é

$$L(\mu; \sigma^2|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]$$

e

$$\begin{aligned}
\ell(\mu; \sigma^2|\mathbf{x}) &= \ln L(\mu; \sigma^2|\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \ln \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} + \sum_{i=1}^{n} \ln \left\{ \exp \left[-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \right\} \\
&= n \ln \left(2\pi\sigma^2 \right)^{-1/2} - \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \\
&= -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0 \Leftrightarrow \widehat{\mu} = \overline{x}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma^2} = 0 \Leftrightarrow -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \widehat{\mu})^2}{\left(\sigma^2\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

Pode-se mostrar que esse realmente é um ponto de máximo global e, portanto $\overline{x}$ e $\widehat{\sigma}^2$ são os estimadores de máxima verossimilhança da média e da variância da normal.

Os estimadores de máxima verossimilhança gozam de propriedades importantes que, no entanto, não serão estudadas nesse curso.

1.8 Exercícios propostos

1. Em cada uma das afirmativas seguintes, identifique o número em negrito como o valor de um parâmetro populacional ou de uma estatística amostral.

   (a) Um pesquisador realizou um estudo para investigar a prevalência do mal de Alzheimer em pessoas com idade acima de 85 anos. Os resultados indicaram que **47,2%** dos pacientes estudados mostraram sintomas consistentes com a doença.

   (b) A equipe de uma revista de suporte ao consumidor testou uma amostra aleatória de 19 chás verdes em relação ao sabor e aos benefícios à saúde. O preço médio por xícara de chá foi relatado como **2,80** reais.

   (c) Durante um inverno recente, o mês de janeiro foi particularmente frio nos Estados Unidos. Uma companhia de energia no estado da Pensilvânia relatou que o número médio de quilowatts usados por cada consumidor durante o mês de janeiro foi **1346.**

   (d) Um fabricante de computadores afirma que a vida média das baterias de laptops é **6,7** horas.

2. Obtenha o estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro da distribuição exponencial.

Capítulo 2

Algumas distribuições amostrais

2.1 Introdução

Na Inferência Estatística, o objetivo é obter informação sobre uma população a partir de uma amostra. Vimos, no capítulo anterior, que uma população estatística é representada por uma variável aleatória X e, assim, um dos parâmetros de interesse é a média (ou esperança) dessa variável. Neste capítulo estudaremos as propriedades da média amostral $\overline{X}$ como estimador da média populacional μ e também de S_2 como estimador da variância populacional σ^2. Como visto anteriormente, tais propriedades são definidas a partir das distribuições amostrais de $\overline{X}$ e S^2, que são as distribuições de probabilidade ao longo de todas as possíveis amostras aleatórias simples de tamanho n.

2.2 Distribuição amostral da média amostral $\overline{X}$

2.2.1 Média e variância de $\overline{X}$

No capítulo anterior, vimos, por meio de exemplos, que a média amostral $\overline{X}$ é um estimador não-viesado da média populacional μ. Vamos, agora, demonstrar o seguinte resultado geral.

TEOREMA 2.1

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples de tamanho n de uma população representada pela variável aleatória X com média μ e variância σ^2. Então,

$$E(\overline{X}) = \mu \tag{2.1}$$

$$Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \tag{2.2}$$

Demonstração

Por definição de amostra aleatória simples, as X_i são independentes e todas têm a mesma distribuição de X; logo, $E(X_i) = \mu$ e $Var(X_i) = \sigma^2$. Da independência resulta que $Cov(X_i, X_j) = 0\ \forall i \neq j$. Por outro lado, no estudo dos vetores aleatórios, vimos que a esperança da soma de variáveis aleatórias é a soma das esperanças. Então:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\overline{X}) &= \mathrm{E}\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\,\mathrm{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\
&= \frac{1}{n}\left[\mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \cdots + \mathrm{E}(X_n)\right] \\
&= \frac{1}{n}(\mu + \mu + \cdots + \mu) = \frac{1}{n}n\mu = \mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\overline{X}) &= \mathrm{Var}\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n) + \sum_{i \neq j}\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2 + 0\right) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

■

É importante notar que esse resultado se refere a qualquer população X. O que ele estabelece é que as médias amostrais das diferentes amostras aleatórias simples de tamanho n tendem a "acertar o alvo"da média populacional μ; lembre-se da Figura 1.2, partes (a) e (b). Além disso, à medida que o tamanho amostral n aumenta, a dispersão em torno do alvo, medida por $\mathrm{Var}(\overline{X})$, vai diminuindo e tende a zero quando $n \to \infty$.

O desvio padrão da distribuição amostral de qualquer estatística é usualmente chamado de *erro padrão*. Então, o erro padrão da média amostral é $\mathrm{EP}(\overline{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

2.2.2 Populações normais

Na prática estatística, várias populações podem ser descritas, pelo menos aproximadamente, por uma distribuição normal. Obviamente, o teorema anterior continua valendo no caso de uma população normal, mas temos uma característica a mais da distribuição amostral da média: ela é também normal.

TEOREMA 2.2

*Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples de tamanho n de uma **população normal**, isto é, uma população representada por uma variável aleatória normal $X \sim N(\mu; \sigma^2)$. Então, a distribuição amostral da média amostral $\overline{X}$ é normal com média μ e variância σ^2/n, ou seja,*

$$X \sim N\left(\mu; \sigma^2\right) \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right) \tag{2.3}$$

▼

Na Figura 2.1 ilustra-se o comportamento da distribuição amostral de $\overline{X}$ com base em amostras de tamanho $n = 4$ retiradas de uma população $X \sim N(2; 3^2)$. A título de comparação, apresenta-se também a distribuição populacional. Podemos ver que ela é mais dispersa que a distribuição amostral de $\overline{X}$, mas ambas estão centradas no verdadeiro valor populacional $\mu = 2$

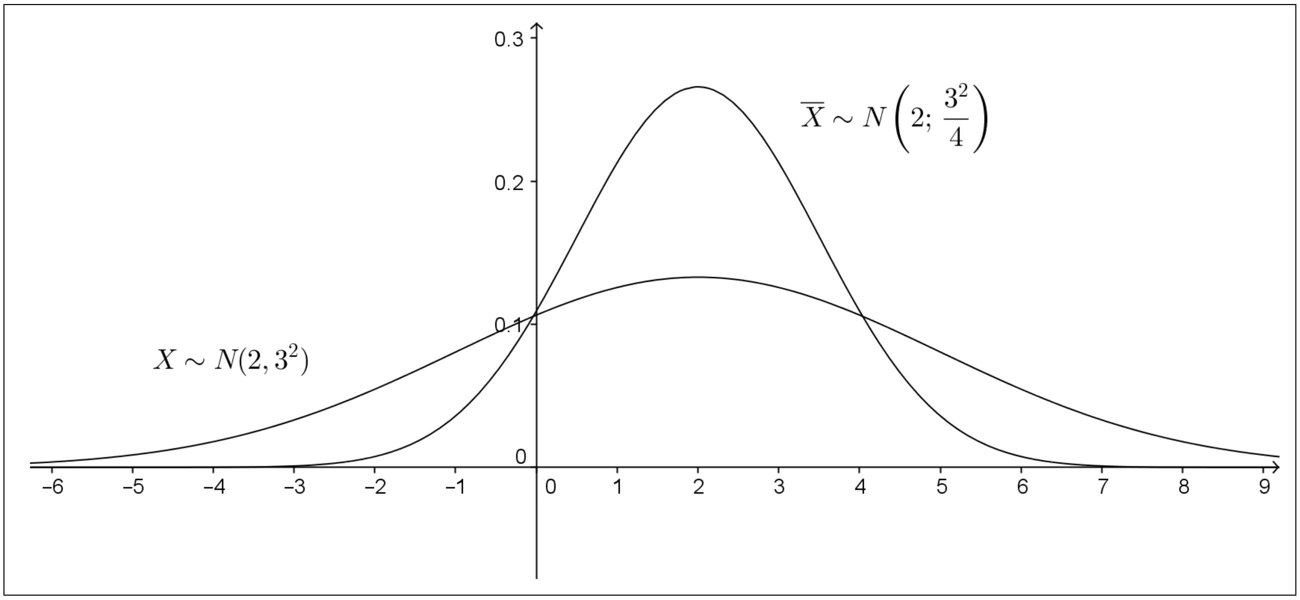


Figura 2.1 – Distribuição amostral de $\overline{X}$ com base em aas de tamanho $n = 2$ de uma população $N(2; 9)$.

EXEMPLO 2.1 Carga de elevador

A capacidade máxima de um elevador é de 500kg. Se a distribuição dos pesos dos usuários é $N(70; 100)$, qual é a probabilidade de que sete pessoas ultrapassem este limite? E de seis pessoas?

Solução

Podemos considerar os sete passageiros como uma amostra aleatória simples da população de todos os usuários, representada pela v.a. $X \sim N(70; 100)$. Seja, então, $X_1, \dots, X_7$ uma aas de tamanho $n = 7$. Se o peso máximo é 500kg, para que sete pessoas ultrapassem o limite de segurança temos de ter

$$\sum_{i=1}^{7} X_i > 500 \Rightarrow \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} X_i > \frac{500}{7} \Rightarrow \overline{X} > 71,729$$

Mas, por (2.2), sabemos que

$$\overline{X} \sim N\left(70; \frac{100}{7}\right)$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
P(\overline{X} > 71,729) &= P\left(\frac{\overline{X}-70}{\sqrt{\frac{100}{7}}} > \frac{71,729-70}{\sqrt{\frac{100}{7}}}\right) \\
&= P(Z > 0,46) = 0,5 - \text{tab}(0,46) \\
&= 0,5 - 0,17724 = 0,32276
\end{aligned}
$$

Com seis pessoas teríamos de ter

$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{X} > \frac{500}{6}\right) &= P\left(Z > \frac{83,333-70}{\sqrt{\frac{100}{7}}}\right) \\
&= P(Z > 3,53) = 0,5 - \text{tab}(3,53) \\
&= 0,5 - 0,49979 = 0,00021
\end{aligned}
$$

Podemos ver que existe uma probabilidade alta (0,32 ou 32% de chance) de sete pessoas ultrapassarem o limite de segurança. Já com seis pessoas, essa probabilidade é bastante pequena. Assim, o número máximo de pessoas no elevador deve ser estabelecido como seis ou menos.

♦♦

EXEMPLO 2.2

Considere uma população representada por $X \sim N(100, 10^2)$.

(a) Calcule $P(90 < X < 110)$.

(b) Se $\overline{X}$ é a média de uma amostra aleatória simples de 16 elementos retirados dessa população, calcule $P(90 < \overline{X} < 110)$.

(c) Construa, em um único sistema de coordenadas, os gráficos das distribuições de X e $\overline{X}$.

(d) Que tamanho deveria ter a amostra para que $P(90 < \overline{X} < 110) = 0,95$?

Solução

(a)

$$
\begin{aligned}
P(90 < X < 110) &= P\left(\frac{90-100}{10} < Z < \frac{110-100}{10}\right) = P(-1 < Z < 1) \\
&= 2 \times P(0 < Z < 1) = 2 \times \text{tab}(1,0) = 0,68268
\end{aligned}
$$

(b) Com $n = 16$, resulta que $\overline{X} \sim N\left(100; \frac{100}{16}\right)$

$$\begin{aligned}
P(90 < \overline{X} < 110) &= P\left(\frac{90-100}{\sqrt{\frac{100}{16}}} < Z < \frac{110-100}{\sqrt{\frac{100}{16}}}\right) \\
&= P(-4 < Z < 4) = 2 \times P(0 < Z < 4) = 2 \times \text{tab}(4,0) \approx 1,00
\end{aligned}$$

(c) Veja a Figura 2.2. Como visto, a distribuição amostral com $n = 16$ é menos dispersa que a distribuição populacional e, então, podemos ver que, entre 90 e 110, temos concentrada praticamente toda a distribuição de $\overline{X}$.

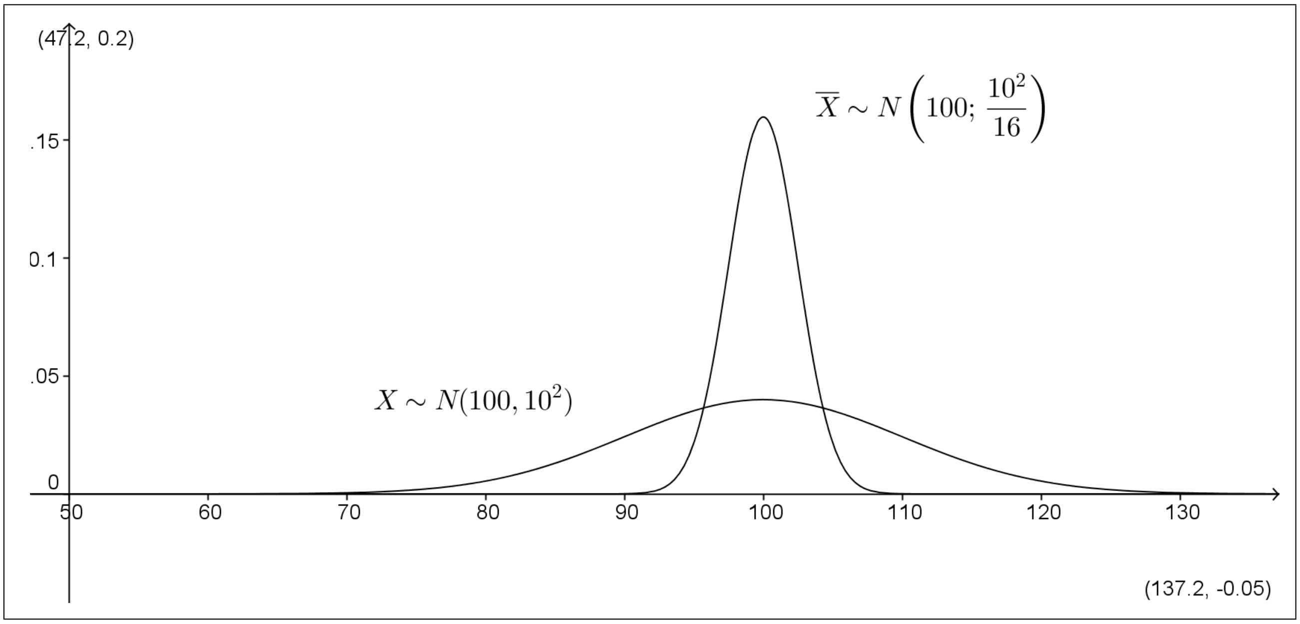


Figura 2.2 – Distribuição amostral de $\overline{X}$ com base em aas de tamanho $n = 16$ de uma população $N(100; 100)$.

(d)

$$\begin{aligned}
P(90 < \overline{X} < 110) &= 0,95 \Leftrightarrow \\
P\left(\frac{90-100}{\sqrt{\frac{100}{n}}} < Z < \frac{110-100}{\sqrt{\frac{100}{n}}}\right) &= 0,95 \Leftrightarrow \\
P(-\sqrt{n} < Z < \sqrt{n}) &= 0,95 \Leftrightarrow \\
2 \times P(0 < Z < \sqrt{n}) &= 0,95 \Leftrightarrow \\
2 \times \text{tab}(\sqrt{n}) &= 0,95 \Leftrightarrow \\
\text{tab}(\sqrt{n}) &= 0,475 Leftrightarrow \\
\sqrt{n} &= 1,96 \Leftrightarrow n \approx 4
\end{aligned}$$

A título de ilustração, apresentam-se na Figura 2.3 as distribuições amostrais de $\overline{X}$ para $n = 16$ e $n = 4$, juntamente com a distribuição populacional.

♦♦

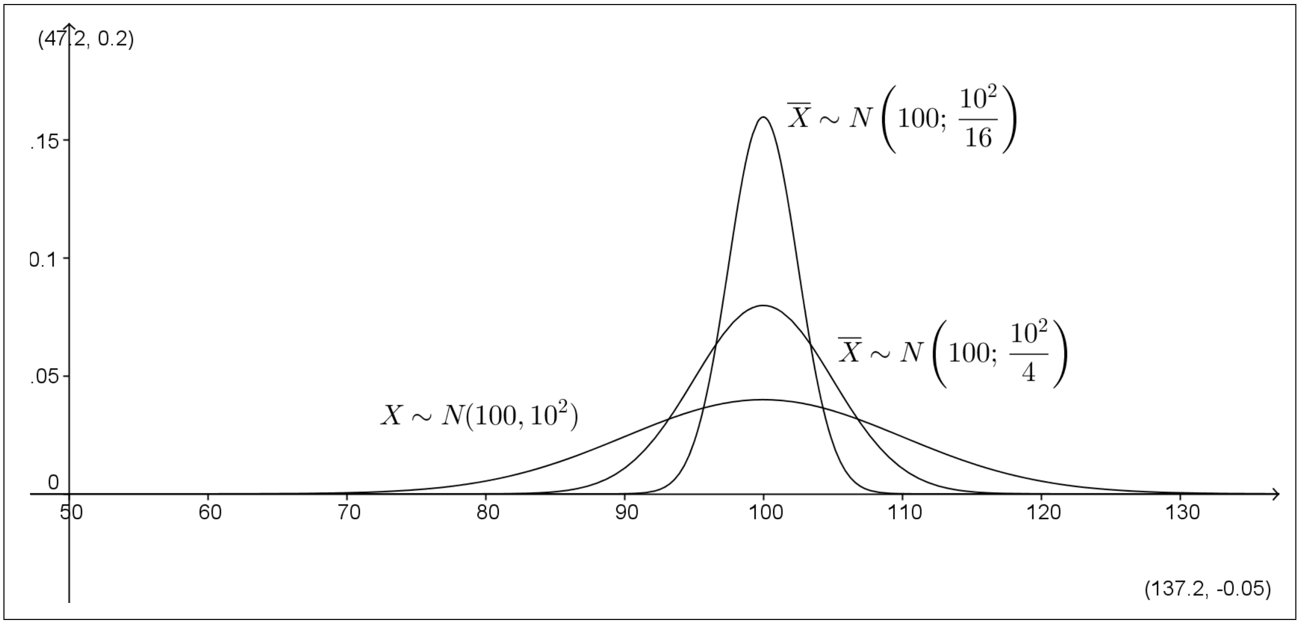


Figura 2.3 – Distribuição amostral de $\overline{X}$ com base em aas de tamanho $n = 16$ e $n = 4$ de uma população $N(100; 100)$.

EXEMPLO 2.3 Regulagem de máquinas

A máquina de empacotar um determinado produto o faz segundo uma distribuição normal, com média μ e desvio padrão 10g.

(a) Em quanto deve ser regulado o peso médio μ para que apenas 10% dos pacotes tenham menos do que 500g?

(b) Com a máquina assim regulada, qual é a probabilidade de que o peso total de quatro pacotes escolhidos ao acaso seja inferior a 2kg?

Solução

(a) Seja X a variável aleatória que representa o peso dos pacotes. Sabemos, então, que $X \sim N(\mu; 100)$. Queremos que

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X < 500) &= 0,10 \Rightarrow \\ \mathrm{P}\left(\frac{X-\mu}{10} < \frac{500-\mu}{10}\right) &= 0,10 \Rightarrow \\ \mathrm{P}\left(Z < \frac{500-\mu}{10}\right) &= 0,10 \end{aligned}$$

Então, na densidade normal padrão, à esquerda da abscissa $\frac{500-\mu}{10}$ temos que ter uma área (probabilidade) de 0,10. Logo, essa abscissa tem que ser negativa. Usando a simetria da densidade normal, temos as seguintes equivalências:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(Z < \frac{500-\mu}{10}\right) &= 0,10 \Longleftrightarrow \\
\mathrm{P}\left(Z > -\frac{500-\mu}{10}\right) &= 0,10 \Longleftrightarrow \\
\mathrm{P}\left(Z > \frac{\mu-500}{10}\right) &= 0,10 \Longleftrightarrow \\
\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{\mu-500}{10}\right) &= 0,40 \Longleftrightarrow \\
\mathrm{tab}\left(\frac{\mu-500}{10}\right) &= 0,40 \Longleftrightarrow \\
\frac{\mu-500}{10} = 1,28 \Longleftrightarrow \mu &= 512,8 \text{ g}
\end{aligned}
$$

Veja a Figura 2.4 onde são ilustradas essas equivalências.

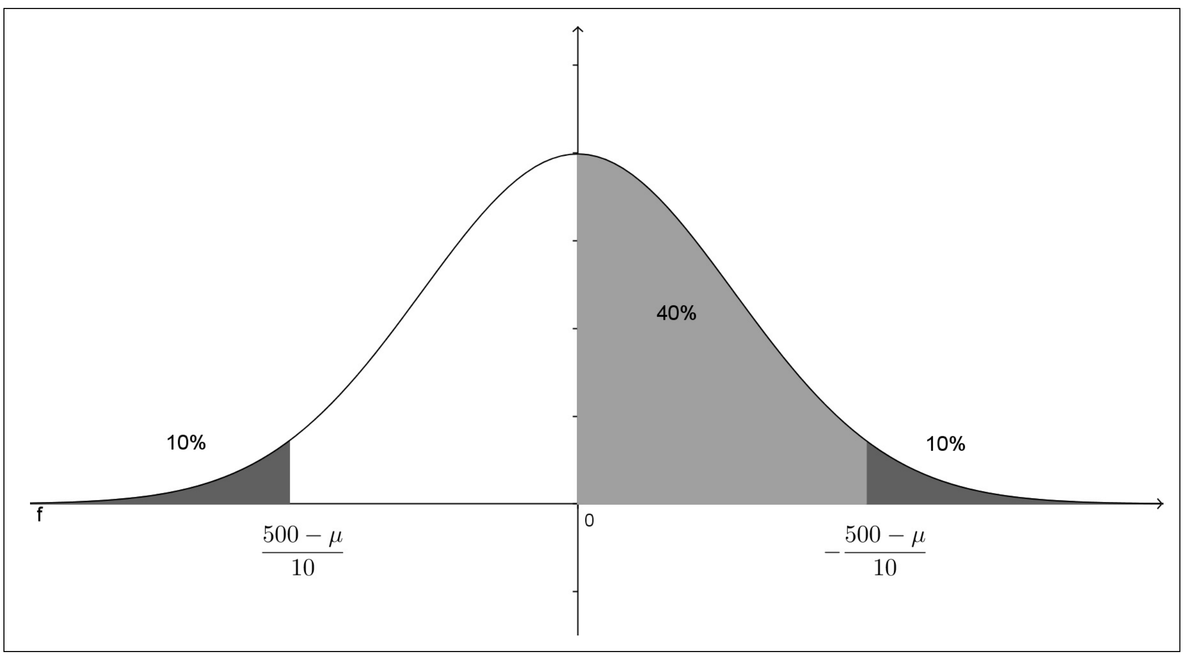


Figura 2.4 – Solução do Exemplo 2.3

(b) Sejam X_1, X_2, X_3, X_4 os pesos dos 4 pacotes da amostra. Queremos que $\sum_{i=1}^{4} X_i < 2000$g. Isso é equivalente a $\overline{X} < 500$. Logo,

$$
\begin{aligned}
P(\overline{X} < 500) &= P\left(\frac{\overline{X} - 512,8}{\sqrt{\frac{100}{4}}} < \frac{500 - 512,8}{\sqrt{\frac{100}{4}}}\right) \\
&= P(Z < -2,56) = P(Z > 2,56) \\
&= 0,5 - P(0 \leq Z \leq 2,56) \\
&= 0,5 - \text{tab}(2,56) \\
&= 0,5 - 0,49477 = 0,00523
\end{aligned}
$$

Com a máquina regulada para 512,8g, há uma probabilidade de 0,00523 de que uma amostra de 4 pacotes apresente peso médio inferior a 500g. Note que com um pacote apenas, essa probabilidade é de 10%. Por isso, as inspeções de controle de qualidade são sempre feitas com base em amostras de tamanho $n > 1$.

♦♦

EXEMPLO 2.4 Regulagem de máquinas – continuação

Volte ao Exemplo 2.3. Depois de regulada a máquina, prepara-se uma carta de controle de qualidade. Uma amostra de 4 pacotes será sorteada a cada hora. Se a média da amostra for inferior a 497g ou superior a 520g, a produção deve ser interrompida para ajuste da máquina, isto é, ajuste do peso médio.

(a) Qual é a probabilidade de uma parada desnecessária?

(b) Se a máquina se desregulou para $\mu = 500$g, qual é a probabilidade de se continuar a produção fora dos padrões desejados?

Solução

Com a máquina regulada, temos que $X \sim N(512,8; 100)$

(a) Parada desnecessária: amostra indica que o processo está fora de controle ($\overline{X} < 497$ ou $\overline{X} > 520$), quando, na verdade, o processo está ajustado ($\mu = 512,8$). Neste caso, podemos usar a notação de probabilidade condicional para auxiliar na solução do exercício. Queremos calcular

$$
\begin{aligned}
& P\left[\left(\overline{X} < 497\right) \cup \left(\overline{X} > 520\right) | \overline{X} \sim N\left(512,8; \tfrac{100}{4}\right)\right] \\
= \; & P\left[\overline{X} < 497 \,|\, \overline{X} \sim N(512,8; 25)\right] + P\left[\overline{X} > 520 \,|\, \overline{X} \sim N(512,8; 25)\right] \\
= \; & P\left(Z < \frac{497 - 512,8}{5}\right) + P\left(Z > \frac{520 - 512,8}{5}\right) \\
= \; & P(Z < -3,16) + P(Z > 1,44) \\
= \; & P(Z > 3,16) + P(Z > 1,44) \\
= \; & [0,5 - \text{tab}(3,16)] + [0,5 - \text{tab}(1,44)] \\
= \; & 1,0 - 0,49921 - 0,42507 \\
= \; & 0,07572
\end{aligned}
$$

(b) Agora queremos

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{P}\left[497 \le \overline{X} \le 520 \,|\, \overline{X} \sim N(500;25)\right] \\
= & \mathrm{P}\left(\frac{497-500}{5} \le Z \le \frac{520-500}{5}\right) \\
= & \mathrm{P}(-0,6 \le Z \le 4) \\
= & \mathrm{P}(-0,6 \le Z < 0) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 4) \\
= & \mathrm{P}(0 \le Z \le 0,6) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 4) \\
= & \mathrm{tab}(0,6) + \mathrm{tab}(4,0) \\
= & 0,72572
\end{aligned}
$$

Note que a probabilidade de uma parada desnecessária é pequena, à custa de uma alta probabilidade de se operar fora de controle.

2.2.3 Teorema Limite Central

Os resultados vistos anteriormente são válidos para populações normais, isto é, se uma população é normal com média μ e variância σ^2, então a distribuição amostral de $\overline{X}$ é também normal com média μ e variância σ^2/n, onde n é o tamanho da amostra. O Teorema Limite Central, que veremos a seguir, nos fornece um resultado análogo para qualquer distribuição populacional, desde que o tamanho da amostra seja suficientemente grande.

TEOREMA 2.3 ***Teorema Limite Central***

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples de uma população X tal que $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$. Então, a distribuição de $\overline{X}$ converge para a distribuição normal com média μ e variância σ^2/n quando $n \to \infty$. Equivalentemente,

$$
\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \longrightarrow N(0,1) \tag{2.4}
$$

A interpretação prática do Teorema Limite Central é a seguinte: para amostras “grandes” de qualquer população, podemos aproximar a distribuição amostral de $\overline{X}$ por uma distribuição normal com a mesma média populacional e variância igual à variância populacional dividida pelo tamanho da amostra. Quão grande deve ser a amostra para se obter uma boa aproximação depende das características da distribuição populacional. Se a distribuição populacional não se afastar muito de uma distribuição normal, a aproximação será boa, mesmo para tamanhos pequenos de amostra. Na Figura 2.5 ilustra-se esse teorema para uma distribuição exponencial com parâmetro $\lambda = 1$ (essa distribuição faz parte de uma outra família de distribuições contínuas). O gráfico superior representa a distribuição populacional e os histogramas representam a distribuição amostral de $\overline{X}$ ao longo de 5.000 amostras de tamanhos 10, 50, 100 e 5000. Assim, podemos ver que, embora a população seja completamente diferente da normal, a distribuição amostral de $\overline{X}$ vai se tornando cada vez mais próxima da normal à medida que n aumenta.

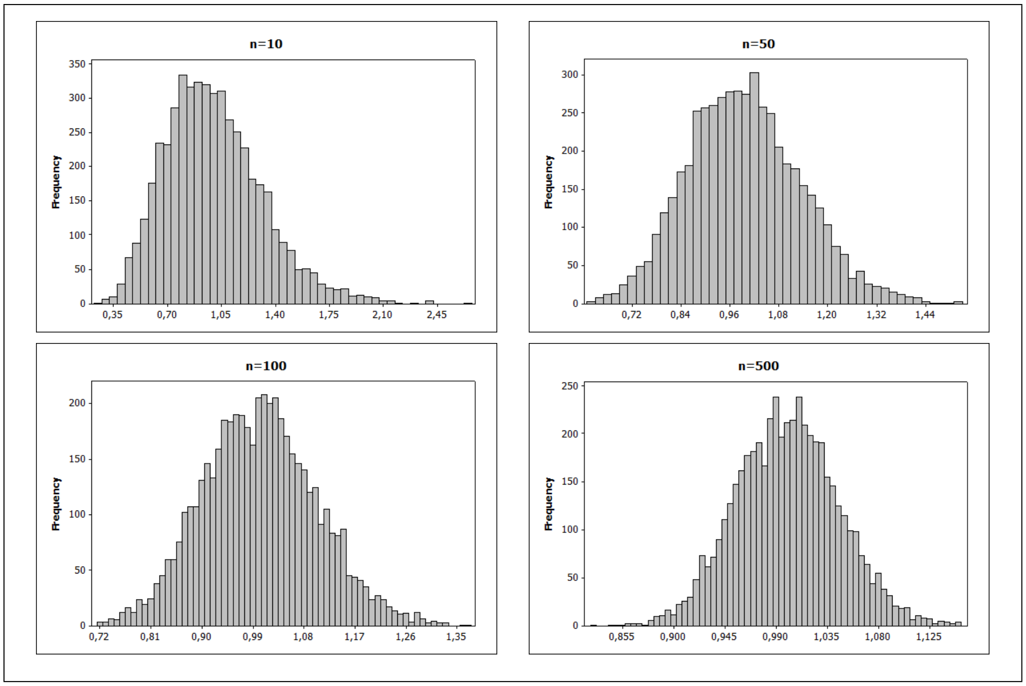


Figura 2.5 – Ilustração do Teorema Limite Central para uma população $X \sim exp(1)$

Em termos práticos, esse teorema é de extrema importância, por isso é chamado teorema central e, em geral, amostras de tamanho $n > 30$ já fornecem uma aproximação razoável.

EXEMPLO 2.5 Honestidade de uma moeda

Uma moeda é lançada 50 vezes, com o objetivo de se verificar sua honestidade. Se ocorrem 36 caras nos 50 lançamentos, o que podemos concluir?

Solução

Neste caso, a população pode ser representada por uma variável de Bernoulli X com parâmetro p, isto é, X assume o valor 1 com probabilidade p na ocorrência de cara e assume o valor 0 com probabilidade $1 - p$ na ocorrência de coroa. Para uma variável de Bernoulli, temos que $\mathrm{E}(X) = p$ e $\mathrm{Var}(X) = p(1 - p)$. Como são feitos 50 lançamentos, o tamanho da amostra é 50 (n grande!) e, pelo Teorema Limite Central, $\overline{X}$ é aproximadamente normal com média $\mathrm{E}(\overline{X}) = p$ e variância $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{p(1-p)}{50}$.

Suponhamos que a moeda seja honesta, isto é, que $p = 1/2$. Nessas condições, qual é a probabilidade de obtermos 36 caras em 50 lançamentos? Com a hipótese de honestidade da moeda, o Teorema Limite Central nos diz que

$$\overline{X} \sim N\left(\frac{1}{2}; \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{50}\right)$$

A probabilidade de se obter 36 ou mais caras em 50 lançamentos é equivalente à probabilidade de $\overline{X}$ ser maior ou igual a $\frac{36}{50} = 0,72$ e essa probabilidade é

$$\begin{aligned}
P(\overline{X} &\geq 0,72) = P\left(\frac{\overline{X}-0,5}{\sqrt{\frac{1}{200}}} \geq \frac{0,72-0,5}{\sqrt{\frac{1}{200}}}\right) \\
&= P(Z \geq 3,11) = 0,5 - P(0 \leq Z < 3,11) = \\
&= 0,5 - \text{tab}(3,11) = 0,5 - 0,49906 = 0,00094
\end{aligned}$$

Note que essa probabilidade é bastante pequena, ou seja, há uma pequena probabilidade de obtermos 36 ou mais caras em 50 lançamentos de uma moeda honesta. Isso pode nos levar a suspeitar sobre a honestidade da moeda!

♦♦

EXEMPLO 2.6 Garrafas de refrigerante

A divisão de inspeção do Departamento de Pesos e Medidas de uma determinada cidade está interessada em calcular a real quantidade de refrigerante que é colocada em garrafas de dois litros, no setor de engarrafamento de uma grande empresa de refrigerantes. O gerente do setor de engarrafamento informou à divisão de inspeção que o desvio padrão para garrafas de dois litros é de 0,05 litro. Uma amostra aleatória de 100 garrafas de dois litros, obtida deste setor de engarrafamento, indica uma média de 1,985 litro. Qual é a probabilidade de se obter uma média amostral de 1,985 ou menos, caso a afirmativa do gerente esteja certa? O que se pode concluir?

Solução

Afirmativa do gerente: $\mu = 2$ e $\sigma = 0,05$. Como $n = 100$, podemos usar o Teorema Limite Central. Logo, $\overline{X} \approx N\left(2; \frac{0,05^2}{100}\right)$.

$$\begin{aligned}
P(\overline{X} \leq 1,985) &= P\left(Z \leq \frac{1,985-2}{\frac{0,05}{10}}\right) \\
&= P(Z \leq -3,0) = P(Z \geq 3,0) \\
&= 0,5 - \text{tab}(3,0) = 0,5 - 0,49865 = 0,00135
\end{aligned}$$

A probabilidade de se obter esse valor nas condições dadas pelo gerente é muito pequena, o que pode nos fazer suspeitar da veracidade das afirmativas. é provável que ou a média não seja 2 (e, sim, menor que 2), ou o desvio padrão não seja 0,05 (e, sim, maior que 0,05).

♦♦

2.2.4 Aproximação normal da binomial

O Teorema Limite Central nos diz que, se X é uma população com média μ e variância σ^2, então a distribuição amostral da média de uma amostra aleatória simples de tamanho n se aproxima de uma distribuição normal com média μ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$ quando $n \to \infty$.

Usando as propriedades da média e da variância, podemos estabelecer esse teorema em termos de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, em vez de $\overline{X}$. Como $S_n = n\overline{X}$, então $E(S_n) = nE(\overline{X})$ e $Var(S_n) = n^2 Var(\overline{X})$; isso nos dá o seguinte resultado:

TEOREMA 2.4 ***Teorema Limite Central***

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples de uma população X tal que $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$. Então, a distribuição de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ converge para a distribuição normal com média $n\mu$ e variância $n\sigma^2$ quando $n \to \infty$.

A variável aleatória binomial foi definida como "número de sucessos em n repetições independentes de um experimento de Bernoulli com parâmetro p". Então, uma variável binomial é a soma de n variáveis independentes $Bern(p)$. Pelo teorema acima e usando o fato de que, se $X \sim Bern(p)$, então $E(X) = p$ e $Var(X) = p(1-p)$, podemos dizer que a distribuição binomial com parâmetros n e p se aproxima de uma normal com média np e variância $np(1-p)$ quando $n \to \infty$.

Alguns cuidados devem ser tomados na aproximação da binomial pela normal. Um fato importante a observar é que a distribuição binomial é discreta, enquanto a variável normal é contínua. Por exemplo, para uma variável binomial faz sentido calcular $\mathrm{P}(X = k)$, mas na normal, essa probabilidade é nula, qualquer que seja k. Assim, para usar a aproximação normal para calcular probabilidades da binomial, substituimos cada valor k possível na binomial pelo intervalo de valores $(k - 0,5; k + 0,5)$ na normal aproximadora. Note que o centro desse intervalo é o valor k da binomail. Por exemplo, para calcular $\mathrm{P}(X = 5)$, usando a aproximação normal calculamos $\mathrm{P}(4,5 < X < 5,5)$. Na tabela a seguir, resumimos o procedimento de aproximação da binomial pela normal, que está ilustrado na Figura 2.6; em ambos, temos $X \sim bin(n; p)$ e $Y \sim N[np; np(1-p)]$.

Binomial	Aproximação Normal
$\mathrm{P}(X = k)$	$\mathrm{P}(k - 0,5 \leq Y \leq k + 0,5)$
$\mathrm{P}(X \leq k)$	$\mathrm{P}(Y \leq k + 0,5)$
$\mathrm{P}(X < k) = \mathrm{P}(X \leq k - 1)$	$\mathrm{P}(Y \leq (k-1) + 0,5) = \mathrm{P}(Y \leq k - 0,5)$
$\mathrm{P}(X \geq k)$	$\mathrm{P}(Y \geq k - 0,5)$
$\mathrm{P}(X > k) = \mathrm{P}(X \geq k + 1))$	$\mathrm{P}(Y \geq (k+1) - 0,5) = \mathrm{P}(Y \geq k + 0,5)$

A aproximação dada pelo Teorema Limite Central é melhor para valores grandes de n. Existe a seguinte regra empírica para nos ajudar a decidir o que é "grande":

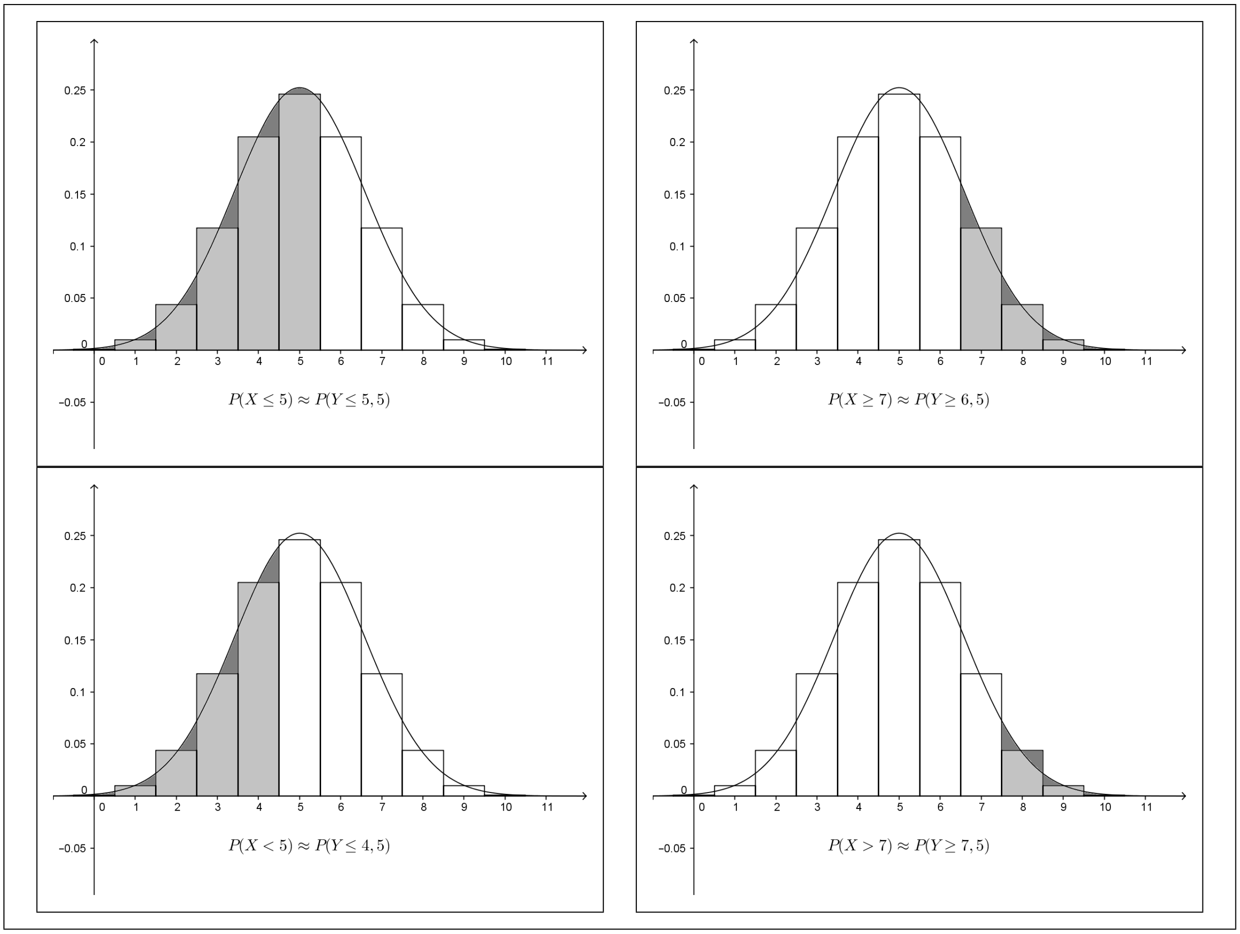


Figura 2.6 – Aproximação da distribuição $Bin(10; 0,5)$ pela $N(5; 2,5)$

! A distribuição binomial com parâmetros n e p pode ser aproximada por uma distribuição normal com média $\mu = np$ e variância $\sigma^2 = np(1-p)$ se são satisfeitas as seguintes condições:

1. $np \geq 5$
2. $n(1-p) \geq 5$

2.3 Distribuição amostral da proporção

Consideremos, agora, uma população em que cada elemento é classificado de acordo com a presença ou ausência de determinada característica. Por exemplo, podemos pensar em eleitores escolhendo entre dois candidatos, pessoas classificadas de acordo com o sexo, trabalhadores classificados como trabalhador com carteira assinada ou não, e assim por diante. Em termos de variável aleatória, essa população é representada por uma variável de Bernoulli, isto é:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se elemento possui a característica de interesse} \\ 0, & \text{se elemento não possui a caracaterística de interesse} \end{cases}$$

Vamos denotar por p a proporção de elementos da população que possuem a característica de interesse. Então,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X = 1) &= p \\ \mathrm{E}(X) &= p \\ \mathrm{Var}(X) &= p(1-p) \end{aligned}$$

Em geral, o parâmetro p é desconhecido e precisamos estimá-lo a partir de uma amostra, da mesma forma como fizemos no caso da média de uma população normal. Então, seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples de uma população $X \sim Bern(p)$. Sabemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\overline{X}) &= \mathrm{E}(X) = p \\ \mathrm{Var}(\overline{X}) &= \frac{\mathrm{Var}(X)}{n} = \frac{p(1-p)}{n} \end{aligned}$$

Mas, note que $\overline{X}$ nada mais é que a proporção dos elementos da amostra que possuem a característica de interesse, ou seja, $\overline{X}$ é a proporção amostral, que denotaremos por $\widehat{P}$. Resulta, então, que $\widehat{P}$ é um estimador não-viesado para a proporção populacional p.

Pelo Teorema Limite Central, se n for suficientemente grande, então

$$\overline{X} \approx N\left(p; \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

A aproximação dada pelo Teorema Limite Central será melhor para valores grandes de n. Existe uma seguinte regra empírica para nos ajudar a decidir o que é "grande", conforme explicado a seguir.

! Distribuição amostral da proporção amostral

Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória simples de uma população $X \sim Bern(p)$. Para n suficientemente grande, a distribuição da proporção amostral pode ser aproximada pela distribuição normal com média $\mu = p$ e variância $\sigma^2 = \dfrac{p(1-p)}{n}$, isto é,

$$\widehat{P} \approx N\left(p; \frac{p(1-p)}{n}\right) \tag{2.5}$$

Essa aproximação pode ser usada se as seguintes condições forem satisfeitas:

1. $np \geq 5$
2. $n(1-p) \geq 5$

EXEMPLO 2.7 Itens defeituosos num lote

De um grande lote de produtos manufaturados, extrai-se uma amostra aleatória simples de 200 itens. Se 10% dos itens do lote são defeituosos, calcule a probabilidade de serem sorteados no máximo 24 itens defeituosos.

Solução

As condições para utilização da aproximação normal são válidas, pois com $n = 200$ e $p = 0,1$ temos que:

$$\begin{aligned} 200 \times 0,1 &= 20 > 10 \\ 200 \times 0,9 &= 180 > 10 \end{aligned}$$

Ter no máximo 24 itens defeituosos na amostra equivale a ter uma proporção amostral de, no máximo, 0,12. Então, o problema pede

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\widehat{P} \leq 0,12) &= \mathrm{P}\left(\frac{\widehat{P} - 0,1}{\sqrt{\dfrac{0,1 \times 0,9}{200}}} \leq \frac{0,12 - 0,1}{\sqrt{\dfrac{0,1 \times 0,9}{200}}}\right) \\ &\approx \mathrm{P}(Z \leq 0,9428) = 0,5 + tab(0,94) = 0,8264 \end{aligned}$$

O valor exato é $\mathrm{P}(X \leq 24) = 0,855106$.

♦♦

EXEMPLO 2.8 Confiabilidade de componentes

A confiabilidade de um componente é a probabilidade de que ele funcione sob as condições desejadas. Uma amostra aleatória simples de 2500 desses componentes é extraída e cada componente testado. Calcule a probabilidade de obtermos pelo menos 75 itens defeituosos supondo que a confiabilidade do item seja:

(a) 0,995

(b) 0,85

Solução

Ter pelo menos 75 defeituosos é equivalente a ter uma proporção de defeituosos de pelo menos 0,03.

(a) Se a confiabilidade é 0,995, então a probabilidade de o item ser defeituoso é 0,005. Note que $2500 \times 0,005 = 12,5$ e $2500 \times 0,995 = 2487,5$ de modo que podemos usar a aproximação normal.

$$\begin{aligned} P(\widehat{P} \geq 0,03) &= P\left(\frac{\widehat{P} - 0,005}{\sqrt{\frac{0,005 \times 0,9995}{2500}}} \geq \frac{0,03 - 0,005}{\sqrt{\frac{0,005 \times 0,995}{25000}}}\right) \\ &\approx P(Z \geq 17,7) \approx 0 \end{aligned}$$

(b) Se a confiabilidade é 0,85, então a probabilidade de o item ser defeituoso é 0,15. Note que $2500 \times 0,15 = 375$ e $1.000 \times 0,85 = 2125$, de modo que podemos usar a aproximação normal.

$$\begin{aligned} P(\widehat{P} \geq 0,03) &= P\left(\frac{\widehat{P} - 0,15}{\sqrt{\frac{0,15 \times 0,85}{2500}}} \geq \frac{0,03 - 0,15}{\sqrt{\frac{0,15 \times 0,85}{2500}}}\right) \\ &\approx P(Z \geq -16,8) \approx 1 \end{aligned}$$

♦♦

2.4 Distribuição amostral da variância amostral

No capítulo anterior, consideramos dois estimadores para a variância: S^2 e $\widehat{\sigma}^2$. Através de um exemplo, vimos que $\widehat{\sigma}^2$ é um estimador viesado. Vamos demonstrar agora que S^2 é não-viesado para estimar a variância de uma população qualquer.

TEOREMA 2.5

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples extraída de uma população com N elementos e variância populacional

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2$$

em que $\mu = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} X_i$ é a média (esperança) populacional. Então

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

é um estimador não viesado para estimar σ^2.

Demonstração

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 &= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu + \mu - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - \mu) - \left(\overline{X} - \mu\right)\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{X} - \mu\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)\left(\overline{X} - \mu\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + n\left(\overline{X} - \mu\right)^2 - 2\left(\overline{X} - \mu\right)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + n\left(\overline{X} - \mu\right)^2 - 2\left(\overline{X} - \mu\right)\left(\sum_{i=1}^{n}X_i - n\mu\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + n\left(\overline{X} - \mu\right)^2 - 2\left(\overline{X} - \mu\right)\left(n\overline{X} - n\mu\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - n\left(\overline{X} - \mu\right)^2
\end{aligned}$$

Daí segue que

$$\begin{aligned}
E(S^2) &= E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right] = \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - n\left(\overline{X} - \mu\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i - \mu\right)^2 - nE\left(\overline{X} - \mu\right)^2\right]
\end{aligned}$$

Mas como $\mu = E(X_i) = E(\overline{X})$ e $E\left(X_i - \mu\right)^2 = Var(X_i) = \sigma^2$ e $E\left(\overline{X} - \mu\right)^2 = Var(\overline{X})$ resulta que

$$\begin{aligned} E(S^2) &= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) - nVar(\overline{X})\right] \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2 - \sigma^2\right) \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

e isso completa a prova.

■

Note que

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \\ \widehat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\widehat{\sigma}^2}{S^2} = \frac{n-1}{n} \Rightarrow \widehat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n}S^2 \Rightarrow \mathrm{E}(\widehat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

2.4.1 Populações normais

Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória simples extraída de uma po-pulação $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ então

$$\mathrm{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

2.5 Exercícios propostos

1. Uma amostra de tamanho $n = 18$ é extraída de uma população normal com média 15 e desvio padrão 2,5. Calcule a probabilidade de que a média amostral

   (a) esteja entre 14,5 e 16,0;

   (b) seja maior que 16,1.

2. Uma empresa produz parafusos em duas máquinas. O comprimento dos parafusos produzidos em ambas é aproximadamente normal com média de 20mm na primeira máquina e 25 mm na segunda máquina e desvio padrão comum de 4mm. Uma caixa com 16 parafusos, sem identificação, é encontrada e o gerente de produção determina

que, se o comprimento médio for maior que 23 mm, então a caixa será identificada como produzida pela máquina 2. Especifique os possíveis erros nessa decisão e calcule as suas probabilidades.

3. Definimos a variável $e = \overline{X} - \mu$ como sendo o *erro amostral* da média, onde $\overline{X}$ é a média de uma amostra aleatória simples de tamanho n de uma população com média μ e desvio padrão σ.

   (a) Determine $E(e)$ e $Var(e)$.

   (b) Se a população é normal com $\sigma = 20$, que proporção das amostras de tamanho 100 terá erro amostral absoluto maior do que 2 unidades?

   (c) Neste caso, qual deve ser o valor de δ para que $\mathrm{P}(|\, e\,| > \delta) = 0,01$?

   (d) Qual deve ser o tamanho da amostra para que 95% dos erros amostrais absolutos sejam inferiores a 1 unidade?

4. Uma fábrica produz parafusos especiais, para atender um determinado cliente, que devem ter comprimento de 8,5 cm. Como os parafusos grandes podem ser reaproveitados a um custo muito baixo, a fábrica precisa controlar apenas a proporção de parafusos pequenos. Para que o processo de produção atinja o lucro mínimo desejável, é necessário que a proporção de parafusos pequenos seja no máximo de 5%.

   (a) Supondo que a máquina que produz os parafusos o faça de modo que os comprimentos tenham distribuição normal com média μ e desvio padrão de 1,0 cm, em quanto deve ser regulada a máquina para satisfazer as condições de lucratividade da empresa?

   (b) Para manter o processo sob controle, é programada uma carta de qualidade. A cada hora será sorteada uma amostra de 4 parafusos e, se o comprimento médio dessa amostra for menor que 9,0 cm, o processo de produção é interrompido para uma nova regulagem da máquina. Qual é a probabilidade de uma parada desnecessária?

   (c) Se a máquina se desregulou de modo que o comprimento médio passou a ser 9,5 cm, qual é a probabilidade de se continuar o processo de produção fora dos padrões desejados?

5. A divisão de inspeção do Departamento de Pesos e Medidas de uma determinada cidade está interessada em calcular a real quantidade de refrigerante que é colocada em garrafas de 2 litros, no setor de engarrafamento de uma grande empresa de refrigerantes. O gerente do setor de engarrafamento informou à divisão de inspeção que o desvio padrão para garrafas de 2 litros é de 0,05 litro. Uma amostra aleatória de 100 garrafas de 2 litros, obtida deste setor de engarrafamento, indica uma média de 1,985 litro. Qual é a probabilidade de se obter uma média amostral de 1,985 ou menos, caso a afirmativa do gerente esteja certa? O que se pode concluir?

6. Em cada um dos exercícios abaixo, verifique que as condições para aproximação da binomial pela normal são satisfeitas e calcule a probabilidade pedida usando a aproximação normal.

   (a) $X \sim bin(18; 0,4)$ $\quad$ $\mathrm{P}(X \geq 15)$ e $\mathrm{P}(X < 2)$

   (b) $X \sim bin(40; 0,3)$ $\quad$ $\mathrm{P}(X < 10)$ e $\mathrm{P}(25 < X < 28)$

(c) $X \sim bin(65; 0,9)$ P($X = 58$) e P($60 < X \leq 63$)

(d) $X \sim bin(100; 0,2)$ P($25 \leq X \leq 35$)

(e) $X \sim bin(50; 0,2)$ P($X > 26$) e P($5 \leq X < 10$)

(f) $X \sim bin(50; 0,7)$ P($X \leq 25$)

(g) $X \sim bin(100; 0,5)$ P($42 < X \leq 56$)

(h) $X \sim bin(100; 0,5)$ P($X > 60$)

(i) $X \sim bin(20; 0,4)$ P($X = 5$)

(j) $X \sim bin(30; 0,3)$ P($X \geq 12$)

(k) $X \sim bin(80; 0,1)$ P($9 < X < 11$)

(l) $X \sim bin(30; 0,2)$ P($12 \leq X \leq 16$)

(m) $X \sim bin(50; 0,3)$ P($X > 18$)

(n) $X \sim bin(28; 0,2)$ P($X = 6$)

(o) $X \sim bin(95; 0,4)$ P($30 \leq X < 48$)

7. Em uma sondagem, perguntou-se a 1002 membros de determinado sindicato se eles haviam votado na última eleição para a direção do sindicato e 701 responderam afirmativamente. Os registros oficiais obtidos depois da eleição mostram que 61% dos membros aptos a votar de fato votaram. Calcule a probabilidade de que, dentre 1002 membros selecionados aleaoriamente, no mínimo 701 tenham votado, considerando que a verdadeira taxa de votantes seja de 61%. O que o resultado sugere?

8. Supondo que meninos e meninas sejam igualmente prováveis, qual é a probabilidade de nascerem 36 meninas em 64 partos? Em geral, um resultado é considerado não-usual se a sua probabilidade de ocorr ência é pequena, digamos, menor que 0,05. é não-usual nascerem 36 meninas em 64 partos?

9. Com base em dados históricos, uma companhia aérea estima em 15% a taxa de desistência entre seus clientes, isto é, 15% dos passageiros com reserva não aparecem na hora do vôo. Para otimizar a ocupação de suas aeronaves, essa companhia decide aceitar 400 reservas para os vôos em aeronaves que comportam apenas 350 passageiros. Calcule a probabilidade de que essa companhia não tenha assentos suficientes em um desses vôos. Essa probabilidade é alta o suficiente para a companhia rever sua política de reserva?

10. No controle de qualidade de produtos, uma técnica comumente utilizada é a *amostragem de aceitação*. Segundo essa técnica, um lote inteiro é rejeitado se contiver mais do que um número determinado de itens defeituosos. A companhia X compra parafusos de uma fábrica em lotes de 5000 e rejeita o lote se uma amostra aleatória simples de 20 parafusos contiver pelo menos 2 defeituosos. Se o processo de fabricação tem uma taxa de 10% de defeituosos, qual é a probabilidade de um lote ser rejeitado pela companhia X?

Capítulo 3

Intervalos de confiança baseados na distribuição normal

3.1 Ideias básicas sobre intervalos de confiança

O objetivo central da Inferência Estatística é obter informações para uma população a partir do conhecimento de uma única amostra. Em geral, a população é representada por uma variável aleatória X, com função de distribuição ou densidade de probabilidade f_X.

Dessa população, então, extrai-se uma amostra aleatória simples com reposição, que dá origem a um conjunto $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, todas com a mesma distribuição f_X. Se f_X depende de um ou mais parâmetros, temos de usar a informação obtida a partir da amostra para estimar esses parâmetros, de forma a conhecermos a distribuição.

Nos capítulos anteriores, por exemplo, vimos que a média amostral $\overline{X}$ é um bom estimador da média populacional μ, no sentido de que ela tende a "acertar o alvo" da verdadeira média populacional. Mas vimos, também, que existe uma variabilidade nos valores de $\overline{X}$, ou seja, cada possível amostra dá origem a um valor diferente do estimador.

Na prática, temos apenas uma amostra e, assim, é importante que se dê alguma informação sobre essa possível variabilidade do estimador. Ou seja, é importante informar o valor do estimador $\widehat{\theta}$ obtido com uma amostra específica, mas é importante informar também que o verdadeiro valor do parâmetro θ poderia estar em um determinado intervalo, digamos, no intervalo $[\widehat{\theta} - \epsilon, \widehat{\theta} + \epsilon]$. Dessa forma, informamos a nossa *margem de erro* no processo de estimação; essa margem de erro é consequência do processo de seleção aleatória da amostra.

O que vamos estudar agora é como obter esse intervalo, de modo a "acertar na maioria das vezes", isto é, queremos um procedimento que garanta que, na maioria das vezes (ou das amostras possíveis), o intervalo obtido conterá o verdadeiro valor do parâmetro. A expressão "na maioria das vezes" será traduzida como "probabilidade alta". Veja a Figura 3.1: aí os intervalos são representados pelas linhas horizontais e podemos ver que 2 deles não "acertam o alvo", no sentido de não conterem o verdadeiro valor do parâmetro θ, representado pela linha vertical.

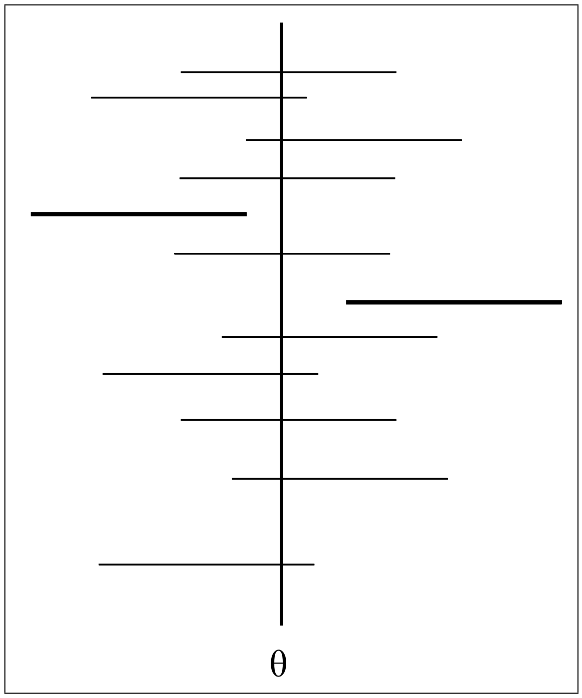


Figura 3.1 – Interpretação dos intervalos de confiança

! **Intervalo de confiança**

Com probabilidade alta (em geral, indicada por $1 - \alpha$), o intervalo

$$\left[\widehat{\theta} - \text{erro}; \widehat{\theta} + \text{erro}\right]$$

conterá o verdadeiro valor do parâmetro θ, ou seja, o procedimento de construção garante uma alta probabilidade $(1-\alpha)$ de se obter um intervalo que contenha o verdadeiro valor do parâmetro.

$1 - \alpha$ é chamado *nível de confiança*, enquanto o valor α é conhecido como *nível de significância*. O intervalo $\left[\widehat{\theta} - \text{erro}; \widehat{\theta} + \text{erro}\right]$ é chamado de *intervalo de confiança* de nível $1 - \alpha$.

Tendo clara a interpretação do intervalo de confiança, podemos resumir a frase acima da seguinte forma:

$$\mathrm{P}\left(\theta \in \left[\widehat{\theta} - \epsilon; \widehat{\theta} + \epsilon\right]\right) = 1 - \alpha \tag{3.1}$$

Mais uma vez, a probabilidade se refere à probabilidade dentre as diversas possíveis amostras, ou seja, a probabilidade está associada à distribuição amostral de $\widehat{\theta}$. Note que os limites do intervalo dependem de $\widehat{\theta}$, que depende da amostra sorteada, ou seja, os limites do intervalo de confiança são *variáveis aleatórias*. Cada amostra dá origem a um intervalo diferente, mas o procedimento de obtenção dos intervalos garante probabilidade $1 - \alpha$ de "acerto".

EXEMPLO 3.1 Interpretando um intervalo de confiança

Em um estudo sobre o Índice de Massa Corporal (IMC), foi reportado o seguinte intervalo de confiança de 95% para o IMC médio μ de determinada população, com base em uma amostra de 650 mulheres: $[26,8 - 0,6; 26,8 + 0,6]$. O que podemos dizer e o que não podemos dizer com base nesse intervalo?

Solução

O que definitivamente *não podemos dizer* é que há uma probabilidade de 0,95 de μ, o verdadeiro IMC médio populacional, estar no intervalo dado. Note que o intervalo dado é um único intervalo – ou μ está no intervalo ou μ não está no intervalo e não temos como saber qual é verdade. O que interessa é que apenas uma dessas afirmativas é verdadeira com probabilidade 1 e a outra, portanto, não pode acontecer.

O que *podemos dizer* sobre o intervalo dado é que ele foi gerado a partir de uma amostra específica com um método que tem 95% de chance de gerar intervalos análogos, baseados em outras amostras, que conterão o parâmetro populacional μ.

♦♦

3.1.1 Valores críticos da distribuição normal padrão

No estudo da Inferência Estatística, é comum a utilização de abscissas de distribuições de probabilidade que delimitam eventos com pequena probabilidade de ocorrência. Tais abscissas recebem o nome especial de *valor crítico*, cuja definição para o caso da distribuição normal, ilustrada na Figura 3.2, é dada a seguir.

DEFINIÇÃO Valor crítico da distribuição normal

O valor crítico da distribuição normal referente ao nível de significância α é a abscissa z_α que deixa probabilidade (área) α acima dela, isto é:

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha \tag{3.2}$$

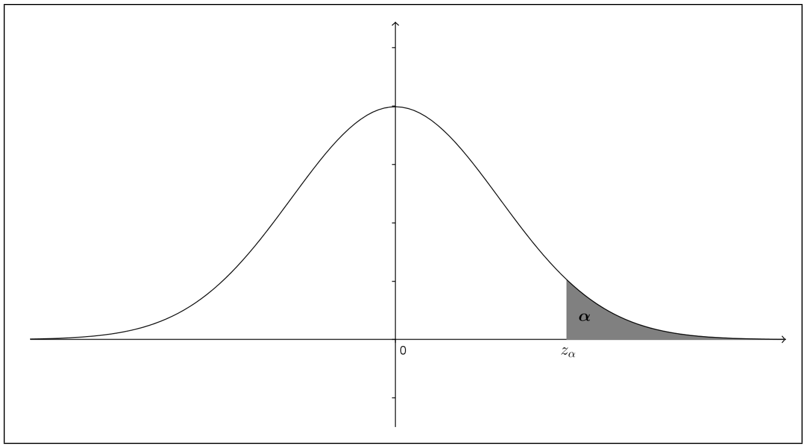


Figura 3.2 – Valor crítico z_α da $N(0;1)$

3.2 Intervalo de confiança para a média de uma população normal com variância conhecida

Vamos agora, introduzir os métodos para obtenção do intervalo de confiança para a média de uma população. Como visto, a média populacional é um parâmetro importante, que pode ser muito bem estimado pela média amostral $\overline{X}$. Para apresentar as ideias básicas, vamos considerar um contexto que é pouco frequente na prática. O motivo para isso é que, em termos didáticos, a apresentação é bastante simples. Como o fundamento é o mesmo para contextos mais gerais, essa abordagem se justifica.

Consideremos, então, uma população descrita por uma variável aleatória normal com média μ e variância σ^2 : $X \sim N(\mu;\sigma^2)$. Vamos supor que o valor de σ^2 seja conhecido e que nosso interesse seja estimar a média μ a partir de uma amostra aleatória simples $X_1, X_2, \dots, X_n$. Como visto no Capítulo 4.1, a distribuição amostral de $\overline{X}$ é normal com média μ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$, ou seja

$$X \sim N\left(\mu;\sigma^2\right) \Longrightarrow \overline{X} \sim N\left(\mu;\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Da definição de distribuição amostral, isso significa que os diferentes valores de $\overline{X}$ obtidos a partir das diferentes possíveis amostras se distribuem normalmente em torno de μ com variância $\frac{\sigma^2}{n}$.

Das propriedades da distribuição normal, resulta que

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0;1)$$

ou equivalentemente,

$$Z = \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \sim N(0;1) \tag{3.3}$$

Consideremos, agora, o valor crítico $z_{\alpha/2}$, conforme ilustrado na Figura 3.3. Daí podemos ver que, se $Z \sim N(0;1)$, então

$$\mathrm{P}\left(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \tag{3.4}$$

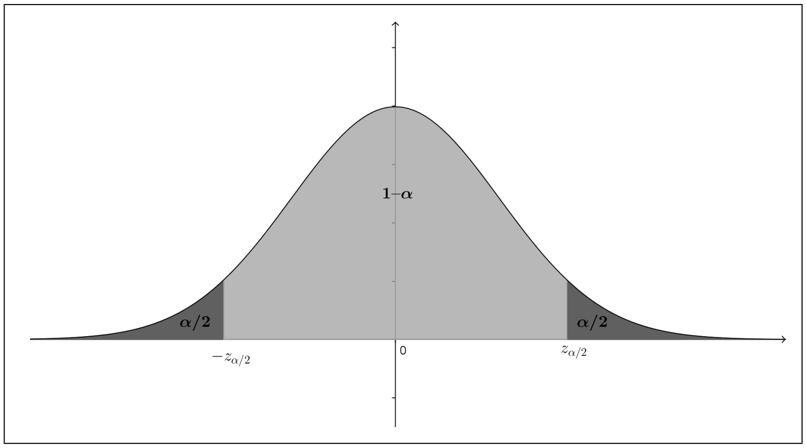


Figura 3.3 – Valor crítico $z_{\alpha/2}$ da $N(0;1)$

Note que isso vale para a distribuição normal padrão, em geral. Então, usando os resultados das Equações 3.3 e 3.4, obtemos que

$$\mathrm{P}\left(-z_{\alpha/2} \leq \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Mas isso é equivalente a

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} - \mu \leq z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= 1 - \alpha \Longleftrightarrow \\
\mathrm{P}\left(-\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq -\mu \leq -\overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= 1 - \alpha \Longleftrightarrow \\
\mathrm{P}\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= 1 - \alpha
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Note a última expressão; ela nos diz que

$$\mathrm{P}\left(\mu \in \left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\,\overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1 - \alpha$$

Mas essa é exatamente a forma geral de um intervalo de confiança, conforme explicitado na Equação 3.1. Temos, então, a seguinte conclusão:

DEFINIÇÃO **Intervalo de confiança para a média de uma população normal com variância conhecida**

Seja $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ uma população, tal que a variância σ^2 é conhecida. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória simples dessa população, então o intervalo de confiança de nível de confiança $1-\alpha$ para a média populacional μ é dado por

$$\left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\,\overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \tag{3.6}$$

O intervalo de confiança para μ pode ser escrito na forma $[\overline{X}-\epsilon; \overline{X}+\epsilon]$ onde $\epsilon = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ é a margem de erro. Como visto, essa margem de erro está associada ao fato de que diferentes amostras fornecem diferentes valores de $\overline{X}$ cuja média é igual a μ. As diferentes amostras fornecem diferentes intervalos de confiança, mas uma proporção de $100 \times (1-\alpha)\%$ desses intervalos irá conter o verdadeiro valor de μ. Note que aqui é fundamental a interpretação de probabilidade como frequência relativa: estamos considerando os diferentes intervalos que seriam obtidos, caso sorteássemos todas as possíveis amostras. Assim, o nível de confiança está associado à confiabilidade do processo de obtenção do intervalo: esse processo é tal que acertamos (isto é, o intervalo contém μ) em $100 \times (1-\alpha)\%$ das vezes.

Na prática, temos apenas *uma* amostra e o intervalo obtido com essa amostra específica, ou contém ou não contém o verdadeiro valor de μ. A afirmativa

$$\mathrm{P}\left(\mu \in \left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\,\overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1-\alpha$$

é válida porque ela envolve a variável aleatória $\overline{X}$, que tem diferentes valores para as diferentes amostras. Quando substituímos o estimador $\overline{X}$ por uma estimativa específica $\overline{x}$ obtida a partir de uma amostra particular, temos apenas um intervalo e não faz mais sentido falar em probabilidade.

EXEMPLO 3.2 Pesos de homens adultos

Em determinada população, o peso dos homens adultos é distribuído normalmente com um desvio padrão de 16kg. Uma amostra aleatória simples de 36 homens adultos é sorteada desta população, obtendo-se um peso médio de 78,2kg. Construa um intervalo de confiança de nível de confiança 0,95 para o peso médio de todos os homens adultos dessa população.

Solução

Vamos incialmente determinar o valor crítico associado ao nível de confiança de 0,95. Como $1-\alpha = 0,95$, resulta que $\alpha = 0,05$ e $\alpha/2 = 0,025$.

Analisando a Figura 3.3, vemos que nas duas caudas da distribuição normal padrão temos de ter 5% da área; logo, em cada cauda temos de ter 2,5% da área total. Em termos da Tabela 1 da distribuição normal padrão, isso significa que entre 0 e $z_{0,025}$ temos de ter $(50 - 2,5)\% = 47,5\%$ e, assim, temos de procurar no corpo da tabela o valor de 0,475 para determinar a abscissa $z_{0,025}$. Veja a Figura 3.4.

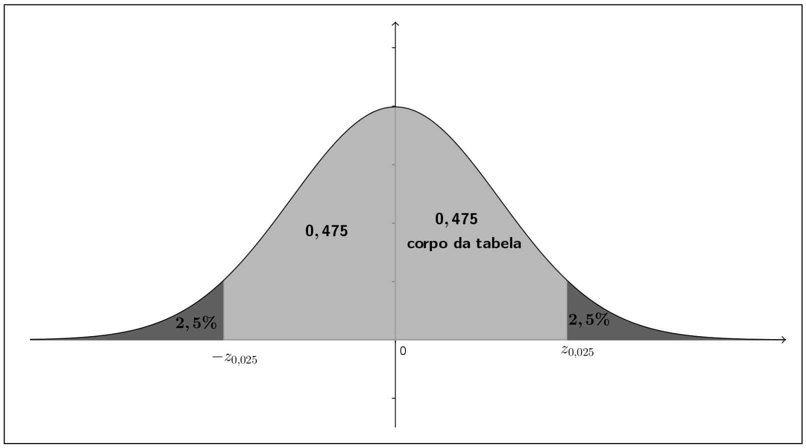


Figura 3.4 – Valor crítico $z_{0,025}$ da $N(0; 1)$

Procurando no corpo da tabela da distribuição normal padrão, vemos que o valor 0,475 corresponde à abscissa $z_{0,025} = 1,96$. Logo, nosso intervalo de confiança é

$$\left[78,2 - 1,96 \times \frac{16}{\sqrt{36}}\,;\;\; 78,2 + 1,96 \times \frac{16}{\sqrt{36}}\right] = [72,9733\,;\;\; 83,4267]$$

Esse intervalo contém ou não o verdadeiro valor de μ, mas o procedimento utilizado para sua obtenção nos garante que há 95% de chance de estarmos certos.

♦♦

3.2.1 Margem de erro

Vamos, agora, analisar a margem de erro do intervalo de confiança para a média de uma população normal com variância conhecida. Ela é dada por

$$\epsilon = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{3.7}$$

Lembrando que o erro padrão é o desvio padrão do estimador, podemos escrever

$$\epsilon = z_{\alpha/2}\,\mathrm{EP}_{\overline{X}} \tag{3.8}$$

Analisando a equação (3.7), vemos que a margem de erro depende diretamente do valor crítico e do desvio padrão populacional e é inversamente proporcional à raiz quadrado do tamanho da amostra.

Na Figura 3.5 ilustra-se a relação de dependência da margem de erro com o desvio padrão populacional σ. Temos duas distribuições amostrais centradas na mesma média e baseadas em amostras de mesmo tamanho. Nas duas distribuições, a área total das caudas sombreadas é α, de modo que o intervalo limitado pelas linhas verticais é o intervalo de confiança de nível $1 - \alpha$, ou seja, a área central em ambas distribuições é $1 - \alpha$. Para a distribuição mais dispersa, isto é, com σ maior, o comprimento do intervalo é maior. Esse resultado deve ser intuitivo: se há mais variabilidade na população, a nossa margem de erro tem de ser maior, mantidas fixas as outras condições (tamanho de amostra e nível de confiança).

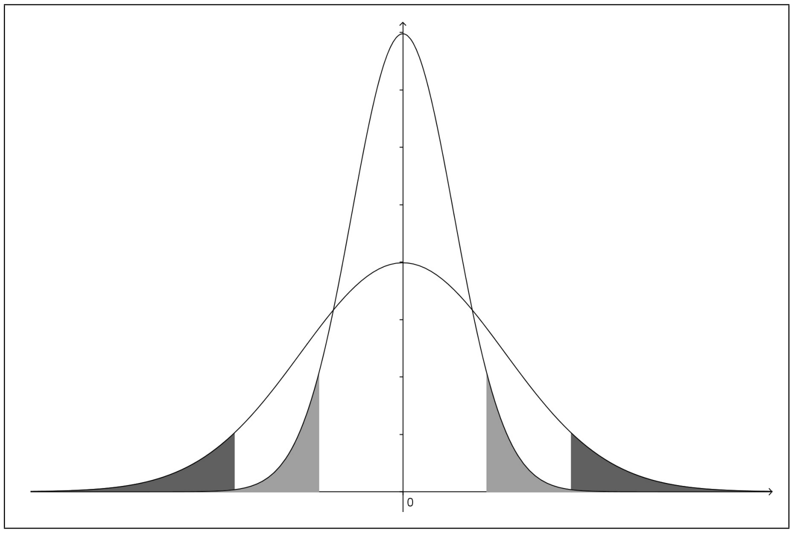


Figura 3.5 – Margem de erro versus dispersão populacional: $\sigma_1 < \sigma_2 \Rightarrow \epsilon_1 < \epsilon_2$

Por outro lado, se mantivermos fixos o tamanho da amostra e o desvio padrão populacional, é razoável, também, que a margem de erro seja maior para um nível de confiança maior. Ou seja, se queremos aumentar a probabilidade de acerto, é razoável que o intervalo seja maior. Aumentar a probabilidade de acerto significa aumentar o nível de confiança, o que acarreta em um valor crítico $z_{\alpha/2}$ maior. Veja a **Figura 3.6**, onde ilustra-se o intervalo de confiança para dois níveis de confiança diferentes: $1 - \alpha_1 > 1 - \alpha_2$. O primeiro intervalo é maior, refletindo o maior grau de confiança.

Finalmente, mantidos o mesmo desvio padrão populacional e o mesmo nível de confiança, quanto maior o tamanho da amostra, menor será a margem de erro, mas a redução da margem de erro depende de $\sqrt{n}$; assim, para reduzir a margem de erro pela metade, teremos que quadruplicar o tamanho da amostra:

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n'} = 2\sqrt{n} \Rightarrow n' = 4n$$

EXEMPLO 3.3 Resultados de pesquisa

Na divulgação dos resultados de uma pesquisa, publicou-se o seguinte texto (dados fictícios):

Com o objetivo de se estimar a média de uma população, estudou-se uma amostra de tamanho $n = 45$. De estudos anteriores, sabe-se que essa população é muito

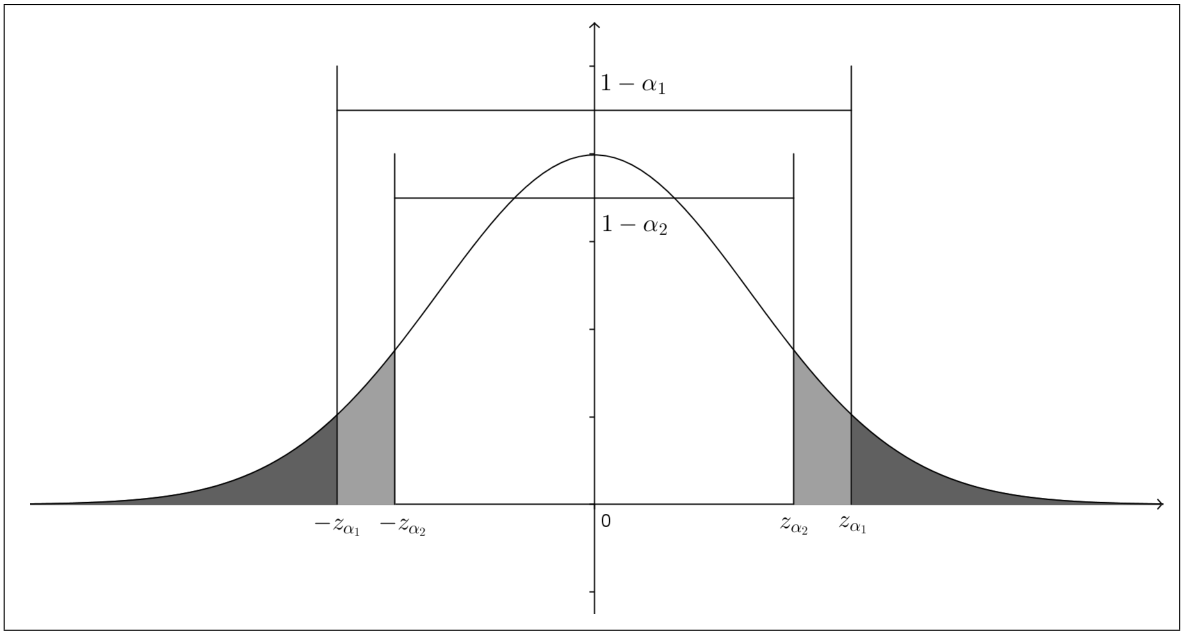


Figura 3.6 – Margem de erro versus nível de confiança: $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow (1-\alpha_1) > (1-\alpha_2) \Rightarrow \epsilon_1 > \epsilon_2$

bem aproximada por uma distribuição normal com desvio padrão 3, mas acredita-se que a média tenha mudado desde esse último estudo. Com os dados amostrais obteve-se o intervalo de confiança $[1,79; 3,01]$,.

Quais são o as informações importantes que não foram divulgadas? Como podemos obtê-las?

Solução

Quando se divulga um intervalo de confiança para um certo parâmetro, é costume publicar também a estimativa pontual. Nesse caso, temos que informar a média amostral $\overline{x}$, que pode ser achada observando-se que o intervalo de confiança é simétrico em torno de $\overline{x}$. Logo, $\overline{x}$ é o ponto médio do intervalo:

$$\overline{x} = \frac{1,79 + 3,01}{2} = 2,4$$

Daí conclui-se que a margem de erro é $\epsilon = 2,4 - 1,79 = 0,61$. Outra informação importante é o nível de confiança, que deve ser encontrado a partir da abscissa $z_{\alpha/2}$ na margem de erro:

$$0,61 = z_{\alpha/2} \times \frac{3}{\sqrt{45}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0,61 \times \sqrt{45}}{3} = 1,36$$

Consultando a tabela da distribuição normal, vemos que $tab(1,36) = 0,4131$. Logo, o nível de confiança é $2 \times 0,4131 = 0,8262 \approx 0,83$. Veja a Figura 3.7.

♦♦

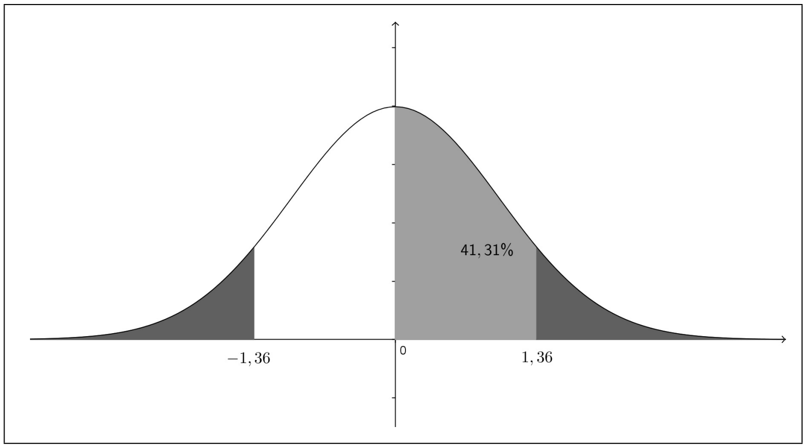


Figura 3.7 – Determinação do nível de confiança

3.3 Intervalo de confiança para uma proporção

O procedimento de construção do intervalo de confiança para a proporção populacional é totalmente análogo ao do intervalo de confiança para a média de uma população normal com variância conhecida, visto anteriormente.

No Capítulo 2, vimos que, para amostras grandes,

$$\widehat{P} \approx N\left(p; \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

Sendo assim, é verdade que

$$\mathrm{P}\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\widehat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha$$

e, portanto

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \widehat{P} - p \leq z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) &= 1-\alpha \Longrightarrow \\
\mathrm{P}\left(-\widehat{P} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq -p \leq -\widehat{P} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) &= 1-\alpha \Longrightarrow \\
\mathrm{P}\left(\widehat{P} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \widehat{P} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) &= 1-\alpha
\end{aligned}$$

Como no caso da média, chegamos a uma expressão do seguinte tipo:

$$\mathrm{P}\left(\widehat{P} - \epsilon \leq p \leq \widehat{P} + \epsilon\right) = 1 - \alpha$$

que é a expressão de um intervalo de confiança de nível de confiança $1 - \alpha$ para a proporção populacional. Mas note que a margem de erro, neste caso, é

$$\epsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

e depende de p, o parâmetro de interesse. Sendo assim, temos de obter alguma estimativa para p para podermos construir o intervalo de confiança; essa estimativa pode vir de estudos anteriores, de informações de especialistas ou, então, da própria amostra usada para construir o intervalo de confiança. Vamos denotar essa estimativa por $\widehat{p}_0$.

DEFINIÇÃO **Intervalo de confiança para uma proporção populacional**

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples de uma população $X \sim Bern(p)$. Para n suficientemente grande, o intervalo de confiança aproximado para p de nível de confiança $1 - \alpha$ é dado por

$$\left[\widehat{P} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}_0(1-\widehat{p}_0)}{n}} \quad ; \quad \widehat{P} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}_0(1-\widehat{p}_0)}{n}}\right]$$

onde $\widehat{p}_0$ é uma estimativa de p e $z_{\alpha/2}$ é o valor crítico da distribuição normal associado ao nível de significância α.
Essa aproximação pode ser usada se o número de sucessos e o número de fracassos na amostra forem ambos maiores ou iguais a 15.

EXEMPLO 3.4 Linha de produção

Um gerente de produção deseja estimar a proporção de peças defeituosas em uma de suas linhas de produção. Para isso, ele seleciona uma amostra aleatória simples de 100 peças dessa linha de produção, obtendo 30 defeituosas. Determine o intervalo de confiança para a verdadeira proporção de peças defeituosas nessa linha de produção a um nível de significância de 5%.

Solução

O primeiro fato a observar é que a amostra é grande, com sucessos e fracassos suficientes. Com um nível de significância de $\alpha = 0,05$, o nível de confiança é $1 - \alpha = 0,95$ e, da tabela da normal padrão, obtemos que $z_{\alpha/2} = 1,96$. Como não temos estimativa prévia da proporção de defeituosas p, temos de usar a proporção amostral $\widehat{p} = 0,30$. Assim, a margem de erro é

$$\epsilon = 1,96 \times \sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{100}} = 0,0898$$

e o intervalo de confiança é

$$[0,30 - 0,0898; 0,30 + 0,0898] = [0,2102; 0,3898]$$

♦♦

3.3.1 Margem de erro

Assim como no caso da média da população normal, a margem de erro do intervalo de confiança para uma proporção populacional pode ser escrita como

$$\epsilon = z_{\alpha/2}\widehat{\mathrm{EP}}_{\widehat{P}}$$

A diferença fundamental aqui é que temos de estimar o erro padrão como

$$\widehat{\mathrm{EP}}_{\widehat{P}} = \sqrt{\frac{\widehat{p}_0(1 - \widehat{p}_0)}{n}}$$

enquanto no contexto da população normal com variância conhecida, o erro padrão era conhecido e igual a

$$\mathrm{EP}_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Mas em ambos os casos, a margem de erro será maior para níveis de confiança maiores e para populações mais dispersas e pode ser diminuída aumentando-se o tamanho da amostra.

Na Figura 3.8 temos o gráfico da função $f(p) = p(1 - p)$ para $p \in [0,1]$. Note que o máximo da função é atingido quando $p = 0,5$; então, mantidos o nível de confiança e o tamanho da amostra fixos, a margem de erro será máxima quando $p = 0,5$ e, nesse caso, teremos o maior intervalo de confiança possível. Essa é uma abordagem conservadora, que pode ser usada quando não se tem qualquer conhecimento sobre o valor p para gerar uma estimativa razoável $\widehat{p}_0$.

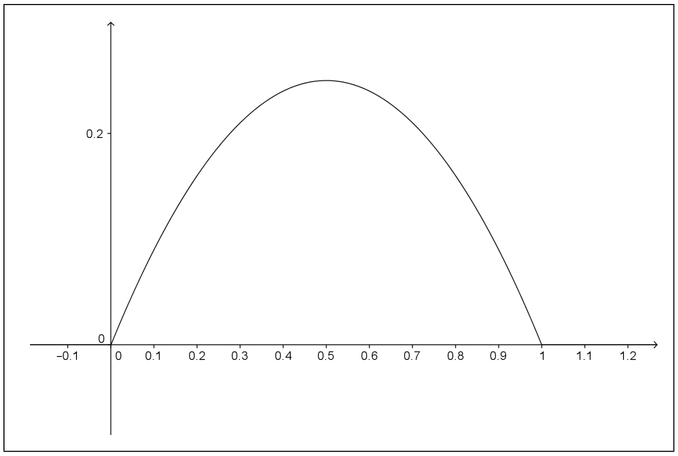


Figura 3.8 – gráfico de $f(p) = p(1-p)$

3.4 Determinação do tamanho da amostra

No planejamento de pesquisas, é importante ter-se uma ideia do tamanho de amostra necessário. Nos contextos abordados aqui, isso pode ser feito especificando-se a margem de erro e o nível de confiança desejados.

Para estimação da média de uma população nomal com variência conhecida, temos

$$\epsilon = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{n} = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\epsilon} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\epsilon}\right)^2 \tag{3.9}$$

Para estimação de uma proporção populacional, temos

$$\epsilon = z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\widehat{p}_0(1-\widehat{p}_0)}}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{n} = z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\widehat{p}_0(1-\widehat{p}_0)}}{\epsilon} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\widehat{p}_0(1-\widehat{p}_0)}}{\epsilon}\right)^2 \tag{3.10}$$

Trabalhando com o pior cenário, isto é, com $p = 0,5$, essa fórmula se simplifica para

$$n = \left(z_{\alpha/2}\frac{0,5}{\epsilon}\right)^2 \Longrightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{2\epsilon}\right)^2 \tag{3.11}$$

EXEMPLO 3.5 Tamanho de amostra

De uma população normal com variância 25 extrai-se uma amostra aleatória simples de tamanho n com o objetivo de se estimar a média populacional μ com um nível de confiança de 90% e margem de erro de 2. Qual deve ser o tamanho da amostra?

Solução

Para um nível de confiança 0,90, o valor do nível de significância é $\alpha = 0,10$. Então, na cauda superior da distribuição normal padrão temos que ter uma área (probabilidade) de 0,05 e, portanto, para encontrarmos o valor de $z_{0,05}$ temos que procurar no corpo da tabela o valor 0,45 (se necessário, consulte a Figura 3.4). Resulta que $z_{0,05} = 1,64$. Temos, então, todos os valores necessários:

$$2 = 1,64 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1,64 \times 5}{2} = 4,1 \Rightarrow n = 16,71$$

Como o valor de n tem de ser um inteiro, uma estimativa apropriada é $n = 17$ (devemos arredondar para cima para garantir um nível de confiança no mínimo igual ao desejado). ♦♦

EXEMPLO 3.6 Lançamento de um novo produto

Para estudar a viabilidade de lançamento de um novo produto no mercado, o gerente de uma grande empresa contrata uma firma de consultoria estatística para estudar a aceitação do produto entre os clientes potenciais. O gerente deseja obter uma estimativa com erro máximo de 1% com probabilidade de 80% e pede ao consultor estatístico que forneça o tamanho de amostra necessário.

(a) De posse das informações dadas, o consultor calcula o tamanho da amostra necessário no pior cenário. O que significa "pior cenário" nesse caso? Qual o tamanho de amostra obtido pelo consultor?

(b) O gerente acha que o custo de tal amostra seria muito alto e autoriza o consultor a realizar um estudo piloto com uma amostra de 100 pessoas para obter uma estimativa da verdadeira proporção. O resultado desse estudo piloto é uma estimativa $\widehat{p} = 0,76$ de aceitação do novo produto. Com base nessa estimativa, o consultor recalcula o tamanho da amostra necessário. Qual é esse tamanho?

(c) Selecionada a amostra com o tamanho obtido no item anterior, obteve-se uma proporção de 72% de clientes favoráveis ao produto. Construa um intervalo de confiança para a verdadeira proporção com nível de confiança de 90%.

Solução

(a) O pior cenário é quando a população está dividida meio-a-meio em suas preferências, ou seja, quando $p = 0,5$. Com nível de confiança de 80%, obtemos $z_{0,10} = 1,28$ – essa abscissa deixa 10% em cada cauda da distribuição normal padrão. Nesse caso,

$$0,01 = 1,28 \times \sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{1,28}{0,01}\right)^2 \times 0,25 = 4096$$

(b) Vamos agora utilizar $\widehat{p} = 0,76$:

$$0,01 \quad = \quad 1,28 \times \sqrt{\frac{0,76 \times 0,24}{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{1,28}{0,01}\right)^2 \times 0,76 \times 0,24 = 2988,4$$

ou seja, $n = 2989$.

(c) $1 - \alpha = 0,90 \Longrightarrow z_{0,05} = 1,64$ – essa abscissa deixa 5% em cada cauda da distribuição normal padrão.

$$\epsilon = 1,64 \times \sqrt{\frac{0,72 \times 0,28}{2989}} = 0,0135$$

e o intervalo de confiança é

$$[0,72 - 0,0135; 0,72 + 0,0135] = [0,7065; 0,7335]$$

♦♦

3.5 Exercícios propostos

1. Encontre os valores críticos da normal padrão correspondentes aos seguintes níveis de confiança $1 - \alpha = 0,90; 0,99; 0,80$.

2. Encontre o nível de confiança correspondente aos seguintes valores críticos $z_{\alpha/2} = 1,28; 1,80$.

3. De uma população normal com desvio padrão 2, extrai-se uma amostra aleatória simples de tamanho 36, que fornece o seguinte resultado: $\sum_{i=1}^{36} x_i = 1236$. Calcule o intervalo de confiança para a média populacional μ, utilizando o nível de significância $\alpha = 2\%$.

4. Considere os dois intervalos de confiança a seguir, obtidos a partir de uma mesma amostra de uma população $N(\mu; 16)$. Sem fazer qualquer cálculo, identifique para qual deles o nível de confiança é maior.

$$[13,04; 16,96]$$
$$[12,42; 17,58]$$

5. Obtido um intervalo de confiança para a média de uma $N(\mu; 25)$, o que deve ser feito para se reduzir a margem de erro pela metade se não devemos alterar o nível de confiança?

6. De uma população $N(\mu; 9)$ extrai-se uma amostra aleatória simples de tamanho 25, obtendo-se $\sum_{i=1}^{25} x_i = 60$. Desenvolva detalhadamente o intervalo de confiança de nível de confiança 99% para a média da população.

7. Determine o tamanho da amostra necessário para se estimar a média de uma população normal com $\sigma = 4,2$ para que, com confiança de 95%, o erro máximo de estimação seja $\pm 0,05$.

8. O peso X de um certo artigo é descrito aproximadamente por uma distribuição normal com $\sigma = 0,58$. Uma amostra de tamanho $n = 25$ resultou em $\overline{x} = 2,8$. Desenvolva detalhadamente o intervalo de confiança de nível de confiança 0,90.

9. De uma população normal com $\sigma = 5$, retira-se uma amostra aleatória simples de tamanho 50, obtendo-se $\overline{x} = 42$.

(a) Obtenha o intervalo de confiança para a média com nível de significância de 5%.

(b) Qual é o erro de estimação?

(c) Para que o erro seja ≤ 1, com probabilidade de acerto de 95%, qual deverá ser o tamanho da amostra?

10. Os valores da venda mensal de determinado artigo têm distribuição aproximadamente normal com desvio padrão de R\$500,00. O gerente da loja afirma vender, em média, R\$34.700,00. O dono da loja, querendo verificar a veracidade de tal afirmativa, seleciona uma amostra aleatória das vendas em determinado mês, obtendo os seguintes valores:

33840,00	32960,00	41815,00	35060,00	35050,00
32940,00	32115,00	32740,00	33590,00	33010,00

(a) Obtenha o intervalo de confiança para a venda média mensal com nível de significância de 5%.

(b) Obtenha o intervalo de confiança para a venda média mensal com nível de significância de 1%.

(c) Em qual dos dois níveis de significância podemos afirmar que o gerente se baseou para fazer a afirmativa?

11. Construa um intervalo de confiança para a proporção populacional para cada um dos casos listados a seguir:

(a) $n = 600 \qquad \alpha = 2\%$
Número de "sucessos" na amostra = 128

(b) $n = 1200 \qquad \alpha = 10\%$
Número de "sucessos" na amostra = 710
Estimativa prévia $\widehat{p}_0 = 55\%$

12. Uma amostra de 300 habitantes de uma grande cidade revelou que 180 desejavam a fluoração da água. Encontre o intervalo de confiança para a verdadeira proporção dos que não desejam a fluoração da água para

(a) um nível de significância de 5%;

(b) um nível de confiança de 96%.

13. Querendo estimar a proporção de peças defeituosas em uma linha de produção, examinou-se uma amostra de 100 peças, encontrando-se 32 defeituosas. Sabe-se que o estimador $\widehat{P}$ para esse tamanho de amostra tem desvio padrão de 3%. Calcule o intervalo de confiança ao nível de significância de 3%.

14. Em uma pesquisa de mercado, 57 das 150 pessoas entrevistadas afirmaram que comprariam determinado produto sendo lançado por uma empresa. Essa amostra é suficiente para se estimar a verdadeira proporção de futuros compradores, com uma precisão de 0,08 e uma confiança de 90%? Em caso negativo, calcule o tamanho de amostra necessário.

15. Uma amostra aleatória simples de 400 itens forneceu 100 itens correspondentes ao evento Sucesso.

    (a) Qual é a estimativa pontual $\widehat{p}$ para a verdadeira proporção de Sucessos na população?

    (b) Qual é o erro padrão estimado de $\widehat{p}$?

    (c) Calcule o intervalo de confiança para a verdadeira proporção de Sucessos na população ao nível de confiança de 80%.

16. Em uma sondagem, uma estimativa preliminar de "Sucessos" em uma população é de 0,35. Que tamanho deve ter uma amostra para fornecer um intervalo de confiança de 95% com uma margem de erro de 0,05?

Capítulo 4

Intervalos de confiança para a média da $N(\mu; \sigma^2)$, σ^2 desconhecida

4.1 Introdução

Neste capítulo, continuaremos o estudo básico sobre intervalos de confiança, analisando o problema de estimação da média de uma população normal quando não se conhece a variância desta população. Neste caso, é necessário estimar essa variância e isso introduz mais uma fonte de variabilidade nas nossas estimativas: com uma única amostra, temos que estimar a média e a variância da população. Como antes, usaremos a média amostral $\overline{X}$ como estimador de μ, que, nesse novo contexto, não tem mais a distribuição normal e, sim, a distribuição *t de Student*.

Considere, então, uma população descrita por uma variável aleatória normal com média μ e variância σ^2: $X \sim N(\mu; \sigma^2)$. Nosso interesse é estimar a média μ a partir de uma amostra aleatória simples $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Como visto no Capítulo 2, a distribuição amostral de $\overline{X}$ é normal com média μ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$, ou seja

$$X \sim N(\mu; \sigma^2) \Longrightarrow \overline{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Assim, se o valor de σ é conhecido, resulta que

$$Z = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0; 1)$$

e esse resultado foi utilizado na construção do intervalo de confiança para a média de uma população normal com variância conhecida, fornecendo o seguinte intervalo:

$$\left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\,\overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Suponha, agora, que a variância σ^2 *não* seja conhecida. Neste caso, temos que estimá-la com os dados amostrais. No Capítulo 1, vimos, através de um exemplo numérico, que

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right]$$

é um estimador não-viesado de σ^2. Isso significa que se calculássemos o valor de S^2 para cada uma das possíveis amostras aleatórias simples de tamanho n, a média desses valores seria igual a σ^2. Dessa forma, S^2 é um "bom" estimador de σ^2 e podemos usá-lo como uma estimativa pontual de σ^2. Sendo assim, é natural pensarmos em substituir o valor de σ por S na expressão (4.1) e utilizar a estatística

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{S}$$

na construção de intervalos de confiança para μ. Isso é exatamente o que faremos, mas, ao introduzirmos S no lugar de σ, a distribuição amostral de T deixa de ser normal e passa a ser uma distribuição t de Student, estudada anteriormente.

4.2 Intervalo de confiança para a média de uma população normal com variância desconhecida

O intervalo de confiança para a média de uma população normal com variância desconhecida é obtido com base no seguinte resultado:

! Distribuição Amostral da Média Amostral - População Normal com Variância Desconhecida

Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória simples de uma população $X \sim N\left(\mu; \sigma^2\right)$, então

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{S} \sim t(n-1) \tag{4.1}$$

onde $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right]$.

Para qualquer distribuição $t(\nu)$, é válido o seguinte resultado, consequência imediata da simetria da distribuição e da definição do valor crítico (veja a Figura 4.1):

$$\mathrm{P}\left(-t_{\nu;\,\alpha/2} \leq t(\nu) \leq t_{\nu;\,\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \tag{4.2}$$

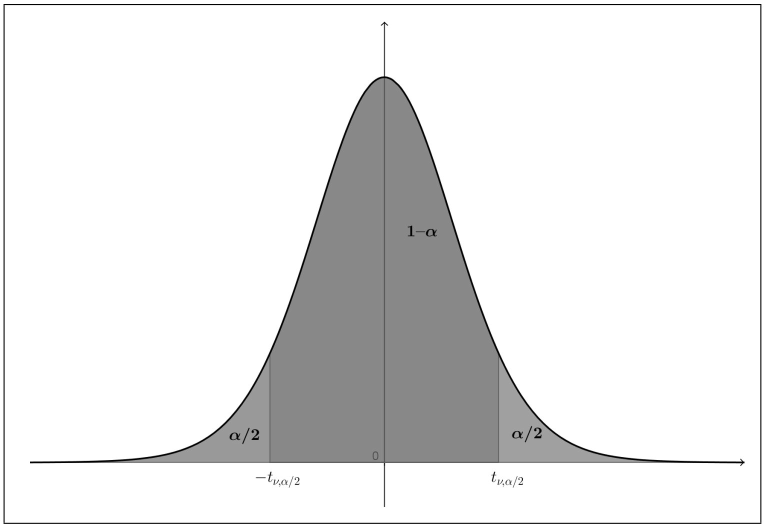


Figura 4.1 – Valores críticos da t-Student para construção do intervalo de confiança para a média de uma normal com variância desconhecida

Como o resultado (4.2) vale para qualquer distribuição t, usando o resultado (4.1), obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(-t_{n-1;\,\alpha/2} \leq \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{S} \leq t_{n-1;\,\alpha/2}\right) = 1-\alpha \Longrightarrow \\
&\mathrm{P}\left(-t_{n-1;\,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \overline{X}-\mu \leq t_{n-1;\,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \Longrightarrow \\
&\mathrm{P}\left(\overline{X}-t_{n-1;\,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X}+t_{n-1;\,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha
\end{aligned}
$$

Essa última expressão é o intervalo de confiança para a média μ de uma população normal com vari ância desconhecida.

! Intervalo de Confiança para a Média da $N(\mu;\sigma^2)$ – σ^2 Desconhecida

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples de uma população $X \sim N\left(\mu;\sigma^2\right)$. O intervalo de confiança para μ de nível de confiança $1-\alpha$ é

$$
\left[\overline{X}-t_{n-1;\,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\,;\,\overline{X}+t_{n-1;\,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]
$$

onde $t_{n-1;\,\alpha/2}$ é o valor crítico da distribuição t-Student com $n-1$ graus de liberdade que deixa área $\alpha/2$ acima dele.

4.3 Margem de erro

Note, mais uma vez, a forma do intervalo de confiança:

$$\overline{X} \pm \epsilon$$

onde a margem de erro ϵ, agora, é definida em termos do valor crítico da distribuição t e do erro- padrão estimado de $\overline{X}$:

$$\epsilon = t_{n-1;\,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \doteq t_{n-1;\,\alpha/2}\widehat{EP}(\overline{X}) \tag{4.3}$$

onde

$$\widehat{EP}(\overline{X}) = \frac{S}{\sqrt{n}} \tag{4.4}$$

4.4 Amostras grandes

Vimos que, para populações normais, a distribuição exata da estatística $T = \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{S}$ é $t(n-1)$. Mas vimos também que, quando o número de graus de liberdade é grande, a diferença entre as distribuições t e $N(0;1)$ tornam-se desprezíveis.

Por outro lado, se a população não é normal, mas tem média μ e variância σ^2, o Teorema Limite Central nos diz que a distribuição de $\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}$ se aproxima de uma $N(0;1)$ à medida que $n \to \infty$. Pode-se mostrar que esse resultado continua valendo se substituirmos σ por seu estimador S.

A conclusão dessas duas observações é a seguinte:

! Intervalo de confiança baseado em grandes amostras

Dada uma amostra aleatória simples $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de uma população X com média μ e variância σ^2, então

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{S} \approx N(0;1)$$

para n suficientemente grande. Nesse caso, o intervalo de confiança aproximado de nível de confiança $1-\alpha$ para μ é

$$\left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\,;\,\overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

EXEMPLO 4.1

De uma população normal com média e variância desconhecidas, extrai-se uma amostra de tamanho 15 obtendo-se $\overline{x} = 12$ e $s^2 = 49$. Obtenha um intervalo de confiança para a verdadeira média populacional, utilizando o nível de confiança de 95%.

Solução

Os seguintes requisitos para o IC para μ são satisfeitos: a população é normal e a amostra é pequena. Dessa forma, temos que usar a distribuição t com $n-1 = 14$ graus de liberdade. Como o nível de confiança é de 95%, em cada cauda da distribuição temos que ter 2,5%. Assim, devemos procurar a abscissa $t_{14;0,025}$ procurando na linha correspondente a 14 graus de liberdade e na coluna correspondente à área de 0,025. Encontramos

$$t_{14;0,025} = 2,145$$

A margem de erro é

$$\epsilon = 2,145 \times \frac{7}{\sqrt{15}} = 3,8769$$

e o intervalo de confiança, $[12 - 3,8769; 12 + 3,8769] = [8,1231; 15,8769]$

♦♦

EXEMPLO 4.2

A seguinte amostra foi extraída de uma população normal: $6, 6, 7, 8, 9, 9, 10, 11, 12$. Construa o intervalo de confiança para a média populacional, com nível de significância de 10%.

Solução

Como antes, temos uma amostra pequena de uma população normal; logo, temos que usar a distribuição t-Student. Como $n = 9$, $gl = n - 1 = 8$.

A média amostral é

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{\sum x_i}{n} \\ &= \frac{6+6+7+8+9+9+10+11+12}{9} = \frac{78}{9} = 8,667 \end{aligned}$$

e a variância amostral é

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}\right] = \\ &= \frac{1}{8}\left[6^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 - \frac{78^2}{9}\right] \\ &= \frac{1}{8}\left[712 - \frac{6084}{9}\right] = \frac{36}{8} = 4,5 \end{aligned}$$

Como o nível de significância é $\alpha = 10\%$, o nível de confiança é $1-\alpha = 90\%$. Em cada cauda da distribuição $t(8)$ temos que ter área igual a 5%. Assim, temos que procurar na linha correspondente a 8 graus de liberdade a abscissa relativa à área superior de 0,05. Obtemos $t_{8;0,05} = 1,860$. A margem de erro é

$$\epsilon = 1,860 \times \sqrt{\frac{4,5}{8}} = 1,395$$

e o intervalo de confiança é $[8,667 - 1,395; 8,667 + 1,395] = [7,272; 10,062]$

♦♦

EXEMPLO 4.3

A partir de uma amostra aleatória simples de tamanho $n = 100$, os seguintes valores foram obtidos: $\overline{x} = 12,36$ e $S^2 = 132,56$. Obtenha um intervalo de confiança de nível de confiança 90% para a média populacional μ.

Solução

Como o tamanho amostral é grande, podemos usar a aproximação normal. Como $1-\alpha = 0,90$, em cada cauda temos que ter 5% e,assim, devemos procurar no corpo da tabela da distribuição normal o valor mais próximo de 0,45. Resulta que $z_{0,05} = 1,64$, o que nos dá a seguinte margem de erro:

$$\epsilon = 1.64 \times \sqrt{\frac{132.56}{100}} = 1,8882$$

O intervalo de confiança de 90% de confiança é $[12.36 - 1.8882\,;\, 12.36 + 1.8882] = [10.472\,;\, 14.248]$

♦♦

4.5 Resumo comparativo

Para finalizar a parte relativa à construção de intervalos de confiança que veremos neste curso, vamos resumir os resultados vistos anteriormente. é importante notar que existem procedimentos para construção de intervalos de confiança para outros parâmetros, tal como a variância de uma população normal. O procedimento é análogo; o que muda é a distribuição amostral.

4.5.1 IC para a média de populações normais

O contexto básico analisado na seção 3.2 e neste capítulo é o seguinte: de uma população *normal* extrai-se uma amostra aleatória simples $X_1, X_2, \ldots, X_n$ com o objetivo de se obter uma estimativa intervalar para a média μ. Foram consideradas duas situações: (i) σ^2 conhecida e (ii) σ^2 desconhecida. Em ambos os casos, a expressão para o intervalo de confiança de nível de confiança $1-\alpha$ é

$$\overline{X} \pm \epsilon$$

com a margem de erro ϵ assumindo a forma geral

$$\epsilon = \lambda_{\alpha/2} EP(\overline{X})$$

onde $\lambda_{\alpha/2}$ representa o valor crítico de alguma distribuição e $EP(\overline{X})$ é o erro padrão da média amostral.

- σ^2 conhecida

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha/2} &= z_{\alpha/2} \qquad N(0;1) \\ EP(\overline{X}) &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

- σ^2 desconhecida

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha/2} &= t_{n-1;\,\alpha/2} \qquad t(n-1) \\ EP(\overline{X}) &= \frac{S}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

  Quando $n > 31$, pode-se usar $z_{\alpha/2}$ no lugar de $t_{n-1;\,\alpha/2}$.

4.5.2 IC para uma proporção

O contexto básico considerado na Seção 3.3 foi o seguinte: de uma populao representada por uma variável aleatória $X \sim Bern(p)$ extrai-se uma amostra aleatória simples $X_1, X_2, \ldots, X_n$ com o objetivo de se estimar a proporção populacional p dos elementos que possuem determinada característica de interesse. Se a amostra é suficientemente grande (em geral, $n > 30$), o intervalo de confiança para p tem a forma

$$\widehat{P} \pm \epsilon$$

com a margem de erro ϵ assumindo a forma geral

$$\epsilon = z_{\alpha/2} EP(\widehat{P})$$

com

$$EP(\widehat{P}) = \sqrt{\frac{\widehat{p}_0(1-\widehat{p}_0)}{n}}$$

Aqui, $\widehat{p}_0$ é uma estimativa prévia da proporção populacional p ou a própria proporção amostral $\widehat{p}$ obtida a partir da amostra.

4.5.3 IC para a média de populações não-normais - amostra grande

Dada uma aas de tamanho grande de uma população qualquer com média μ, o intervalo de confiança de nível de confiança aproximado $1-\alpha$ é

$$\overline{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Esses resultados estão resumidos na Tabela 4.1 e na **Figura** 4.2.

Tabela 4.1 – Resumo Comparativo dos Resultados sobre Intervalos de Confiança para médias

Parâmetro de Interesse		Estatística Amostral e sua Distribuição	Margem de erro	I.C.
Média da população $N(\mu;\sigma^2)$	σ^2 conhecida	$\sqrt{n}\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \sim N(0;1)$	$\epsilon = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\overline{X} \pm \epsilon$
	σ^2 desconhecida	$\sqrt{n}\dfrac{\overline{X}-\mu}{S} \sim t(n-1)$	$\epsilon = t_{n-1;\,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$	
Proporção [**média** $Bern(p)$]		$\sqrt{n}\dfrac{\widehat{P}-p}{\sqrt{p(1-p)}} \approx N(0;1)$	$\epsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}_0(1-\widehat{p}_0)}{n}}$	$\widehat{P} \pm \epsilon$
Média de uma população X	(amostra grande)	$\sqrt{n}\dfrac{\overline{X}-\mu}{S} \approx N(0;1)$	$\epsilon = z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$	$\overline{X} \pm \epsilon$

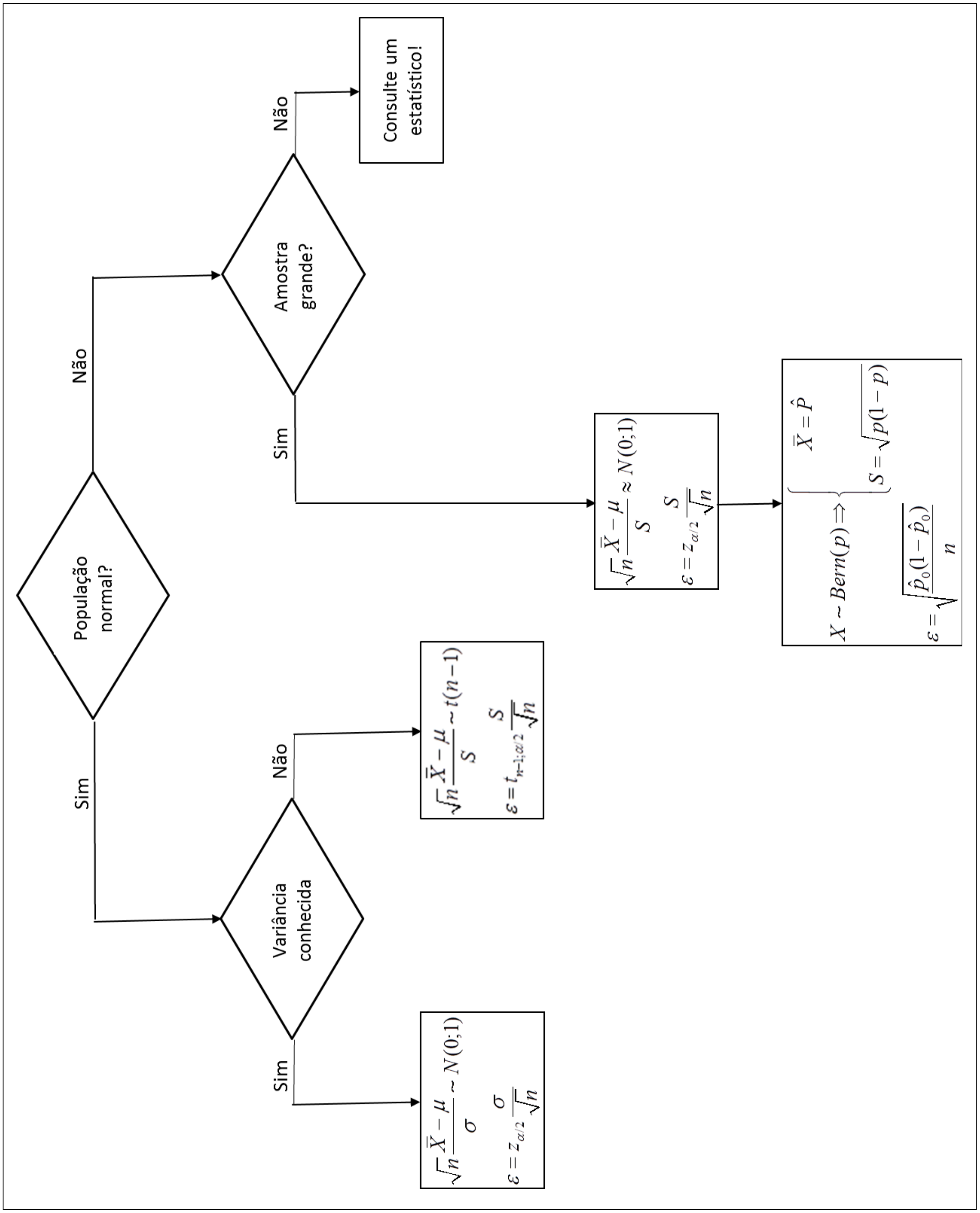


Figura 4.2 – Resumo dos procedimentos para construção de intervalos de confiança para médias

4.6 Exercícios propostos

1. Para uma distribuição t de Student com 12 graus de liberdade, encontre a probabilidade (área) de cada uma das seguintes regi ões (esboce um gráfico para auxiliar na solução do exercício):

   (a) à esquerda de $1,782$;
   (b) à direita de $-1,356$;
   (c) à direita de $2,681$;
   (d) entre $1,083$ e $3,055$;
   (e) entre $-1,356$ e $2,179$.

2. Encontre os seguintes valores críticos da distribuição t de Student:

   (a) $t_{15;0,05}$
   (b) $t_{18;0,90}$
   (c) $t_{25;0,975}$

3. Os tempos gastos por quinze funcionários em uma das tarefas de um programa de treinamento estão listados abaixo. é razoável supor, nesse caso, que essa seja uma amostra aleatória simples de uma população normal, ou seja, é razoável supor que a população de todos os tempos de funcionários submetidos a esse treinamento seja aproximadamente normal. Obtenha o intervalo de confiança de nível de confiança de 95% para o tempo médio populacional.

52	44	55	44	45	59	50	54
62	46	54	58	60	62	63	

4. Uma amostra aleatória simples de uma população normal apresenta as seguintes características:

$$n = 25 \qquad \overline{x} = 500 \qquad s^2 = 900$$

   Construa um intervalo de confiança de nível de confiança de 98% para a média da população.

5. Em uma fábrica, uma amostra de 30 parafusos apresentou os seguintes diâmetros (em mm):

10	13	14	11	13	14	11	13	14	15
12	14	15	13	14	12	12	11	15	16
13	15	14	14	15	15	16	12	10	15

   Supondo que os diâmetros sejam aproximadamente normais, obtenha um intervalo de confiança para o diâmetro médio de todos os parafusos produzidos nessa fábrica, usando o nível de significância de 2%. Para facilitar a solução do exercício, você pode usar os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 401 \qquad \sum_{i=1}^{30} x_i^2 = 5443$$

6. Repita o exercício anterior com os seguintes dados de uma amostra de 100 parafusos:

$$\overline{x} = 13,78 \qquad s^2 = 2,865$$

Capítulo 5

Intervalo de confiança para a variância da $N(\mu; \sigma^2)$

5.1 Introdução

Neste capítulo, completaremos o estudo básico sobre intervalos de confiança, analisando o problema de estimação da variância de uma população normal. Como antes, este intervalo se baseará na distribuição amostral de um estimador não-viesado para σ^2, a saber, S^2. Como a variância é um número não negativo, essa distribuição não tem que estar definida apenas para valores não-negativos.

O contexto subjacente é o seguinte: a partir de uma amostra aleatória simples X_1, X_2, ..., X_n retirada de uma população normal com média μ e variância σ^2 queremos construir um intervalo de confiança para σ^2. A hipótese de normalidade da população é fundamental aqui. Assim como no caso da média, temos que usar a distribuição amostral de algum estimador. Neste caso, o estimador é S^2 e a distribuição associada à sua distribuição amostral é a ditribuição qui-quadrado.

Foi visto que a densidade qui-quadrado assume valores não negativos apenas para $x \geq 0$ e, assim como a distribuição t, depende de um único parâmetro, o número de graus de liberdade ν. Vamos representar por χ^2_ν uma variável aleatória com ν graus de liberdade. Na Figura 5.1 apresentam-se os gráficos de três densidades qui-quadrado, com 4, 8 e 15 graus de liberdade, respectivamente.

Observe a Figura 5.1: à medida que aumentam os graus de liberdade, a distribuição vai se tornando mais simétrica, próxima de uma normal. Na verdade, temos a seguinte aproximação

$$\chi^2_\nu \approx N(\nu, 2\nu) \qquad n \text{ grande} \tag{5.1}$$

Esse resultado segue do Teorema Limite Central e do fato de que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\chi^2_\nu) &= \nu \\ \mathrm{Var}(\chi^2_\nu) &= 2\nu \end{aligned} \tag{5.2}$$

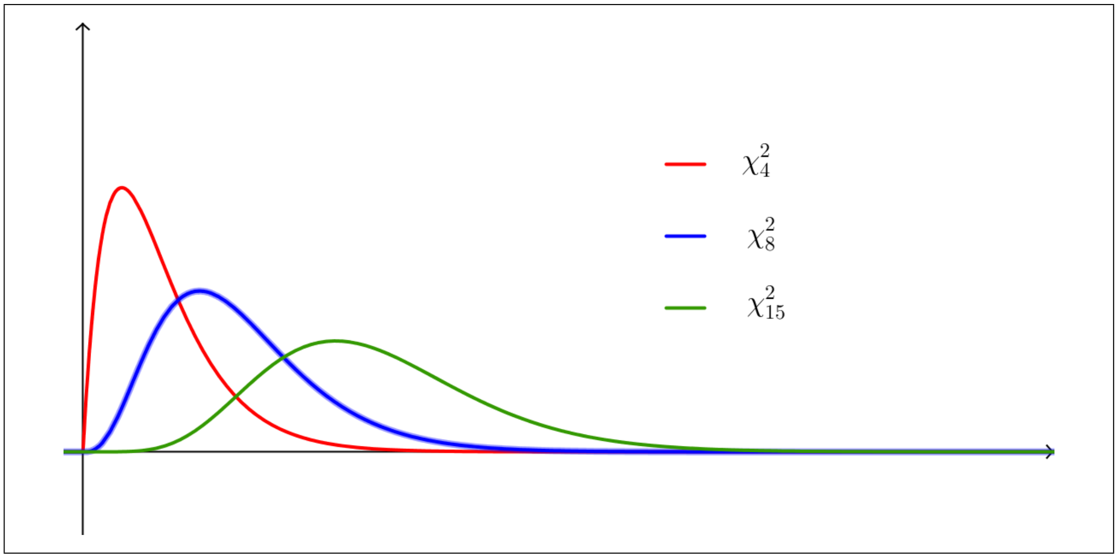


Figura 5.1 – Gráficos das densidades χ^2_4, χ^2_8 e χ^2_{15}

Como no caso da distribuição $t-$Student, é necessário algum programa computacional para o cálculo de probabilidades associadas à distribuição qui-quadrado. Assim, faremos uso da Tabela 4 do Apêndice que fornece o valor crítico $\chi^2_{n;\alpha}$, ou seja, a abscissa da distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade que deixa probabilidade α acima dela. Veja a **Figura 5.2**:

$$P(\chi^2_n > \chi^2_{n,\alpha}) = \alpha \tag{5.3}$$

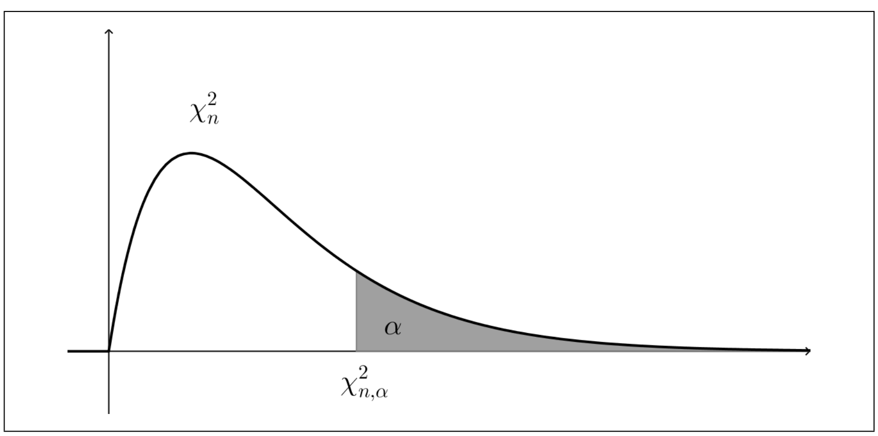


Figura 5.2 – Valor crítico $\chi^2_{n;\alpha}$ da distribuição χ^2

5.2 Intervalo de confiança para a variância de uma população normal

O intervalo de confiança para a variância de uma população normal é obtido com base no seguinte resultado:

! Distribuição Amostral da Variância Amostral - População Normal

Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória simples de uma população $X \sim N\left(\mu; \sigma^2\right)$, então

$$Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{n-1} \tag{5.4}$$

em que $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2 \right]$.

Usando (5.3) e (5.4) (veja Figura 5.3) resulta que

$$\mathrm{P}\left(\chi^2_{n-1;1-\alpha/2} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1;\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$$

e, assim,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\frac{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}}{(n-1)S^2} \leq \frac{1}{\sigma^2} \leq \frac{\chi^2_{n-1;\alpha/2}}{(n-1)S^2} \right) &= 1 - \alpha \Rightarrow \\
\mathrm{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}} \right) &= 1 - \alpha
\end{aligned}$$

e esse é o intervalo de confiança para a variância de uma população normal.

! Intervalo de Confiança para a Variância da $N(\mu; \sigma^2)$

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples de uma população $X \sim N\left(\mu; \sigma^2\right)$. O intervalo de confiança para σ^2 de nível de confiança $1 - \alpha$ é

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\alpha/2}} ; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha/2}} \right]$$

em que $\chi^2_{n;\,\alpha}$ é o valor crítico da distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade que deixa área α acima dele.

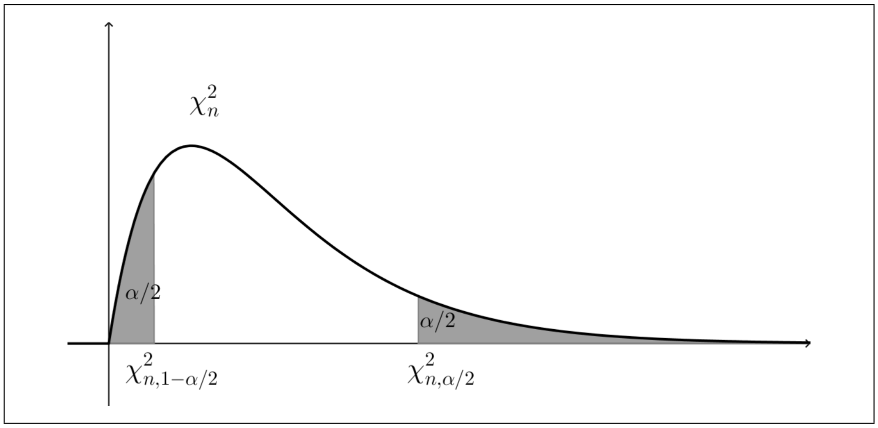


Figura 5.3 – Valores críticos da χ^2_n para intervalos de confiança

Note que o intervalo de confiança é construído de tal forma a dividir o nível de significância α em duas partes iguais, mesmo a distribuição não sendo simétrica.

EXEMPLO 5.1

De uma população normal com média e variância desconhecidas, extrai-se uma amostra de tamanho 15 obtendo-se $\overline{x} = 12$ e $s^2 = 49$. Obtenha um intervalo de confiança para a variância populacional, utilizando o nível de confiança de 95%.

Solução

O requisito para o IC para σ^2 é satisfeito, uma vez que a população é normal. Temos que usar a distribuição χ^2 com $n-1 = 14$ graus de liberdade. Como o nível de confiança é de 95%, em cada cauda da distribuição temos que ter 2,5%. Assim, para a cauda superior, devemos usar o valor crítico $\chi^2_{14;0,025}$ procurando na linha correspondente a 14 graus de liberdade e na coluna correspondente à probabilidade de 0,025. Encontramos que $\chi^2_{14;0,025} = 26,119$.

Para a cauda inferior, devemos usar o valor crítico $\chi^2_{14;0,975}$, procurando na linha correspondente a 14 graus de liberdade e na coluna correspondente à probabilidade de 0,975. Encontramos que $\chi^2_{14;0,975} = 5,629$. Logo, o intervalo de confiança é

$$\left[\frac{14 \times 49}{26,119}; \frac{14 \times 49}{5,629}\right] = [26,26; 121,87]$$

♦♦

EXEMPLO 5.2

A seguinte amostra foi extraída de uma população normal: $6, 6, 7, 8, 9, 9, 10, 11, 12$. Construa o intervalo de confiança para a variäcia populacional, com nível de significância de 10%.

Solução

Temos uma amostra de uma população normal; logo, podemos usar a distribuição χ^2. Como $n = 9$, $gl = n - 1 = 8$.

A média amostral é

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{\sum x_i}{n} \\ &= \frac{6+6+7+8+9+9+10+11+12}{9} = \frac{78}{9} = 8,6667 \end{aligned}$$

e a variância amostral é

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right] = \\ &= \frac{1}{8}\left[6^2+6^2+7^2+8^2+9^2+9^2+10^2+11^2+12^2 - \frac{78^2}{9}\right] \\ &= \frac{1}{8}\left[712 - \frac{6084}{9}\right] = \frac{36}{8} = 4,5 \end{aligned}$$

Como o nível de significância é $\alpha = 10\%$, o nível de confiança é $1 - \alpha = 90\%$. Em cada cauda da distribuição χ^2_8 temos que ter probabilidade igual a 5%. Assim, temos que procurar na linha correspondente a 8 graus de liberdade os valores críticos relativos às probabilidades de 0,05 e de 0,95. Obtemos $\chi^2_{8;0,05} = 15,507$ e $\chi^2_{8;0,95} = 2,733$. O intervalo de confiança é

$$\left[\frac{7 \times 4,5}{15,507}; \frac{7 \times 4,5}{2,733}\right] = [2,03; 11,53]$$

♦♦

5.3 Exercícios propostos

1. Seja X uma variável aleatória com distribuição qui-quadrado com 17 graus de liberdade. Encontre o valor da abscissa k tal que:

   (a) $P(X > k) = 0,02$
   (b) $P(X < k) = 0,02$
   (c) $P(X < k) = 0,90$

2. Os tempos gastos por quinze funcionários em uma das tarefas de um programa de treinamento estão listados abaixo. É razoável supor, nesse caso, que essa seja uma amostra aleatória simples de uma população normal, ou seja, é razoável supor que a população de todos os tempos de funcionários submetidos a esse treinamento seja aproximadamente normal. Obtenha o intervalo de confiança de nível de confiança de 95% para a variância populacional.

52	44	55	44	45	59	50	54
62	46	54	58	60	62	63	

3. Uma amostra aleatória simples de uma população normal apresenta as seguintes características:

$$n = 25 \qquad \overline{x} = 500 \qquad s^2 = 900$$

   Construa um intervalo de confiança de nível de confiança de 98% para a média da população.

4. Em uma fábrica, uma amostra de 30 parafusos apresentou os seguintes diâmetros (em mm):

10	13	14	11	13	14	11	13	14	15
12	14	15	13	14	12	12	11	15	16
13	15	14	14	15	15	16	12	10	15

   Supondo que os diâmetros sejam aproximadamente normais, obtenha o intervalo de confiança para a variância do diâmetro de todos os parafusos produzidos nessa fábrica, usando o nível de significância de 2%. Para facilitar a solução do exercício, você pode usar os seguintes resultados:

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 401 \qquad \sum_{i=1}^{30} x_i^2 = 5443$$

Capítulo 6

Testes de hipóteses – Conceitos básicos

6.1 Introdução

Na teoria de estimação, vimos que é possível, por meio de estatísticas amostrais adequadas, estimar parâmetros de uma população, dentro de um certo intervalo de confiança.

Nos testes de hipóteses, em vez de se construir um intervalo de confiança no qual se espera que o parâmetro da população esteja contido, testa-se a validade de uma afirmação sobre um parâmetro da população.

Então, em um teste de hipótese, procura-se tomar decisões a respeito de uma população com base em informações obtidas de amostras desta mesma população.

Vamos trabalhar com alguns exemplos para ilustrar os conceitos básicos de que precisamos para construir testes de hipóteses estatísticos.

EXEMPLO 6.1 Amostra de anéis de vedação - parte 1

Uma empresa compra anéis de vedação de dois fabricantes. Segundo informações dos fabricantes, os anéis do fabricante 1 têm diâmetro médio de 14 cm com desvio padrão de 1,2 cm e os anéis do fabricante 2 têm diâmetro médio de 15 cm com desvio padrão de 2,0 cm. Ambos os processos de produção geram anéis com diâmetros cuja distribuição é aproximadamente normal.

Uma caixa com 16 anéis sem identificação é encontrada pelo gerente do almoxarifado. Embora ele suspeite que a caixa seja oriunda do fabricante 1, decide fazer uma medição dos anéis e basear sua decisão no diâmetro médio da amostra: se o diâmetro médio for maior que 14,5 cm, ele identificará a caixa como oriunda do fabricante 2; caso contrário, ele identificará a caixa como oriunda do fabricante 1.

Esse é um problema típico de decisão empresarial. Vamos analisá-lo sob o ponto de vista estatístico, estudando os possíveis erros e suas probabilidades de ocorrência. Para isso, precisamos formular uma *hipótese nula*, que é uma afirmação sobre um parâmetro da população.

A hipótese nula, normalmente designada por H_0, é uma afirmação que é estabelecida com o objetivo de ser testada; ela pode ser rejeitada ou não. Geralmente, a hipótese nula é formulada de tal forma que o objetivo é rejeitá-la.[1]

Neste exemplo, existem apenas duas possibilidades para a origem dos anéis de vedação. Como o gerente suspeita que a caixa venha do fabricante 1, vamos estabelecer a hipótese nula de forma que o resultado desejado seja rejeitá-la. Definimos, então, a hipótese nula como sendo

$$H_0 : \text{anéis vêm do fabricante 2}$$

e, obviamente, a hipótese alternativa será

$$H_1 : \text{anéis vêm do fabricante 1}$$

Se denotamos por X a variável aleatória que representa o diâmetro dos anéis, essas hipóteses se traduzem como

$$\begin{array}{lcl} H_0 & : & X \sim N(15; 2,0^2) \\ H_1 & : & X \sim N(14; 1,2^2) \end{array}$$

A regra de decisão do gerente é baseada na média amostral observada para os 16 anéis encontrados. Como dito, nossa decisão deve ser expressa sempre em termos de H_0. Logo, a regra de decisão é

$$\begin{array}{lcl} \overline{x} & \leq & 14,5 \Longrightarrow \text{rejeito } H_0 \\ \overline{x} & > & 14,5 \Longrightarrow \text{não rejeito } H_0 \end{array}$$

Os erros associados a essa regra de decisão são:

Erro I: rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira
Erro II: não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa

Se H_0 é verdadeira, a amostra vem de uma população normal com média 15 e desvio padrão 2,0. Nesse caso, a média amostral com base em uma amostra de tamanho 16 é também normal com média 15 e desvio padrão $\frac{2,0}{\sqrt{16}}$.

Se H_0 é falsa, a amostra vem de uma população normal com média 14 e desvio padrão 1,2. Nesse caso, a média amostral com base em amostra de tamanho 16 é também normal com média 14 e desvio padrão $\frac{1,2}{\sqrt{16}}$.

Então, as probabilidades associadas aos erros podem ser expressas em termos de probabilidade condicional:

$$\begin{array}{lcl} \text{P(Erro I)} & = & \text{P}\left[\overline{X} \leq 14,5 | \overline{X} \sim N\left(15; \frac{2,0^2}{16}\right)\right] \\ \text{P(Erro II)} & = & \text{P}\left[\overline{X} > 14,5 | \overline{X} \sim N\left(14; \frac{1,2^2}{16}\right)\right] \end{array}$$

[1]Mais adiante, veremos um procedimento objetivo para estabelecimento das hipóteses nula e alternativa em contextos mais complexos.

Na Figura 6.1, a probabilidade associada ao erro I corresponde à área sombreada de cinza-claro, enquanto a área sombreada de cinza-escuro corresponde à probabilidade do erro tipo II.

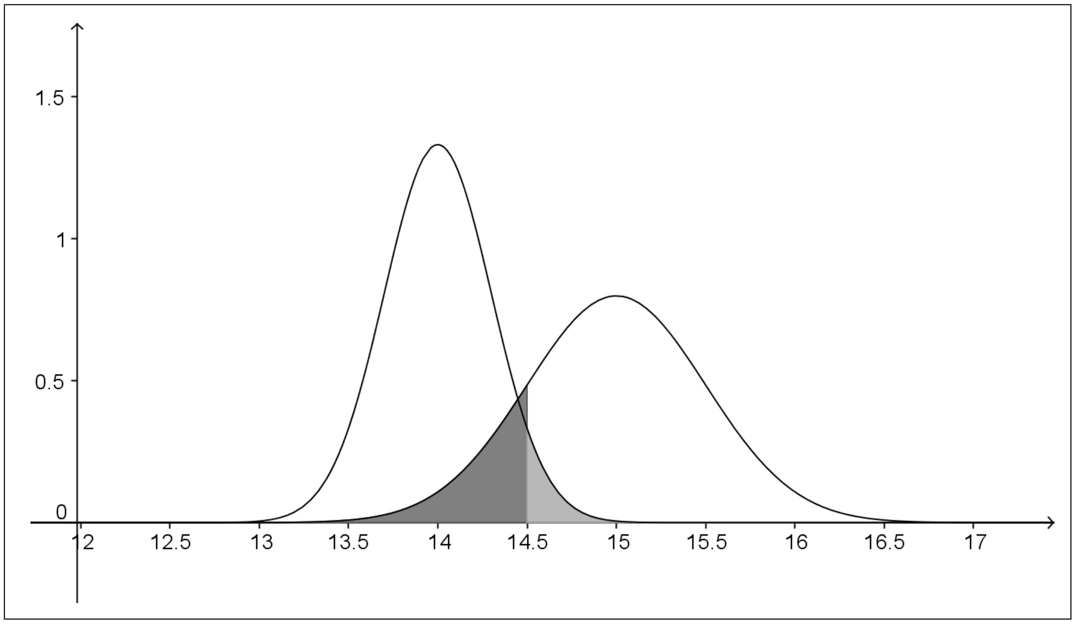


Figura 6.1 – Probabilidades dos Erros tipo I e II para o Exemplo 6.1

Vamos calcular essas probabilidades. Em geral, a probabilidade do erro tipo I é denotada por α e a probabilidade do erro tipo II por β. Assim,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \text{P(Erro I)} = \text{P}\left[\overline{X} \le 14,5 | \overline{X} \sim N\left(15; \frac{2,0^2}{16}\right)\right] = \text{P}\left(Z \le \frac{14,5-15}{\frac{2}{4}}\right) \\
&= \text{P}(Z \le -1,00) = \text{P}(Z \ge 1,00) = 0,5 - tab(1,00) = 0,5 - 0,34134 = 0,15866
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta &= \text{P(Erro II)} = \text{P}\left[\overline{X} > 14,5 | \overline{X} \sim N\left(14; \frac{1,2^2}{16}\right)\right] = \text{P}\left(Z > \frac{14,5-14}{\frac{1.2}{4}}\right) \\
&= \text{P}(Z > 1,67) = 0,5 - tab(1,67) = 0,04746
\end{aligned}$$

♦♦

É importante você entender a sutileza da notação. A decisão do gerente tem de ser tomada em função do resultado amostral observado; assim, usamos a notação $\overline{x}$. Lembre-se de que usamos letras minúsculas para representar o valor observado de uma variável aleatória.

Quando falamos da probabilidade do erro ou mesmo da regra de decisão em termos gerais, estamos considerando o procedimento decisório geral. Como esse procedimento depende da amostra sorteada, temos de expressar as probabilidades dos erros e a regra de decisão levando em conta as possíveis amostras, ou seja, temos de levar em conta a variável aleatória $\overline{X}$ que descreve a média amostral de uma possível amostra aleatória simples de tamanho n.

No exemplo, a regra de decisão geral é: se $\overline{X} > 14,5$, o gerente classifica como produção do fabricante 2. Assim, se a caixa em questão tiver uma média de, por exemplo, 14,4, o gerente classificará a caixa como produzida pelo fabricante 1.

EXEMPLO 6.2 Amostra de anéis de vedação - parte 2

Para resumir os resultados do exemplo anterior, podemos construir o seguinte quadro:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Gerente decide que origem é do</td></tr>
<tr><td>Fabricante 1</td><td>Fabricante 2</td></tr>
<tr><td>Fabricante</td><td>2</td><td>Erro I ($\alpha = 0,15866$)</td><td>OK</td></tr>
<tr><td>Verdadeiro</td><td>1</td><td>OK</td><td>Erro II ($\beta = 0,04746$)</td></tr>
</table>

Vemos aí que a probabilidade do erro tipo I é maior. Analisando a **Figura 6.1**, podemos ver também que, se mudarmos a regra de decisão escolhendo um valor de corte diferente de 14,5, essas probabilidades se alterarão. Aumentando α, diminui β e vice-versa.

Vamos, agora, estabelecer uma nova regra de decisão de modo que a probabilidade do erro tipo I passe a ser 0,05. A nossa região de rejeição, ou *região crítica*, continua tendo a forma $\overline{X} \leq k$. Pela **Figura** 6.1, vemos que k tem de ser menor que 14,5.

$$
\begin{aligned}
&\alpha = 0,05 \Leftrightarrow \mathrm{P}\left[\overline{X} \leq k \,|\, \overline{X} \sim N\left(15; \frac{2,0^2}{16}\right)\right] = 0,05 \Leftrightarrow \\
&\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{k-15}{\frac{2}{4}}\right) = 0,05 \Leftrightarrow \mathrm{P}\left(Z \geq -\frac{k-15}{0,5}\right) = 0,05 \Leftrightarrow \\
&0,5 - tab\left(-\frac{k-15}{0,5}\right) = 0,05 \Leftrightarrow tab\left(-\frac{k-15}{0,5}\right) = 0,45 \Leftrightarrow \\
&-\frac{k-15}{0,5} = 1,64 \Leftrightarrow k = 14,18
\end{aligned}
$$

Com essa nova regra de decisão, o erro tipo II passa a ter probabilidade

$$
\begin{aligned}
\beta &= \mathrm{P(Erro\ II)} = \mathrm{P}\left[\overline{X} > 14,18 | \overline{X} \sim N\left(14; \frac{1,2^2}{16}\right)\right] \\
&= \mathrm{P}\left(Z > \frac{14,18-14}{\frac{1,2}{4}}\right) = \mathrm{P}(Z > 0,6) \\
&= 0,5 - tab(0,6) = 0,27425
\end{aligned}
$$

♦♦

EXEMPLO 6.3 Amostra de anéis de vedação - parte 3

Suponha, agora, que o gerente queira igualar as probabilidades de erro. Qual deve ser a regra de decisão?

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow$$
$$\mathrm{P}\left[\overline{X} \leq k \mid \overline{X} \sim N\left(15; \frac{2,0^2}{16}\right)\right] = \mathrm{P}\left[\overline{X} > k \,|\, \overline{X} \sim N\left(14; \frac{1,2^2}{16}\right)\right] \Leftrightarrow$$
$$\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{k-15}{\frac{2.0}{4}}\right) = \mathrm{P}\left(Z > \frac{k-14}{\frac{1.2}{4}}\right) \Longleftrightarrow \frac{k-15}{0,5} = -\frac{k-14}{0,3} \Leftrightarrow$$
$$0,3k - 4,5 = -0,5k + 7 \Leftrightarrow 0,8k = 11,5 \Leftrightarrow k = 14,375$$

Neste caso, as probabilidades dos erros tipo I e II são

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta = \mathrm{P}\left[\overline{X} \leq 14,375 \,|\, \overline{X} \sim N\left(15; \frac{2,0^2}{16}\right)\right] \\ &= \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{14,375-15}{0,5}\right) \\ &= \mathrm{P}(Z \leq -1,25) = \mathrm{P}(Z \geq 1,25) = 0,5 - tab(1,25) = 0,10565 \end{aligned}$$

♦♦

EXEMPLO 6.4 Amostra de anéis de vedação - parte 4

O procedimento de se fixar a probabilidade α do erro tipo I é o mais utilizado pois, em geral, na prática a situação não é tão simples como a escolha entre duas decisões.

Suponha, nos dois exemplos anteriores, que a empresa compre anéis de diversos fabricantes mas, pelas características de produção do fabricante 2, os anéis produzidos por ele sejam especiais para a empresa. Assim, é importante identificar corretamente a origem, caso eles sejam oriundos do fabricante 2. Nesta situação, nossas hipóteses passariam a ser:

$$\begin{aligned} H_0 &: \text{ anéis são produzidos pelo fabricante 2} \\ H_1 &: \text{ anéis não são produzidos pelo fabricante 2} \end{aligned}$$

Queremos que a probabilidade α seja pequena; assim, podemos fixar α como 0,05 ou mesmo 0,01. De posse do valor dessa probabilidade, poderíamos estabelecer a região crítica ou região de rejeição. A diferença fundamental aqui está no cálculo da probabilidade do erro tipo II: não existe um único valor de β, já que, sob H_1, a distribuição pode ter qualquer média.

♦♦

EXEMPLO 6.5 Honestidade de uma moeda

Considere a seguinte regra de decisão sobre a honestidade de uma moeda. Se em três lançamentos aparecerem 3 coroas, rejeitamos a hipótese de que a moeda seja honesta. Como devemos estabelecer as hipóteses nula e alternativa? Como devemos proceder para calcular α e β?

Em termos gerais, a questão que se coloca é se a moeda é honesta ou não. Como regra geral, neste curso sempre iremos definir a hipótese nula de modo que ela represente um único valor do parâmetro de interesse, ou seja, a hipótese nula deve ser uma *hipótese simples*.

Neste exemplo, a distribuição em questão é uma binomial com parâmetros $n = 3$ e p desconhecido. Moeda honesta significa $p = \frac{1}{2}$. Logo, nossas hipóteses devem ser:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad p = \frac{1}{2} \\ H_1 &: \quad p \neq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Seja X = número de coroas nos três lançamentos. Então, $X \sim bin(3; p)$. Nossa regra de decisão é rejeitar H_0 se $X = 3$. A probabilidade do erro tipo I é:

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathrm{P}\left[X = 3 | X \sim bin\left(3; \frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Não é possível calcular $\beta = \mathrm{P}(\text{não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa})$, pois a hipótese alternativa (aquela que devemos considerar quando H_0 não é aceita) não estipula um valor único para p. Mas neste exemplo simples, podemos obter uma expressão para β em função de p. Note que

$$\begin{aligned} \beta &= \mathrm{P}[X < 3 | X \sim bin(3; p)] \\ &= 1 - \mathrm{P}[X \geq 3 | X \sim bin(3; p)] \\ &= 1 - \mathrm{P}[X = 3 | X \sim bin(3; p)] \\ &= 1 - p^3 \end{aligned}$$

♦♦

6.2 Conceitos básicos

O contexto em que se baseia a teoria de teste de hipótese é basicamente o mesmo da teoria de estimação por intervalo de confiança. Temos uma população representada por uma variável aleatória X cuja distribuição de probabilidade depende de algum parâmetro θ. O interesse agora está em testar a veracidade de alguma afirmativa sobre θ.

6.2.1 Hipóteses nula e alternativa

A hipótese nula, representada por H_0, é a hipótese básica que queremos testar. Nesse texto consideraremos apenas hipóteses nulas simples, isto é, hipóteses que estabelecem que o parâmetro de interesse é *igual* a um determinado valor. A forma geral é:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

Alguns exemplos são:

$$H_0 : \mu = 6 \qquad H_0 : p = 0,5 \qquad H_0 : \sigma^2 = 25$$

O procedimento de teste de hipótese resultará em uma *regra de decisão* que nos permitirá *rejeitar* ou *não rejeitar* H_0.

A hipótese alternativa, representada por H_1, é a hipótese que devemos considerar no caso de rejeição da hipótese nula. A forma mais geral de H_1 é a hipótese *bilateral*

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Em algumas situações, podemos ter informação que nos permita restringir o domínio da hipótese alternativa. Por exemplo, se uma empresa farmacêutica está testando um novo medicamento para enxaqueca no intuito de reduzir o tempo entre a ingestão do medicamento e o alívio dos sintomas, uma possível hipótese alternativa é

$$H_1 : \mu < 10$$

Temos, então, hipóteses unilaterais à esquerda

$$H_1 : \theta < \theta_0$$

e hipóteses unilaterais à direita:

$$H_1 : \theta > \theta_0$$

A escolha entre essas formas de hipótese alternativa se faz com base no conhecimento sobre o problema sendo considerado.

Nesse texto consideraremos o seguinte procedimento prático para determinação das hipóteses nula e alternativa.

> "Traduza" a afirmação do problema para desigualdade. Faça o mesmo para a afirmação que é o seu complementar. A desigualdade que *não* envolve o sinal de = será a hipótese alternativa e a hipótese nula é sempre do tipo $\theta = \theta_0$.

EXEMPLO 6.6 Determinação de H_0 e H_1

Considerando as seguintes afirmativas como parte de um problema de teste de hipóteses, determine as hipóteses nula e alternativa apropriadas.

(a) O tempo médio é de, no máximo, 15 minutos

(b) Há, em média, pelo menos 15 clientes.

(c) A proporção de clientes tem que ser pelo menos 60%.

(d) A proporção de defeituosos tem que ser menor que 5%.

Solução

(a) ·

Afirmativa dada:	$\mu \leq 15$
Complementar:	$\mu > 15$

A desigualdade que não contém o sinal de = ($\mu > 15$) torna-se a hipótese alternativa:

$$H_0 : \mu = 15$$
$$H_1 : \mu > 15$$

(b) ·

Afirmativa dada:	$\mu \geq 15$
Complementar:	$\mu < 15$

$$H_0 : \mu = 15$$
$$H_1 : \mu < 15$$

(c) ·

Afirmativa dada:	$p \geq 60\%$
Complementar:	$p < 60\%$

$$H_0 : p = 0,6$$
$$H_1 : p < 0,6$$

(d) ·

Afirmativa dada:	$p < 5\%$
Complementar:	$p \geq 5\%$

$$H_0 : p = 0,05$$
$$H_1 : p < 0,05$$

♦♦

6.2.2 Estatística de teste, erros e regra de decisão

Assim como na construção dos intervalos de confiança, usaremos uma estatística amostral apropriada para construir o nosso teste de hipótese, e, nesse contexto, essa estatística é chamada *estatística de teste*. As estatísticas de teste que consideraremos aqui são a média amostral $\overline{X}$ e a proporção amostral $\widehat{P}$, que serão usadas na construção de testes sobre a média e a proporção populacionais, respectivamente.

O procedimento de decisão será definido em termos da hipótese nula H_0, com duas decisões possíveis: (i) rejeitar H_0 ou (ii) não rejeitar H_0. No quadro a seguir, resumimos as situações possiveis.

		Decisão	
		Rejeitar H_0	Não rejeitar H_0
Possibi-	H_0 verdadeira	Erro I	OK
lidades	H_0 falsa	OK	Erro II

Vemos, aí, que existem duas possibilidades de erro:

Erro tipo I: rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeira
Erro tipo II: não rejeitar H_0 quando H_0 é falsa

A decisão sobre a hipótese nula é tomada com base em uma regra que estabelece um conjunto de valores, chamado *região crítica* ou *região de rejeição*, de modo que, se o valor observado da estatística amostral cair nessa região, rejeitaremos H_0; caso contrário, não rejeitaremos H_0. Vamos denotar por RC a região crítica.

6.2.3 Região crítica e nível de significância

Em geral, a definição da região crítica é feita da seguinte forma: RC é o conjunto de valores cuja probabilidade de ocorrência é *pequena* sob a hipótese de veracidade de H_0.

Vamos considerar o seguinte exemplo: se, ao lançarmos uma moeda 30 vezes, obtivermos 28 caras, iremos desconfiar da hipótese de honestidade da moeda, porque a probabilidade de obtermos 28 caras ou mais em 30 lançamentos de uma moeda honesta é de 0,000000433996, uma probabilidade bastante pequena. É claro que o evento "28 caras ou mais em 30 lançamentos" é um evento possível (acertar a sena no jogo da mega-sena também é...), mas, sob o ponto de vista do teste de hipótese, a obtenção de tal evento será uma evidência de que a nossa hipótese nula de honestidade da moeda não é muito plausível.

Nesse caso, não diremos que a moeda não é honesta (não podemos dizer que é impossível acertar a sena!); nossa conclusão é que não há evidência suficiente para apoiar a hipótese nula. (Situação análoga ocorre quando um júri diz que o réu é "não-culpado".)

A definição de "probabilidade pequena" se faz por meio da escolha do *nível de* *significância* α do teste, que é a probabilidade do erro tipo I, isto é:

$$\alpha = \text{P(erro tipo I)} = \text{P(rejeitar } H_0 \,|\, H_0 \text{ é verdadeira)}$$

Em geral, o valor de α é pequeno e as escolhas mais comuns são $\alpha = 0,05$ e $\alpha = 0,01$.

Definido o nível de significância α, podemos estabelecer a região crítica usando a distribuição amostral da estatística de teste.

6.3 Exercícios propostos

1. Estabeleça as hipóteses nula e alternativa para as seguintes situações:

   (a) Depois de uma pane geral no sistema de informação de uma empresa, o gerente administrativo deseja saber se houve alteração no tempo de processamento de determinada atividade. Antes da pane, o tempo de processamento podia ser aproximado por uma variável aleatória normal com média de 100 minutos e desvio padrão de 10 minutos. O gerente acredita que a pane não tenha alterado a variabilidade do processo.

   (b) O dono de uma média empresa decide investigar a alegação de seus empregados de que o salário médio na sua empresa é menor que o salário médio nacional, que é de 900 reais.

   (c) Uma empresa fabricante de balas afirma que o peso médio de suas balas é de pelo menos 2 gramas.

2. Considere uma população normal com variância 225, da qual se extrai uma amostra aleatória simples de tamanho 25. Deseja-se testar as seguintes hipóteses:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 40 \\ H_1 &: \mu = 45 \end{aligned}$$

   (a) Se a região crítica é $RC : \overline{X} > 43$ calcule as probabilidades dos erros tipo I e II.

   (b) Determine a região crítica da forma $\overline{X} > k$ tal que a probabilidade do erro tipo I seja 0,10. Nesse caso, qual é a probabilidade do erro tipo II?

3. Considere uma população normal com variância 225, da qual se extrai uma amostra aleatória simples de tamanho 25. Deseja-se testar as seguintes hipóteses:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 40 \\ H_1 &: \mu \neq 40 \end{aligned}$$

   e para isso define-se a seguinte região crítica:

$$RC : \overline{X} > 46 \text{ ou } \overline{X} < 34$$

   (a) Calcule a probabilidade do erro tipo I.

   (b) Calcule a probabilidade do erro tipo II se $\mu = 36$.

4. Considere uma população normal com variância 64, da qual se extrai uma amostra aleatória simples de tamanho 16. Deseja-se testar as seguintes hipóteses:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 23 \\ H_1 &: \mu = 28 \end{aligned}$$

   (a) Se a região crítica é $RC : \overline{X} > 25,5$ calcule as probabilidades dos erros tipo I e II.

   (b) Determine a região crítica da forma $\overline{X} > k$ tal que a probabilidade do erro tipo I seja 0,05. Nesse caso, qual é a probabilidade do erro tipo II?

5. Desejando-se testar as hipóteses

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 45 \\ H_1 &: \mu < 45 \end{aligned}$$

   sobre a média μ de uma população normal com variância 36, estabeleceu-se a seguinte região crítica com base em amostra aleatória simples de tamanho $n = 16$:

$$RC : \overline{X} < 41,25$$

   (a) Calcule a probabilidade do erro tipo I.

   (b) Calcule a probabilidade do erro tipo II se $\mu = 43$.

Capítulo 7

Testes de hipóteses baseados na distribuição normal

7.1 Introdução

Neste capítulo, aplicaremos os conceitos básicos sobre a teoria de teste de hipótese à situação específica em que a estatística de teste tem, pelo menos aproximadamente, distribuição normal. Veremos inicialmente testes para a média de uma população normal e, depois, testes para uma proporção populacional baseados em grandes amostras.

Vamos apresentar, inicialmente, alguns exemplos que ilustrarão diversas possibilidades que podem surgir na prática.

EXEMPLO 7.1 Tempo de processamento – parte 1

Depois de uma pane geral no sistema de informação de uma empresa, o gerente administrativo deseja saber se houve alteração no tempo de processamento de determinada atividade. Antes da pane, o tempo de processamento podia ser aproximado por uma variável aleatória normal com média de 100 minutos e desvio padrão de 10 minutos. O gerente acredita que a pane não tenha alterado a variabilidade do processo. Uma amostra de 16 tempos de processamento após a pane revela uma média de 105,5 minutos. Ao nível de significância de 5%, qual é a conclusão sobre a alteração do tempo médio de processamento?

Solução

Seja T a variável aletaória que representa o tempo de processamento. Do enunciado, sabemos que $T \sim N(\mu, 10^2)$ e sabemos, também, que antes da pane, $\mu = 10$.

- Hipóteses Nula e Alternativa

  O interesse do gerente é comparar os tempos antes e depois da pane. Antes da pane, o tempo médio de processamento era de 100 minutos. Como ele não sabe o tipo de alteração que pode ter ocorrido, precisa saber se o tempo médio depois da pane é diferente do tempo anterior. Temos, assim, as seguintes afirmativas $\mu = 100$ e $\mu \neq 100$, que nos levam às seguintes hipóteses nula e alternativa:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 100 \\ H_1 &: \mu \neq 100 \end{aligned}$$

- Estatística de teste

  Como a população é normal, sabemos que a distribuição da média amostral também é normal, e como não deve ter havido alteração na variabilidade do processo, resulta que o desvio padrão é de 10 minutos em qualquer situação.

  Logo,

$$\overline{X} \sim N\left(\mu; \frac{100}{16}\right) \Leftrightarrow \frac{\overline{X} - \mu}{2,5} \sim N(0;1)$$

  Assim, nossa estatistica de teste será

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{2,5} \sim N(0;1)$$

- Nível de significância e região crítica

  Pelo enunciado do problema, o nível de significância é de 5%. Isso significa que a probabilidade de erro tipo I é 0,05. Como visto, o erro tipo I consiste em rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira. Logo,

$$\alpha = \mathrm{P}(\text{rejeitar } H_0 \,|\, H_0 \text{ verdadeira}) = 0,05$$

  Quando H_0 é verdadeira, $\mu = 100$ e, portanto,

$$H_0 \text{ verdadeira} \Longrightarrow Z_0 = \frac{\overline{X} - 100}{2,5} \sim N(0;1)$$

  A lógica do processo de decisão em um teste de hipótese é a seguinte: temos a distribuição da estatistica de teste, supondo H_0 verdadeira. Nesse caso, nossa estatsitica de teste é Z_0 e a distribuição sob H_0 é a normal padrão. Valores observados de Z_0 com pequena probabilidade de ocorrência sob essa hipótese são indicativos de que a hipótese não é verdadeira. Assim, a região crítica consiste nos valores de Z_0 nas caudas da distribuição $N(0,1)$, que são as regiões de pequena probabilidade. Para delimitar essas regiões de pequena probabilidade, usamos o nível de significância e a hipótese alternativa. Como nesse exemplo a hipótese alternativa é bilateral, temos que tomar valores nas duas caudas da distribuição, distribuindo igualmente a probabilidade de erro, que é 5%. Veja a Figura 7.1:

  Então, nossa região crítica consiste em valores observados da estatsitica de teste Z_0 que caem na área sombreada da Figura 7.1. Essa área sombreada é delimitada pelo valor crítico da $N(0,1)$ que deixa 2,5% acima dele, ou seja,

$$RC: \qquad Z_0 > z_{0,025} \qquad \text{ou} \qquad Z_0 < -z_{0,025}$$

  Olhando na tabela da distribuição normal, resulta

$$RC: \qquad Z_0 > 1,96 \qquad \text{ou} \qquad Z_0 < -1,96$$

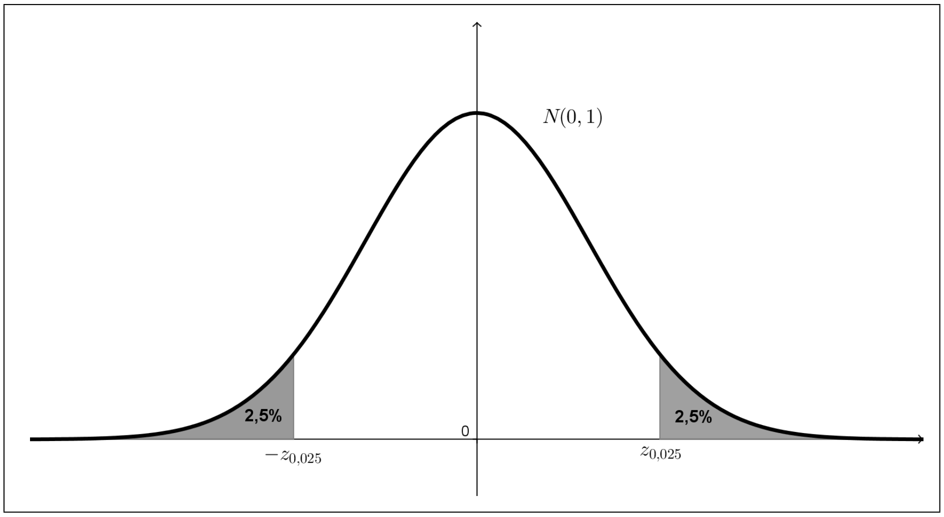


Figura 7.1 – Região crítica para o Exemplo 7.1

- Decisão e conclusão

  Os dados observados fornecem o valor $\overline{x} = 105,5$ minutos, que resulta no seguinte valor da estatística de teste:

$$z_0 = \frac{105,5 - 100}{2,5} = 2,2 > 1,96$$

  Como o valor da estatística de teste para a amostra observada está na região crítica, devemos rejeitar a hipótese nula, ou seja, as evidências amostrais indicam uma alteração do tempo de processamento da tarefa após a pane. ♦♦

EXEMPLO 7.2 Tempo de processamento - parte 2

Na mesma situação do exemplo anterior, é bastante razoável supor que o gerente esteja interessado apenas no caso de aumento do tempo de processamento. Afinal, se o tempo diminuir, isso significa que a tarefa vai ser executada mais rapidamente, o que representa um ganho.

Solução

- Hipóteses Nula e Alternativa

  As duas possibilidades são:

$$\begin{array}{lll} \mu & \leq & 100 \qquad \text{OK!} \\ \mu & > & 100 \qquad \text{Problema!} \end{array}$$

  Seguindo nosso procedimento, temos a seguinte situação:

$$\begin{array}{lll} H_0 & : & \mu = 100 \\ H_1 & : & \mu > 100 \end{array}$$

- Estatistica de teste

  A estatística de teste continua sendo

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - 100}{2,5} \sim N(0;1)$$

- Nível de significância e região crítica

  O nível de significância é, ainda, 5%. Como antes, valores observados de Z_0 com pequena probabilidade de ocorrência sob H_0 são indicativos de que a hipótese não é verdadeira. Assim, a região crítica consiste nos valores de Z_0 na cauda da distribuição $N(0,1)$, na direção da hipótese alternativa. Agora, a hipótese alternativa é *unilateral à direita* e, portanto, a região crítica consiste nos valores na cauda superior que respondem pela probabilidade de 5% do erro tipo I. Veja a Figura 7.2:

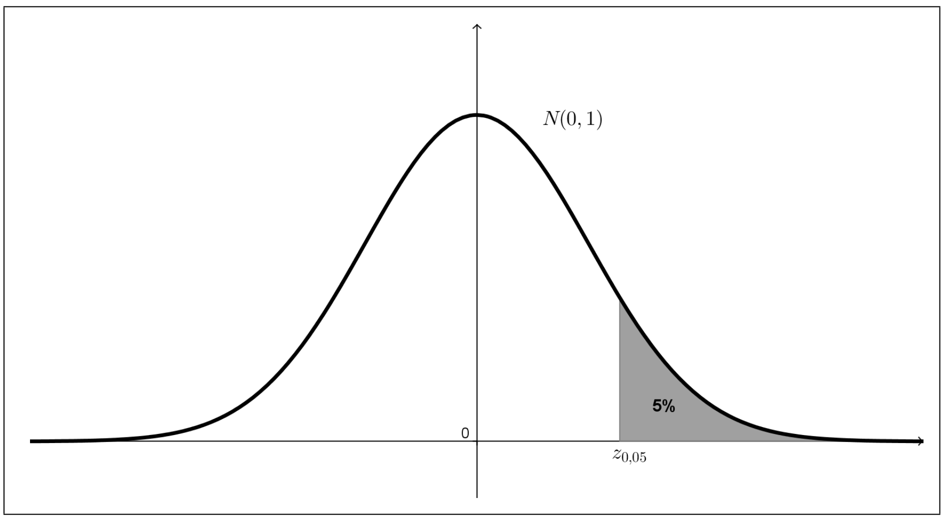


Figura 7.2 – Região crítica para o Exemplo 7.2

Então, nossa região crítica consiste em valores observados da estatsitica de teste Z_0 que caem na área sombreada da Figura 7.2. Essa área sombreada é delimitada pelo valor crítico da $N(0,1)$ que deixa 5% acima dele, ou seja,

$$RC: \qquad Z_0 > z_{0,05}$$

Olhando na tabela da distribuição normal, resulta

$$RC: \qquad Z_0 > 1,64$$

- Decisão e conclusão

  O valor da estatística de teste não se altera:

$$z_0 = \frac{105,5 - 100}{2,5} = 2,2 > 1,64$$

e como antes, devemos rejeitar a hipótese nula, ou seja, as evidências amostrais indicam um aumento do tempo de processamento da tarefa após a pane. ♦♦

EXEMPLO 7.3 Proporção de alunos

Uma pesquisa foi realizada com alunos da UFF visando, entre outras coisas, estimar a proporção dos alunos que têm conhecimento do Regulamento dos Cursos de Graduação dessa universidade (dados fictícios). Foram entrevistados 952 alunos, selecionados aleatoriamente, dos quais 132 afirmaram ter lido o Regulamento dos Cursos de Graduação. Suponha que a universidade decida lançar uma campanha de esclarecimento se a verdadeira proporção de alunos que conhecem o regulamento for inferior a 15%. Há razão para se lançar essa campanha? Justifique sua resposta através de um teste de hipótese com nível de significância de 5%.

Solução

Nosso problema agora é fazer um reste de hipótese sobre uma *proporção populacional*. Vimos que a proporção amostral é um bom estimador da proporção populacional e, para amostras grandes,

$$\widehat{P} \approx N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

- Hipóteses nula e alternativa

  Afirmativa dada: $p < 0,15$
  Complementar: $p \geq 0,15$

  Isso nos leva às seguintes hipóteses:

$$\begin{aligned} H_0 : &\quad p = 0,15 \\ H_1 : &\quad p < 0,15 \end{aligned}$$

- Estatistica de teste

  Sob a hipótese de que H_0 é verdadeira,

$$Z_0 = \frac{\widehat{P} - 0,15}{\sqrt{\frac{0,15 \times (1-0,15)}{952}}} \approx N(0,1)$$

- Nível de significância e região crítica

  O nível de significância é 5%. Como antes, valores observados de Z_0 com pequena probabilidade de ocorrência sob H_0 são indicativos de que a hipótese não é verdadeira. Assim, a região crítica consiste nos valores de Z_0 na cauda da distribuição $N(0,1)$, na direção da hipótese alternativa. Agora, a hipótese alternativa é *unilateral à esquerda* e, portanto, a região crítica consiste nos valores na cauda inferior que respondem pela probabildiade de 5% do erro tipo I. Veja a Figura 7.3:

  Então, nossa região crítica consiste em valores observados da estatsitica de teste Z_0 que caem na área sombreada da Figura 7.2. Essa área sombreada é delimitada pelo valor crítico da $N(0,1)$ que deixa 5% abaixo dele, ou seja,

$$RC: \quad Z_0 < -z_{0,05}$$

  Olhando na tabela da distribuição normal, resulta

$$RC: \quad Z_0 < -1,64$$

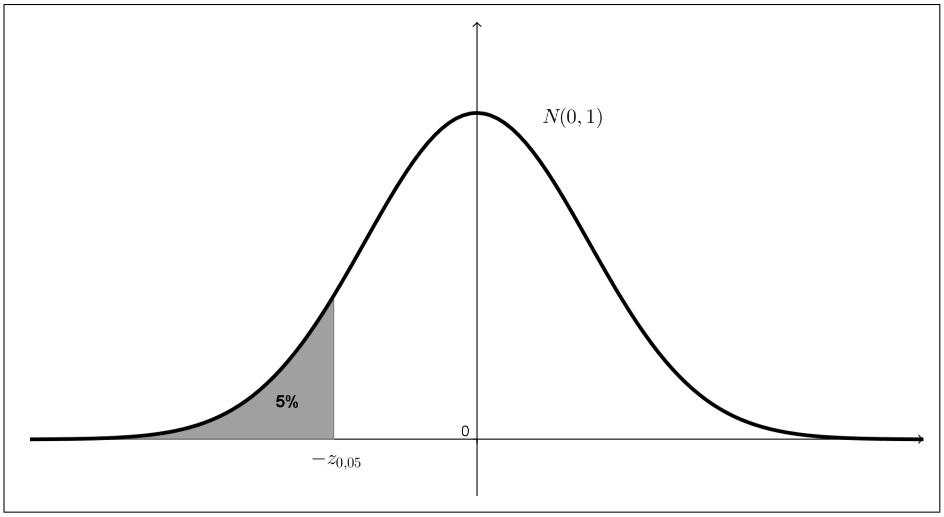


Figura 7.3 – Região crítica para o Exemplo 7.3

- Decisão e conclusão

  O valor da estatística de teste é

$$z_0 = \frac{\frac{132}{952} - 0,15}{\sqrt{\frac{0,15\times(1-0,15)}{952}}} = -0,9803 \nless -1,64$$

  O valor observado da estatística de teste não está na região crítica; logo, deixamos de rejeitar a hipótese nula, ou seja, não há razão para se lançar a campanha de esclarecimento.

♦♦

7.2 Teste de hipótese sobre a média de uma $N(\mu;\sigma^2)$: procedimento geral para σ^2 conhecida

Os dois primeiros exemplos anteriores ilustram o procedimento para construção de um teste de hipótese sobre a média de uma população normal com variância conhecida. De posse de uma amostra aleatória simples $X_1, X_2, \ldots, X_n$ extraída de uma população $X \sim N(\mu;\sigma^2)$, nosso interesse está em testar a hipótese nula

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

a um nível de significância α.

Dependendo do conhecimento sobre o problema, a hipótese alternativa pode tomar uma das três formas:

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \qquad H_1 : \mu > \mu_0 \qquad H_1 : \mu < \mu_0$$

Em qualquer dos casos, a estatística de teste baseia-se na média amostral; se a variância σ^2 é conhecida, sabemos que

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

A região crítica é estabelecida em função do nível de significância, que é a probabilidade α do erro tipo I:

$$\alpha = \mathrm{P}(\text{rejeitar } H_0 \,|\, H_0 \text{ verdadeira})$$

Quando H_0 é verdadeira, $\mu = \mu_0$ e, portanto,

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$$

Valores observados de Z_0 com pequena probabilidade de ocorrência sob H_0 são indicativos de que a hipótese não é verdadeira. Assim, a região crítica consiste nos valores de Z_0 na(s) cauda(s) da distribuição $N(0,1)$, na direção da hipótese alternativa.

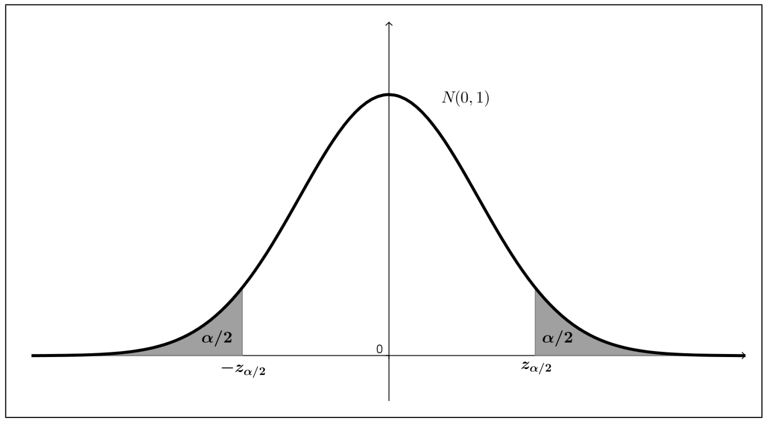
A seguir apresentamos os resultados para cada uma das possiveis hipóteses alternativas.

- Teste bilateral

$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$Z_0 = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Região crítica:
$Z_0 < -z_{\alpha/2}$ ou $Z_0 > z_{\alpha/2}$

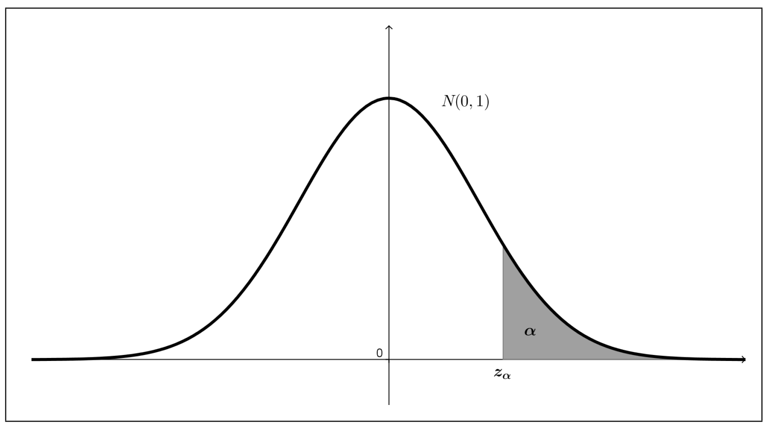


- Teste unilateral à direita

$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu > \mu_0$

$$Z_0 = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Região crítica:
$Z_0 > z_\alpha$

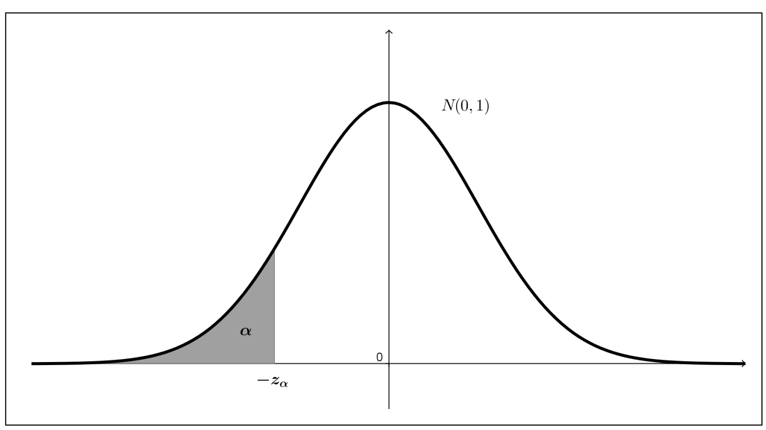


- Teste unilateral à esquerda

$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu < \mu_0$

$$Z_0 = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Região crítica:
$Z_0 < -z_\alpha$



7.3 Teste de hipótese sobre uma proporção populacional: procedimento geral para grandes amostras

O Exemplo 7.3 acima ilustra o procedimento para construção de um teste de hipótese sobre uma proporção populacional p. De posse de uma *grande* amostra aleatória simples $X_1, X_2, \ldots, X_n$ extraída de uma população $X \sim Bern(p)$, nosso interesse está em testar a hipótese nula

$$H_0 : p = p_0$$

a um nível de significância α.

Dependendo do conhecimento sobre o problema, a hipótese alternativa pode tomar uma das três formas:

$$H_1 : p \neq p_0 \qquad H_1 : p > p_0 \qquad H_1 : p < p_0$$

Em qualquer dos casos, a estatística de teste baseia-se na proporção amostral; para grandes amostras, sabemos que

$$Z = \frac{\widehat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \approx N(0, 1)$$

A região crítica é estabelecida em função do nível de significância, que é a probabilidade α do erro tipo I:

$$\alpha = \mathrm{P}(\text{rejeitar } H_0 \,|\, H_0 \text{ verdadeira})$$

Quando H_0 é verdadeira, $p = p_0$ e, portanto,

$$Z_0 = \frac{\widehat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \approx N(0, 1)$$

Valores observados de Z_0 com pequena probabilidade de ocorrência sob H_0 são indicativos de que a hipótese não é verdadeira. Assim, a região crítica consiste nos valores de Z_0 na(s) cauda(s) da distribuição $N(0, 1)$, na direção da hipótese alternativa.

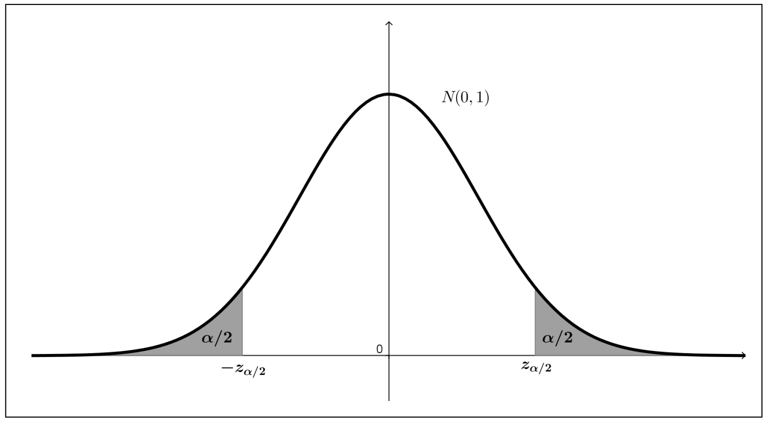
A seguir apresentamos os resultados para cada uma das possiveis hipóteses alternativas.

- Teste bilateral

$H_0 : p = p_0$
$H_1 : p \neq p_0$

$$Z_0 = \frac{\widehat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \approx N(0,1)$$

Região crítica:
$Z_0 < -z_{\alpha/2}$ ou $Z_0 > z_{\alpha/2}$

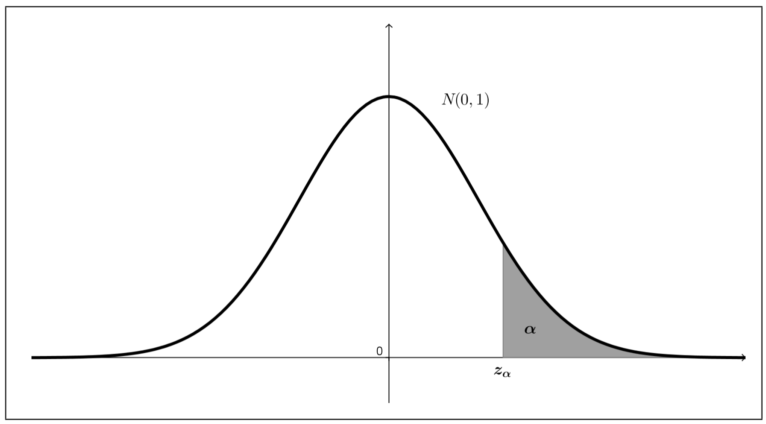


- Teste unilateral à direita

$H_0 : p = p_0$
$H_1 : p > p_0$

$$Z_0 = \frac{\widehat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \approx N(0,1)$$

Região crítica:
$Z_0 > z_{\alpha}$

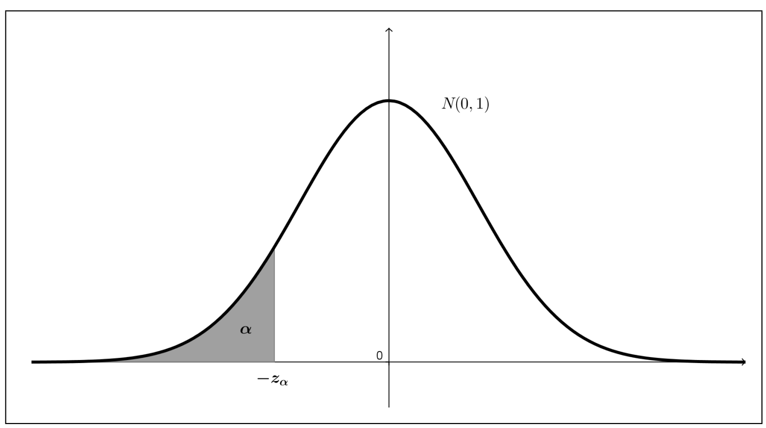


- Teste unilateral à esquerda

$H_0 : p = p_0$
$H_1 : p < p_0$

$$Z_0 = \frac{\widehat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \approx N(0,1)$$

Região crítica:
$Z_0 < -z_{\alpha}$



7.4 Valor P

Nos exemplos anteriores, a determinação da região crítica foi feita com base no nível de significância, isto é, fixado o nível de significância, encontramos o valor crítico que definia os limites entre valores prováveis (aqueles que levam à não-rejeição de H_0) e pouco prováveis (aqueles que levam à rejeição de H_0).

Um outro procedimento bastante usual, especialmente quando são utilizados programas computacionais, consiste em calcular a probabilidade de se obter um valor tão ou mais extremo que o valor observado, se H_0 for verdadeira. "Tão ou mais extremo" é sempre no sentido da hipótese alternativa, ou seja, no sentido de se rejeitar a hipótese nula. Essa probabilidade é chamada valor P. Vamos ilustrar esse conceito considerando novamente os três exemplos anteriores.

EXEMPLO 7.4 Valor P para o Exemplo 7.1

O valor observado da estatistica de teste é $z_0 = 2,2$ e a hipótese alternativa é bilateral. Então, consideramos igualmente extremo o valor simétrico $-2,2$, ou seja, tão ou mais extremo significa ser maior que $2,2$, ou menor que $-2,2$ e o valor P é

$$P = \mathrm{P}(Z > 2,2) + \mathrm{P}(Z < -2,2) = 2 \times \mathrm{P}(Z > 2,2) = 2 \times [0,5 - tab(2,2)] = 0,0278$$

Na Figura 7.4 ilustra-se esse valor. O que esse resultado está nos dizendo é o seguinte: se H_0 for verdadeira, a probabilidade de obtermos um valor tão extremo quanto 2,2 na direção da hipótese altervativa, ou seja, em qualquer direção, já que H_1 é bilateral, é $0,0278$. Essa é uma probabilidade pequena, o que significa que é pouco provável obtermos um valor tão extremo quando H_0 é verdadeira. Logo, é razoável supormos que a hipótese nula não seja verdadeira, a mesma conclusão obtida ao trabalharmos com o nível de significância de 5%.

Na verdade, rejeitaríamos a hipótese nula para qualquer nível de significância maior que 0,0278. Note que tais níveis de significância implicariam em valores críticos menores do que o valor observado z_0 e, portanto, levariam à rejeição de H_0.

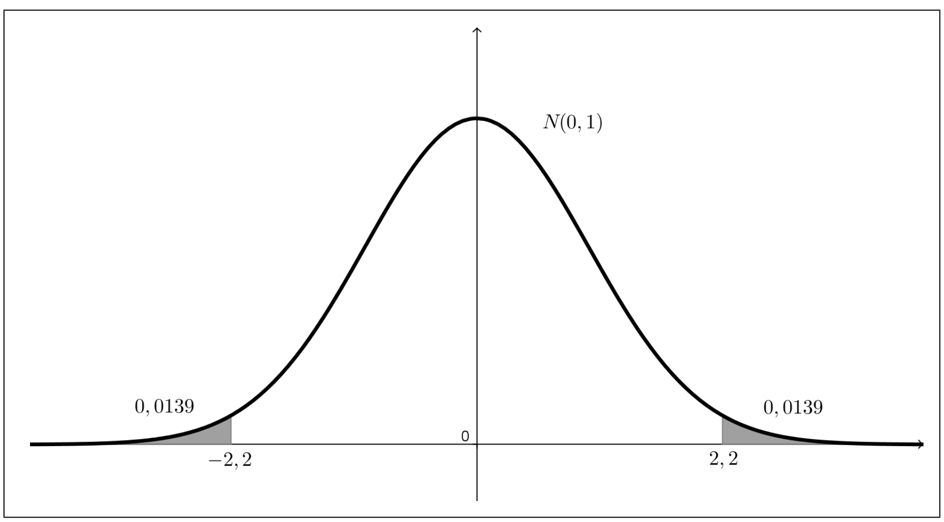


Figura 7.4 – Valor P para o Exemplo 7.1

♦♦

EXEMPLO 7.5 Valor P para o Exemplo 7.2

Como antes, o valor observado da estatistica de teste é $z_0 = 2,2$, mas agora a hipótese alternativa é unilateral à direita. Então, valores tão ou mais extremos são aqueles maiores que $2,2$ e o valor P é

$$P = \mathrm{P}(Z > 2,2) = 0,5 - tab(2,2) = 0,0139$$

Na Figura 7.5 ilustra-se esse valor. O que esse resultado está nos dizendo é o seguinte: se H_0 for verdadeira, a probabilidade de obtermos um valor tão oui mais extremo que 2,2 é $0,0139$. Novamente, essa é uma probabilidade pequena, o que significa que é pouco provável obtermos um valor tão extremo quando H_0 é verdadeira. Logo, é razoável supormos que a hipótese nula não seja verdadeira, a mesma conclusão obtida ao trabalharmos com o nível de significância de 5%. Como antes, rejeitaríamos a hipótese nula para qualquer nível de significância maior que 0,0139.

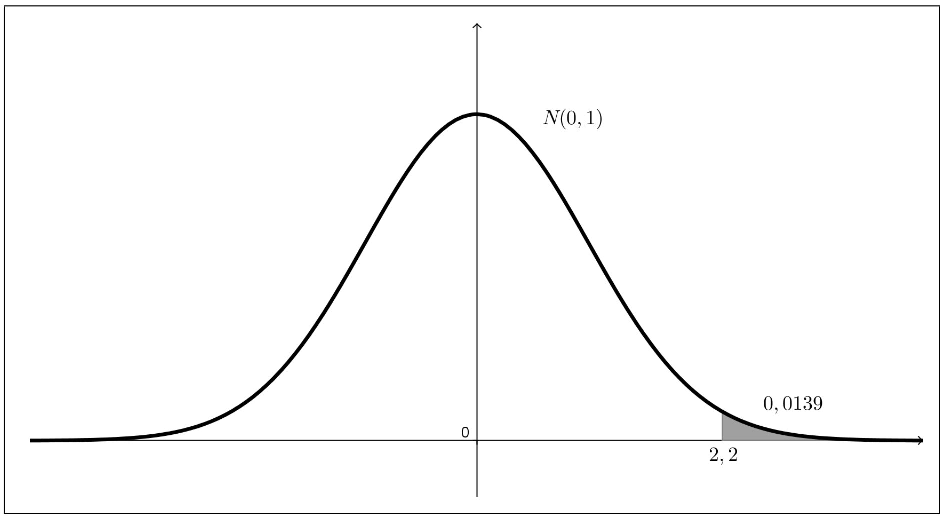


Figura 7.5 – Valor P para o Exemplo 7.2

♦♦

EXEMPLO 7.6 Valor P para o Exemplo 7.3

O valor observado da estatistica de teste é $z_0 = -0,9803$, e a hipótese alternativa é unilateral à esquerda. Então, valores tão ou mais extremos são aqueles menores que $-0,9803$ e o valor P é

$$P = \mathrm{P}(Z < -0,9803) = \mathrm{P}(Z > 0,9803) = 0,5 - tab(0,98) = 0,1635$$

Na Figura 7.6 ilustra-se esse valor. O que esse resultado está nos dizendo é o seguinte: se H_0 for verdadeira, há uma probabilidade alta de obtermos um valor tão ou mais extremo que $-0,9803$. Assim, não há evidência que indique que H_0 seja falsa.

♦♦

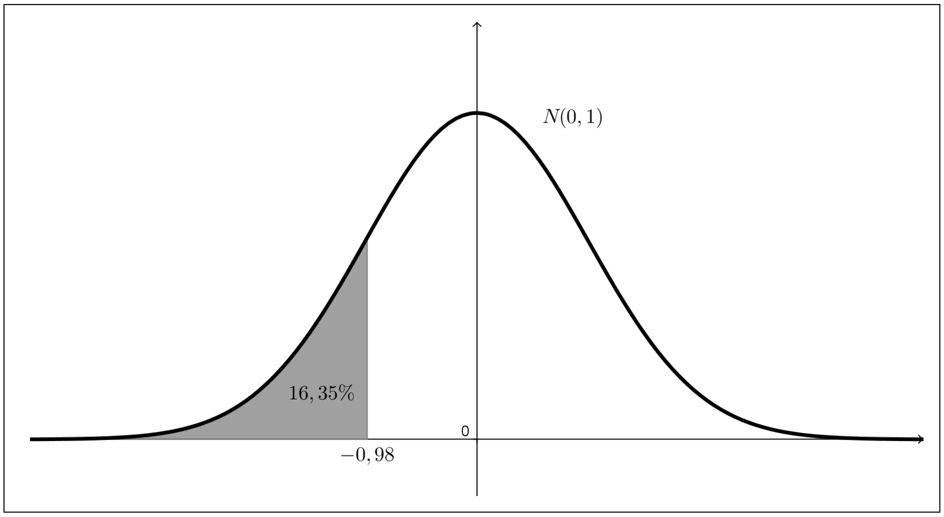


Figura 7.6 – Valor P para o Exemplo 7.3

7.4.1 Procedimento geral para obtenção do valor P

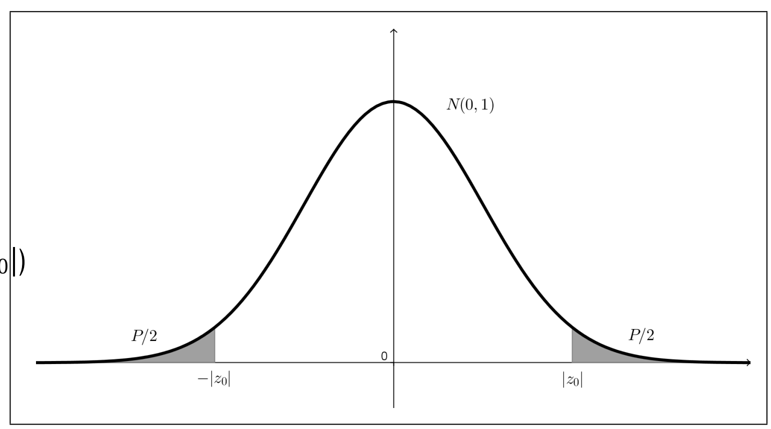
Os exemplos acima ilustram o procedimento para obtenção do valor P quando a estatistica de teste tem distribuição normal. Como essa é uma distribuição simétrica, podemos sempre calcular o valor P trabalhando na cauda superior da distribuição normal padrão; para isso, basta usar o valor absoluto $|z_0|$ do valor observado da estatística de teste.

- Teste bilateral

$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$P = \mathrm{P}(Z < -|z_0|) + \mathrm{P}(Z > |z_0|)$$

$$P = 2 \times \mathrm{P}(Z > |z_0|)$$



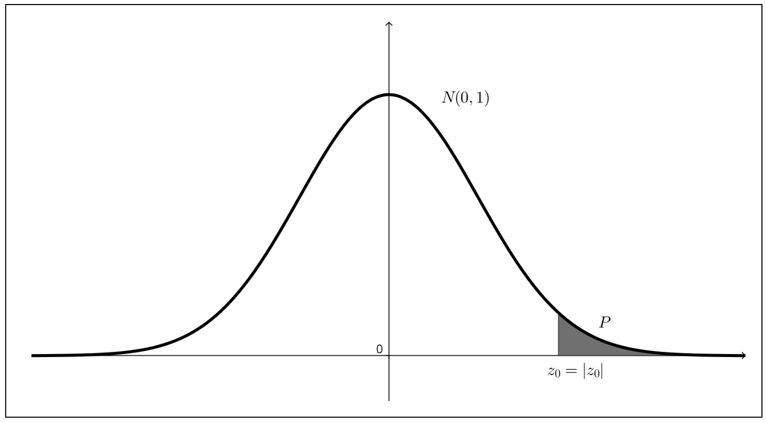
- Teste unilateral à direita

  Podemos supor que $z_0 > 0$. Caso contrário, o valor P será maior que $0,5$, o que leva à não rejeição de H_0 para qualquer nível de significância razoável.

$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu > \mu_0$

$P = \mathrm{P}(Z > z_0)$

$P = \mathrm{P}(Z > |z_0|)$



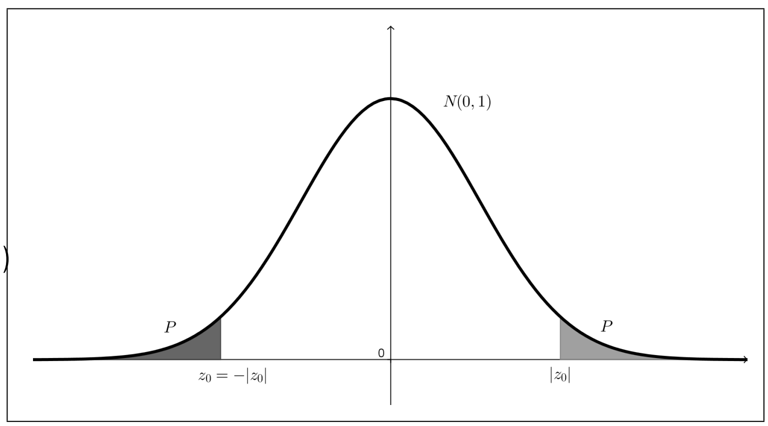
- Teste unilateral à esquerda

  Podemos supor que $z_0 < 0$. Caso contrário, o valor P será maior que $0,5$, o que leva à não rejeição de H_0 para qualquer nível de significância razoável.

$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu < \mu_0$

$P = \mathrm{P}(Z < z_0) = \mathrm{P}(Z < -|z_0|)$

$P = \mathrm{P}(Z > |z_0|)$



7.4.2 Valor P e nível de significância

Vimos que o nível de significância α é a probabilidade do erro tipo I e o valor crítico correspondente delimita a região de rejeição, ou seja, valores da estatistica de teste que caem na região crítica levam à rejeição de H_0. O valor P, por sua vez, é a probabilidade de se obter valores tão estremos quanto o observado e essa probabilidade, sendo pequena, leva à rejeição da hipótese nula.

Como podemos, então, relacionar o valor P e o nível de significância α em termos do processo decisório? Veja a Figura 7.7, onde ilustramos a situação para um teste unilateral à direita. Qualquer valor z_0 maior que z_α leva à rejeição de H_0. Mas tais valores correspondem a probabilidades menores na cauda da distribuição, ou seja, correspondem a valores P menores que α. Isso nos leva à seguinte observação:

! Valor P *versus* nível de significância

O valor P é o menor nível de significância para o qual a hipótese nula H_0 é rejeitada, ou seja,

$$\text{rejeitamos } H_0 \Leftrightarrow P \leq \alpha$$

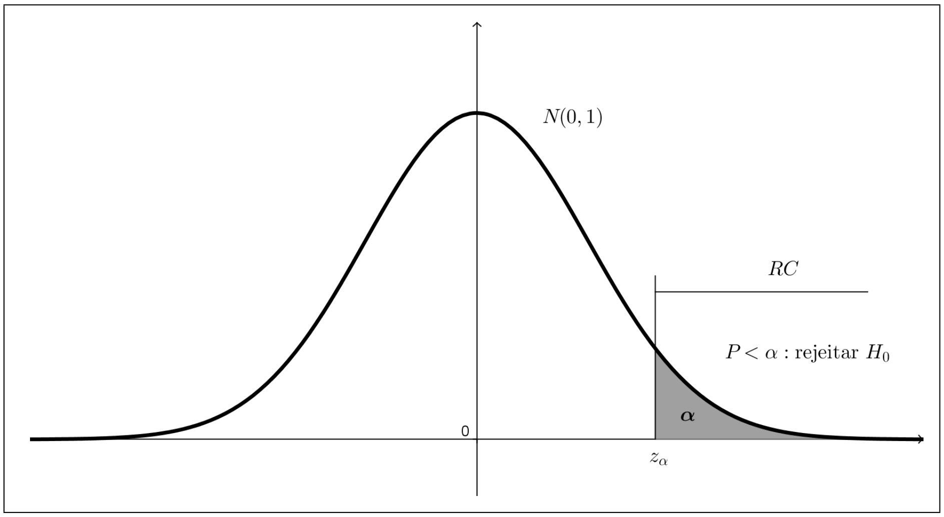


Figura 7.7 – Valor P *versus* nível de significância

EXEMPLO 7.7 Peso de bala

Uma empresa fabricante de balas afirma que o peso médio de suas balas é de pelo menos 2 gramas. Pela descrição do processo de produção, sabe-se que o peso das balas distribui-se normalmente com desvio padrão de 0,5 grama. Uma amostra de 25 balas apresenta peso médio de 1,81 gramas. O que se pode concluir sobre a afirmação do fabricante? Estabeleça sua conclusão usando um nível de significância de 5% e também o valor P.

Solução

Seja X a variável aleatória que representa o peso das balas. Então, $X \sim N(\mu; 0,25)$. Como $n = 25$, resulta que

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{0,25}{25}}} \sim N(0,1)$$

A afirmativa do fabricante é $\mu \geq 2$. Logo, a negação de tal afirmação é $\mu < 2$. Como essa última expressão não contém o sinal de igualdade, ela se torna a hipótese alternativa. Então, nossas hipóteses são:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 2 \\ H_1 &: \mu < 2 \end{aligned}$$

Para $\alpha = 0,05$, a região crítica é

$$RC : Z_0 < -z_{0,05} = -1,64$$

O valor observado da estatística de teste é

$$z_0 = \frac{1,81 - 2,00}{\sqrt{\frac{0,25}{25}}} = -1,9 < -1,64$$

Como o valor observado da estatistica de teste está na região crítica, rejeita-se a hipótese nula, ou seja, há evidência de que o peso médio seja menor que 2 gramas.

Temos também que

$$P = \mathrm{P}(Z > |-1,9|) = 0,5 - tab(1,9) = 0,0287$$

Assim, rejeitaríamos H_0 para qualquer nível de significância maior que 2,87%, o que inclui 5%.

♦♦

7.5 Exercícios propostos

1. Uma amostra aleatória simples de tamanho $n = 9$ extraída de uma população normal com desvio padrão 3,1 apresentou média igual a $\overline{x} = 13,35$. Deseja-se testar

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 12,8 \\ H_1 &: \mu \neq 12,8 \end{aligned}$$

   (a) Determine a região crítica correspondente ao nível de significância $\alpha = 0,02$.

   (b) Com base na região crítica encontrada no item anterior, estabeleça a conclusão, tendo o cuidado de usar um fraseado que não seja puramente técnico.

   (c) Calcule o valor P e interprete o resultado obtido.

2. O gerente de uma empresa fabricante de balas afirma que o peso médio de suas balas é de pelo menos 2 gramas. Pela descrição do processo de produção, sabe-se que o peso das balas distribui-se normalmente com desvio padrão de 0,5 grama. Uma amostra de 25 balas apresenta peso médio de 1,98 gramas. O que se pode concluir sobre a afirmação do fabricante? Use um nível de significância de 5%.

3. Em uma linha de produção, peças são produzidas de modo que o comprimento seja normalmente distribuído com desvio padrão de 0,5 cm. Ajustes periódicos são feitos na máquina para garantir que as peças tenham comprimento apropriado de 15 cm, pois as peças muito curtas não podem ser aproveitadas (as peças longas podem ser cortadas). A cada hora são extraídas 9 peças da produção, medindo-se seu comprimento. Estabeleça uma regra de decisão para definir se o processo está operando adequadamente. Use o nível de significância de 0,1%.

4. Depois de desenvolver um algoritmo para acelerar a execução de determinada tarefa rotineira em um escritório de contabilidade, o analista de sistema analisa uma amostra de 25 tempos, obtendo uma média 46,5 segundos. Dos dados passados, ele sabe que o tempo de execução é aproximadamente normal com média de 48,5 segundos e desvio padrão de 5 segundos. Use o método do valor P para decidir se o algoritmo do analista realmente melhorou o desempenho do sistema.

5. Uma propaganda afirma que o consumo médio de gasolina de determinada marca de automóvel é de 12 litros por 100 quilômetros rodados, com desvio padrão de 1,0 litro. Um teste com 36 automóveis desta marca acusa um consumo médio de 12,4 litros por 100 quilômetros rodados. O que se pode concluir sobre a propaganda?

6. Em uma pesquisa com 800 estudantes universitários, 385 afirmaram possuir computador. Teste a hipótese de que pelo menos 50% dos estudantes universitários possuem computador. Use $\alpha = 0,10$.

7. Uma pesquisa entre 700 trabalhadores revela que 12,3% obtiveram seus empregos através de indicações de amigos ou parentes. Teste a hipótese de que mais de 10% dos trabalhadores conseguem seus empregos por indicação de amigos ou parentes, utilizando 5% como nível de significância.

8. O nível de aprovação da qualidade das refeições servidas em um restaurante universitário era de 20%, quando houve uma movimentação geral dos estudantes que forçou a direção do restaurante a fazer mudanças. Feitas as mudanças, sorteia-se uma amostra de 64 estudantes usuários do restaurante e 25 aprovam a qualidade da comida. Você diria, ao nível de significância de 5%, que as mudanças surtiram efeito?

9. Deseja-se testar a honestidade de uma moeda. Para isso, lança-se a moeda 200 vezes, obtendo-se 115 caras. Qual é a sua conclusão sobre a honestidade da moeda? Para responder a essa questão, calcule e interprete o valor P.

10. A direção de um grande jornal nacional afirma que 25% dos seus leitores são da classe A. Se, em uma amostra de 740 leitores, encontramos 156 da classe A, qual é a conclusão que tiraríamos sobre a afirmativa da direção do jornal?

Capítulo 8

Teste de hipótese sobre a média da $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 desconhecida

8.1 Procedimento geral

O procedimento de teste de hipóteses sobre a média de uma população normal quando a variância não é conhecida é absolutamente análogo ao caso em que conhecemos σ^2. A mudança diz respeito à estatistica de teste e sua distribuição, que agora passam a ser

$$T_0 = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{S} \sim t(n-1)$$

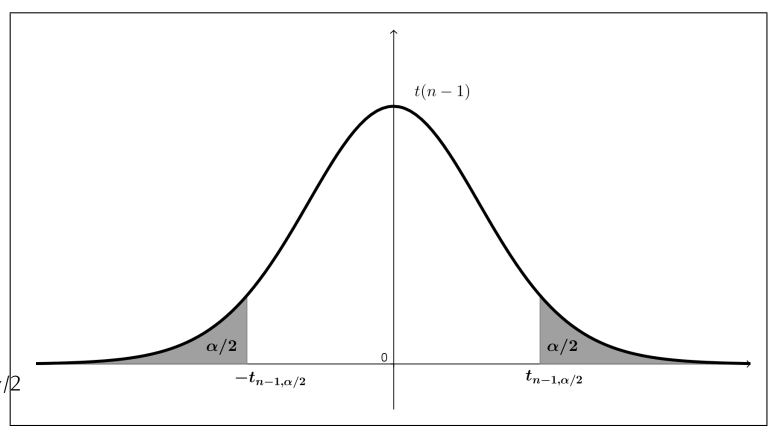
A seguir apresentamos os resultados pertinentes para cada um dos tipos de hipótese alternativa.

- Teste bilateral

$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$T_0 = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{S} \sim t(n-1)$$

Região crítica:
$T_0 < -t_{n-1,\alpha/2}$ ou $T_0 > t_{n-1,\alpha/2}$

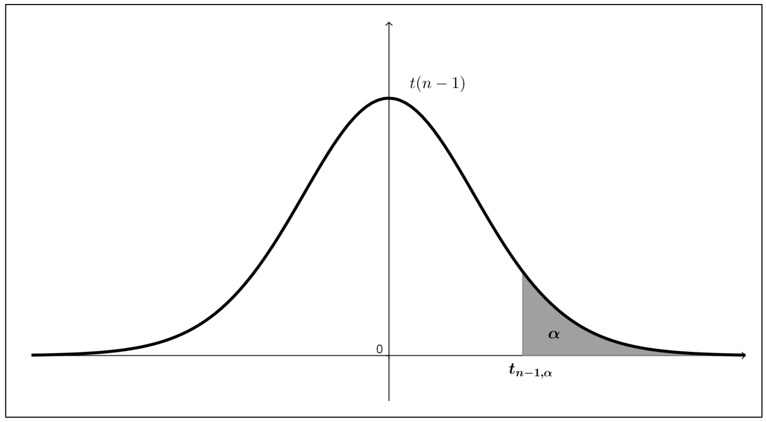


- Teste unilateral à direita

$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu > \mu_0$

$$T_0 = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{S} \sim t(n-1)$$

Região crítica:
$T_0 > t_{n-1,\alpha}$

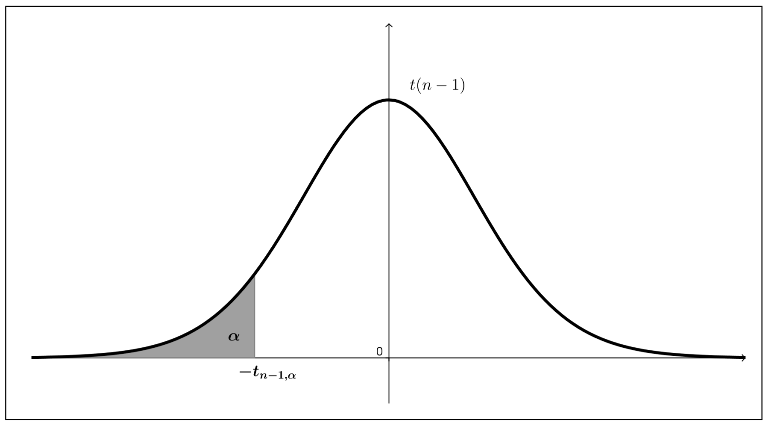


- Teste unilateral à esquerda

$H_0 : \mu = \mu_0$
$H_1 : \mu < \mu_0$

$$T_0 = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{S} \sim t(n-1)$$

Região crítica:
$T_0 < -t_{n-1,\alpha}$



A definição do valor P é exatamente a mesma, mas para o cálculo exato é necessário um programa computacional. A partir da Tabela 2 do Apêndice, podemos obter apenas limites para o valor P, conforme ilustrado nos exemplos a seguir.

EXEMPLO 8.1

Depois de uma pane geral no sistema de informação de uma empresa, o gerente administrativo deseja saber se houve alteração no tempo de processamento de determinada atividade. Antes da pane, o tempo de processamento podia ser aproximado por uma variável aleatória normal com média de 100 minutos. Uma amostra de 16 tempos de processamento após a pane revela uma média $\overline{x} = 105,5$ minutos e um desvio padrão $s = 10$ minutos. Ao nível de significância de 5%, qual é a conclusão sobre a alteração do tempo médio de processamento?

Solução

Como visto, as hipóteses do problema são

$$\begin{aligned} \mu &= 100 \\ \mu &\neq 100 \end{aligned}$$

Como a segunda expressão não envolve o sinal de igualdade, ela se torna a hipótese alternativa:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 100 \\ H_1 &: \mu \neq 100 \end{aligned}$$

Como a variância não é conhecida, temos que usar a distribuição t de Student com $n-1 = 16-1 = 15$ graus de liberdade. Para um teste bilateral com nível de significância de 5%, a abscissa de interesse é aquela que deixa área de 0,025 acima. Consultando a Tabela 2 dada no final desta apostila, resulta

$$t_{15;\,0,025} = 2,131$$

A estatística de teste é

$$T_0 = \frac{\overline{X} - 100}{\frac{10}{\sqrt{16}}} \sim t(15)$$

e a região crítica é

$$T_0 > 2,131 \text{ ou } T_0 < -2,131$$

O valor observado da estatística de teste é

$$t_0 = \frac{105,5 - 100}{\frac{10}{\sqrt{16}}} = 2,2$$

Como esse valor pertence à região crítica, rejeitamos a hipótese nula e concluímos que houve alteração no tempo de processamento após a pane.

O valor P é, por definição,

$$P = 2 \times \mathrm{P}(t_{15} > 2,2)$$

Olhando na tabela na linha correspondente a 15 graus de liberdade, vemos que o valor 2,2 está entre 2,131 e 2,602, que correspondem às probabilidades 0,025 e 0,01. Logo

$$0,01 < \mathrm{P}(t_{15} > 2,2) < 0,025 \Rightarrow 0,02 < P < 0,05$$

O valor exato é $P = 0,0439$.

♦♦

EXEMPLO 8.2

Na mesma situação do exemplo anterior, vamos considerar o caso em que o gerente esteja interessado apenas no aumento do tempo de processamento. Neste caso, as hipóteses são:

$$\begin{aligned} \mu &\leq 100 \qquad \text{OK!} \\ \mu &> 100 \qquad \text{Problema!} \end{aligned}$$

Para definir qual é a hipótese nula, vamos usar o mesmo procedimento. Em um teste unilateral, a hipótese alternativa deve ser aquela que não envolve o sinal de igualdade. No nosso exemplo, essa é a hipótese $\mu > 100$. A hipótese nula, tendo que ser uma hipótese simples, passa a ser $\mu = 100$, ou seja:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 100 \\ H_1 &: \mu > 100 \end{aligned}$$

Como antes, a estatística de teste é

$$T_0 = \frac{\overline{X} - 100}{\frac{10}{\sqrt{16}}} \sim t(15)$$

mas a região crítica passa a ser

$$T_0 > t_{15;\,0,05}$$

Consultando a tabela da distribuição t, resulta que

$$t_{15;\,0,05} = 1,753$$

o que nos leva aà região crítica

$$T_0 > 1,753$$

Novamente rejeitamos a hipótese nula, ou seja, as evidências amostrais indicam um aumento do tempo de processamento da tarefa após a pane.

O valor P é, agora

$$P = \mathrm{P}(t_{15} > 2,2)$$

e, portanto

$$0,01 < P < 0,025$$

O valor exato é $P = 0,0219$.

♦♦

EXEMPLO 8.3

O dono de uma média empresa decide investigar a alegação de seus empregados de que o salário médio na sua empresa é menor que o salário médio nacional. Para isso, ele analisa uma amostra de 25 salários, obtendo uma média de 894,53 reais e desvio padrão de 32 reais. De informações obtidas junto ao sindicato patronal, ele sabe que, em nível nacional, o salário médio é de 900 reais. Supondo que seja razoável aproximar a distribuição dos salários por uma distribuição normal, vamos construir um teste de hipótese apropriado, com um nível de significância de 10%.

Solução

O problema aqui consiste em decidir se os salários são menores ou não do que a média nacional de 900 reais, ou seja, as situações de interesse são

$$\begin{aligned} \mu &< 900 \\ \mu &\geq 900 \end{aligned}$$

Como no exemplo anterior, a hipótese alternativa é aquela que não envolve o sinal de igualdade. Logo, nossas hipóteses são:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 900 \\ H_1 &: \mu < 900 \end{aligned}$$

A região crítica é definida em termos da estatística de teste

$$T_0 = \frac{\overline{X} - 900}{\frac{32}{\sqrt{25}}} \sim t(24)$$

como

$$T_0 < -t_{24;\,0,10}$$

Com nível de significância de 10%, a abscissa de interesse é aquela que deixa área de 10% acima dela em uma distribuição t com 24 graus de liberdade:

$$t_{24;0,10} = 1,318$$

Logo, a região crítica é

$$T_0 < -1,318$$

O valor observado da estatistica de teste é

$$t_0 = \frac{894,53 - 900}{\frac{32}{\sqrt{25}}} = -0,8547$$

que não está na região crítica. Logo, não rejeitamos H_0, ou seja, as evidências amostrais apontam que os salários da empresa não são menores que a média nacional.

O valor P é

$$P = \mathrm{P}(t_{24} < -0,8547) = \mathrm{P}(t_{24} > 0,8547)$$

e, pela Tabela 2, podemos dizer apenas que $P > 0,15$. O valor exato é $P = 0,20058$.

♦♦

8.2 Exercícios propostos

1. Uma empresa fabricante de balas afirma que o peso médio de suas balas é de pelo menos 2 gramas. Pela descrição do processo de produção, sabe-se que o peso das balas distribui-se normalmente. Uma amostra de 25 balas apresenta peso médio de 1,98 gramas e um desvio padrão de 0,5 grama. O que se pode concluir sobre a afirmação do fabricante? Use um nível de significância de 5%.

2. Em uma linha de produção, peças são produzidas de modo que o comprimento seja normalmente distribuído. Ajustes periódicos são feitos na máquina para garantir que as peças tenham comprimento apropriado de 15 cm, pois as peças muito curtas não podem ser aproveitadas (as peças longas podem ser cortadas). A cada hora são extraídas 9 peças da produção, medindo-se seu comprimento. Uma dessas amostras apresenta comprimento médio de 14,5 cm e desvio padrão de 0,5 cm. Use o nível de significância de 0,1% para testar a hipótese de que o processo esteja operando adequadamente.

3. Depois de desenvolver um algoritmo para acelerar a execução de determinada tarefa rotineira em um escritório de contabilidade, o analista de sistema analisa uma amostra de 25 tempos, obtendo uma média 46,5 segundos e desvio padrão de 5 segundos. Dos dados passados, ele sabe que o tempo de execução é aproximadamente normal com média de 48,5 segundos. Use o nível de significância de 5% para decidir se o algoritmo do analista realmente melhorou o desempenho do sistema.

4. Uma propaganda afirma que o consumo médio de gasolina de determinada marca de automóvel é de 12 litros por 100 quilômetros rodados. Um teste com 36 automóveis desta marca acusa um consumo médio de 12,4 litros por 100 quilômetros rodados com desvio padrão de 1 litro por quilômetro rodado. O que se pode concluir sobre a propaganda? Use o nível de significância de 10%.

8.3 Exercícios propostos

1. Uma amostra aleatória simples de tamanho $n = 9$ extraída de uma população normal apresentou média igual a $\overline{x} = 13,35$ e desvio padrão $s = 3,1$. Deseja-se testar

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 12,8 \\ H_1 &: \mu \neq 12,8 \end{aligned}$$

   (a) Determine a região crítica correspondente ao nível de significância $\alpha = 0,02$.

   (b) Com base na região crítica encontrada no item anterior, estabeleça a conclusão, tendo o cuidado de usar um fraseado que não seja puramente técnico.

2. Uma empresa fabricante de balas afirma que o peso médio de suas balas é de pelo menos 2 gramas. Pela descrição do processo de produção, sabe-se que o peso das balas distribui-se normalmente. Uma amostra de 25 balas apresenta peso médio de 1,98 gramas e um desvio padrão de 0,5 grama. O que se pode concluir sobre a afirmação do fabricante? Use um nível de significância de 5%.

3. Em uma linha de produção, peças são produzidas de modo que o comprimento seja normalmente distribuído. Ajustes periódicos são feitos na máquina para garantir que as peças tenham comprimento apropriado de 15 cm, pois as peças muito curtas não podem ser aproveitadas (as peças longas podem ser cortadas). A cada hora são extraídas 9 peças da produção, medindo-se seu comprimento. Uma dessas amostras apresenta comprimento médio de 14,5 cm e desvio padrão de 0,5 cm. Use o nível de significância de 0,1% para testar a hipótese de que o processo esteja operando adequadamente.

4. Depois de desenvolver um algoritmo para acelerar a execução de determinada tarefa rotineira em um escritório de contabilidade, o analista de sistema analisa uma amostra de 25 tempos, obtendo uma média 46,5 segundos e desvio padrão de 5 segundos. Dos dados passados, ele sabe que o tempo de execução é aproximadamente normal com média de 48,5 segundos. Use o nível de significância de 5% para decidir se o algoritmo do analista realmente melhorou o desempenho do sistema.

5. Uma propaganda afirma que o consumo médio de gasolina de determinada marca de automóvel é de 12 litros por 100 quilômetros rodados. Um teste com 36 automóveis desta

marca acusa um consumo médio de 12,4 litros por 100 quilômetros rodados com desvio padrão de 1 litro por quilômetro rodado. O que se pode concluir sobre a propaganda? Use o nível de significância de 10%.

Capítulo 9

Teste de hipótese sobre a variância da $N(\mu; \sigma^2)$

Neste capítulo completaremos o estudo de teste de hipótese sobre parâmetros de uma população, analisando o caso da variância de uma população normal. Assim como na construção de intervalos de confiança, nossa estatística de teste tem distribuição qui-quadrado e a região crítica, como antes, será formada pelos valores pouco prováveis desta estatística de teste sob a hipótese nula.

9.1 Procedimento geral

Considere uma população descrita por uma variável aleatória normal com média μ e variância $\sigma^2 : X \sim N(\mu; \sigma^2)$. Nosso interesse é testar hipóteses sobre a a variância σ^2 a partir de uma amostra aleatória simples $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Como visto anteriormente, a estatística

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

tem distribuição qui-quadrado com $n - 1$ graus de liberdade.

De posse desta estatística de teste, o procedimento de construção do teste é idêntico ao visto nos últimos capítulos: identificadas a hipótese nula (sempre na forma de uma hipótese simples $\sigma^2 = \sigma_0^2$) e a hipótese alternativa, a região crítica é formada pelos valores da estatística de teste pouco prováveis sob H_0 . O nível de significância e o tipo de hipótese alternativa permitem a identificação precisa do que são "valores pouco prováveis": são valores na(s) cauda(s) da distribuição de χ^2 quando a hipótese nula é verdadeira.

A hipótese nula que iremos considerar será

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

e a hipótese alternativa pode tomar uma das três formas:

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \qquad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \qquad H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

Como antes, a escolha entre essas três possibilidades se faz com base no conhecimento do problema. Se não temos informação alguma sobre a alternativa, temos que usar um teste bilateral. A escolha entre os dois tipos de hipóteses unilaterais é feita de modo que, ao escrevermos as hipóteses do problema em linguagem simbólica, a hipótese alternativa não inclua o sinal de igualdade.

A regra de decisão consiste em definir a região crítica RC como o conjunto de valores cuja probabilidade de ocorrência é *pequena* sob a hipótese de veracidade de H_0. Logo, nossa regra de decisão se baseia na estatística de teste

$$X_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

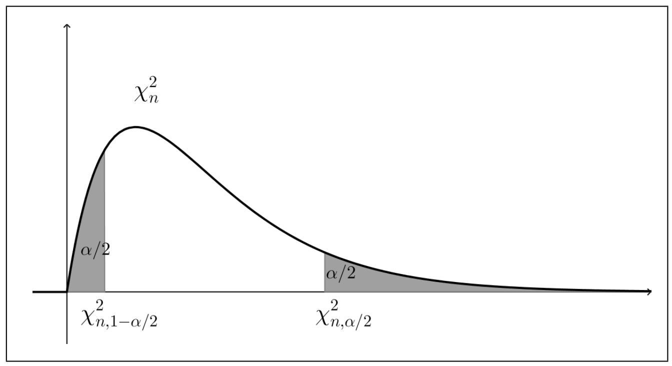
Os valores com pequena probabilidade de ocorrência estão nas caudas da distribuição.

- Teste bilateral

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$
$H_1 : \sigma^2 =\neq \sigma_0^2$

$$X_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Região crítica:
$X_0^2 < \chi^2_{n-1;1-\alpha/2}$ ou $X_0^2 > \chi^2_{n-1,\alpha/2}$

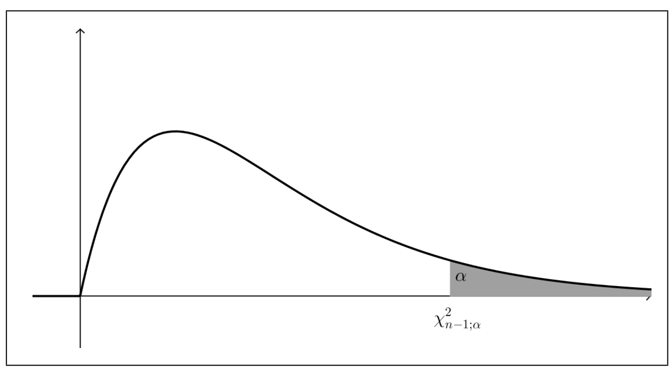


- Teste unilateral à direita

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$
$H_1 : \sigma^2 =\neq \sigma_0^2$

$$X_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Região crítica:
$X_0^2 > \chi^2_{n-1,\alpha}$

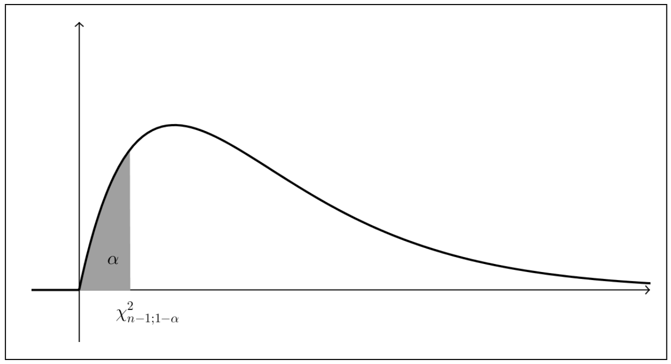


- Teste unilateral à esquerda

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$
$H_1 : \sigma^2 =\neq \sigma_0^2$

$$X_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Região crítica:
$X_0^2 < \chi^2_{n-1,1-\alpha}$



A definição do valor P é exatamente a mesma, mas para o cálculo exato é necessário um programa computacional. A partir da Tabela 4 do Apêndice, podemos obter apenas limites para o valor P, conforme ilustrado nos exemplos a seguir.

EXEMPLO 9.1

Uma amostra aleatória simples de tamanho $n = 16$ foi retirada de uma população normal, obtendo-se $s^2 = 32,1$. Ao nível de significância de 5% pode-se dizer que $\sigma^2 \neq 20$?

Solução

As hipóteses são

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma^2 = 20 \\ H_1 &: \sigma^2 \neq 20 \end{aligned}$$

Com 15 graus de liberdade, teste bilateral e nível de significância de 5%, os valores críticos necessários são

$$\begin{aligned} \chi^2_{15;0,975} &= 6,262 \\ \chi^2_{15;0,025} &= 27,488 \end{aligned}$$

e a região crítica é

$$X_0^2 > 27,488 \qquad \text{ou} \qquad X_0^2 < 6,262$$

O valor observado da estatística de teste é

$$x_0^2 = \frac{15 \times 32,1}{20} = 24,075$$

que não pertence à região crítica. Logo, não se rejeita a hipótese nula, ou seja, não podemos afirmar que $\sigma^2 \neq 20$.

Olhando na Tabela 4, na linha correspondente a 15 graus de liberdade, vemos que 24,075 está entre os valores 22,307 e 24,996, que correspondem às probabilidades 0,10 e 0,05, respectivamente. Logo, o valor $P/2$ é tal que $0,05 < P/2 < 0,10$ e, portanto, $0,10 < P < 0,20$. O valor exato é $P = 0,0,12766$.

EXEMPLO 9.2

O gerente de um posto de abastecimento de combustível muito utilizado por caminhoneiros realiza uma pesquisa entre esses clientes com o objetivo de planejar esquemas de trabalho e de suprimento de diesel. Relatórios do sindicato nacional indicam que a quantidade média de diesel comprada por semana é de 1310 litros, com desvio padrão de 89,4 litros. Para uma amostra de 20 caminhoneiros, o gerente obteve os seguintes dados sobre a quantidade de diesel comprada semanalmente:

1283	1317	1226	1298	1382	1344	1314	1298	1298	1355
1242	1234	1298	1355	1287	1253	1234	1344	1295	1321

(a) Há alguma evidência que sugira que a verdadeira variância populacional no combustível diesel comprado por semana nesse posto seja diferente de 7900 l^2? Suponha normalidade e use $\alpha = 0,01$.

(b) Ache limites para o valor P associado a esse teste de hipótese.

Solução

(a) As hipótese são

$$H_0 : \sigma^2 = 7900$$
$$H_1 : \sigma^2 \neq 7900$$

Os dados fornecem

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 25978 \qquad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 33780632$$

Logo,

$$s^2 = \frac{1}{19}\left(33780632 - \frac{25978^2}{20}\right) = 1989,884211$$

Os valores críticos para o teste de hipótese são $\chi^2_{19;0,005} = 38,582$ e $\chi^2_{19;0,995} = 6,844$ e o valor observado da estatistica de teste é

$$x_0^2 = \frac{19 \times 1989,884211}{7900} = 4,7858$$

Como esse valor está na região crítica, rejeita-se H_0, ou seja, há evidências de que a variãncia seja diferente de 7900 l^2.

(b) Da Tabela 4 do Apêndice, vemos que

$$4,7858 < 4,912$$

Logo, $P/2 < 0,0005$, ou seja, $P < 0,0010$. O valor exato é $P = 0,000825$.

9.2 Exercícios propostos

1. Os dados a seguir são oriundos de uma população normal com variância σ^2 supostamente igual a 36,8.

233,1	226,1	220,3	247,6	232,9	232,8	235,9	232,4
249,4	207,4	231,8	232,1	220,7	229,6	242,5	229,3

   (a) Realize um teste de hipótese apropriado para verificar a veracidade da origem dos dados. Use $\alpha = 0,05$.

   (b) Ache limites para o valor P associado a esse teste de hipótese.

2. Dados históricos indicam que a variância na taxa de câmbio do iene japonês contra o dólar americano é aproximadamente 1,56. Obteve-se uma amostra aleatória de 30 taxas de câmbio de fechamento, que acusou uma variância $s^2 == 2,2$.

   (a) Realize um teste de hipótese para verificar se houve mudança na variância na taxa de câmbio.

   (b) Ache limites para o valor P associado a esse teste de hipótese.

3. O diretor geral de um grande escritório de contabilidade está preocupado com a demora na execução de determinada tarefa e também com a variabilidade dos tempos de execução, uma vez que essa tarefa é executada por diferentes funcionários. Dados históricos revelam que o tempo médio tem sido de 40 minutos, com desvio padrão de 6 minutos. Depois de um intenso treinamento, uma amostra de 14 tempos acusa média de 35,6 minutos e desvio padrão de 3,4 minutos.

   (a) As evidências amostrais indicam que o treinamento foi bem sucedido? Responda a essa pergunta construindo testes de hipóteses apropriados com nível de significância $\alpha = 2,5\%$. Certifique-se de indicar todas as etapas do processo: hipóteses nula e alternativa, estatística de teste e região crítica, limites para os valores P, conclusão em linguagem não técnica e também as suposições teóricas para resolver o problema.

   (b) Construa intervalos de confiança de 95% para os parâmetros populacionais de interesse para refletir a situação depois do treinamento.

Capítulo 10

Solução dos Exercícios

10.1 Capítulo 1

1. (a) Como o valor se refere aos pacientes estudados, e não a *todos* os pacientes, esse é o valor de uma estatística amostral.

   (b) Estatística amostral - foi testada uma amostra

   (c) Parâmetro populacional - a companhia realizou os cálculos com base em todos os clientes

   (d) Parâmetro populacional - o fabricante está se referindo à população de todas as baterias. Embora ele não tenha condições de testar todas as baterias, ele está fazendo uma hipótese sobre o parâmetro populacional. No estudo de teste de hipóteses, o procedimento se baseia na hipótese que se faz sobre um parâmetro populacional.

2. A função de verossimilhança é

$$L(\beta|\mathbf{x}) = \frac{1}{\beta}e^{-x_1/\beta} \times \cdots \times \frac{1}{\beta}e^{-x_n/\beta} = \frac{1}{\beta^n}\exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum x_i\right)$$

   A log-verossimilhança é

$$\ell(\beta|\mathbf{x}) = -n\ln\beta - \frac{1}{\beta}\sum x_i$$

   Derivando e igualando a 0:

$$\frac{d\ell(\beta|\mathbf{x})}{d\beta} = 0 \Longleftrightarrow -\frac{n}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\sum x_i = 0 \Longleftrightarrow \widehat{\beta} = \frac{1}{n}\sum x_i = \overline{x}$$

10.2 Capítulo 2

1. $\overline{X} \sim N\left(15; \frac{2{,}5^2}{18}\right)$

(a)

$$
\begin{aligned}
P(14,5 \le \overline{X} \le 16) &= P\left(\frac{14,5-15}{\sqrt{\frac{2,5^2}{18}}} \le Z \le \frac{16-15}{\sqrt{\frac{2,5^2}{18}}}\right) = P(-0,85 \le Z \le 1,70) \\
&= P(-0,85 \le Z \le 0) + P(0 < Z \le 1,70) = P(0 \le Z \le 0,85) + P(0 \le Z \le 1,70) \\
&= \text{tab}(0,85) + \text{tab}(1,70) = 0,75777
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
P(\overline{X} > 16,1) &= P\left(Z > \frac{16,1-15}{\sqrt{\frac{2,5^2}{18}}}\right) = P(Z > 1,87) \\
&= 0,5 - P(0 \le Z \le 1,87) = 0,5 - \text{tab}(1,87) = 0,03074
\end{aligned}
$$

2. Os erros são: E_1 : estabelecer que são da máquina 1, quando na verdade foram produzidos pela máquina 2 ou E_2 : estabelecer que são da máquina 2, quando na verdade foram produzidos pela máquina 1. A regra de decisão é a seguinte:

$$
\begin{aligned}
\overline{X} &> 23 \Longrightarrow \text{máquina 2} \\
\overline{X} &\le 23 \Longrightarrow \text{máquina 1}
\end{aligned}
$$

Na máquina 1 o comprimento é $N(20; 16)$ e na máquina 2, $N(25; 16)$.

$$
\begin{aligned}
P(E_1) &= P\left[\overline{X} \le 23 \,|\, \overline{X} \sim N\left(25; \frac{16}{16}\right)\right] \\
&= P\left(Z \le \frac{23-25}{1}\right) = P(Z \le -2) = P(Z \ge 2) \\
&= 0,5 - \text{tab}(2,0) = 0,5 - 0,47725 = 0,02275
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(E_2) &= P\left[\overline{X} > 23 \,|\, \overline{X} \sim N\left(20; \frac{16}{16}\right)\right] \\
&= P\left(Z > \frac{23-20}{1}\right) = P(Z > 3) \\
&= 0,5 - \text{tab}(3,0) = 0,5 - 0,49865 = 0,00135
\end{aligned}
$$

3. Note que e é igual a $\overline{X}$ menos uma constante e sabemos que $E(\overline{X}) = \mu$ e $Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

(a) Das propriedades da média e da variância, resulta que

$$
\begin{aligned}
E(e) &= E(\overline{X}) - \mu = \mu - \mu = 0 \\
Var(e) &= Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}
$$

(b) $X \sim N(\mu; 20^2)$ e $n = 100$. Queremos

$$
\begin{aligned}
P(|e| > 2) &= P(e < -2) + P(e > 2) = P(\overline{X} - \mu < -2) + P(\overline{X} - \mu > 2) \\
&= P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{20}{10}} < -\frac{2}{\frac{20}{10}}\right) + P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{20}{10}} > \frac{2}{\frac{20}{10}}\right) \\
&= P(Z < -1) + P(Z > 1) = 2 \times P(Z > 1) = 2 \times [0,5 - P(0 \le Z \le 1)] \\
&= 2 \times [0,5 - \text{tab}(1,0)] = 0,31732
\end{aligned}
$$

(c)

$$\begin{aligned}
&P(|e| > \delta) = 0,01 \Leftrightarrow P(e < -\delta) + P(e > \delta) = 0,01 \Leftrightarrow \\
&P(\overline{X} - \mu < -\delta) + P(\overline{X} - \mu > \delta) = 0,01 \Leftrightarrow \\
&P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{20}{10}} < -\frac{\delta}{\frac{20}{10}}\right) + P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{20}{10}} > \frac{\delta}{\frac{20}{10}}\right) = 0,01 \Leftrightarrow \\
&P\left(Z < -\frac{\delta}{2}\right) + P\left(Z > \frac{\delta}{2}\right) = 0,01 \Leftrightarrow \\
&2 \times P\left(Z > \frac{\delta}{2}\right) = 0,01 \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{\delta}{2}\right) = 0,005 \Leftrightarrow \\
&0,5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{\delta}{2}\right) = 0,005 \Leftrightarrow P\left(0 \leq Z \leq \frac{\delta}{2}\right) = 0,495 \Leftrightarrow \\
&\text{tab}\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0,495 \Leftrightarrow \frac{\delta}{2} = 2,58 \Leftrightarrow \delta = 5,16
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
&P\left(|e| < 1\right) = 0,95 \Leftrightarrow \\
&P(-1 < \overline{X} - \mu < 1) = 0,95 \Leftrightarrow \\
&P\left(-\frac{1}{\frac{20}{\sqrt{n}}} < Z < \frac{1}{\frac{20}{\sqrt{n}}}\right) = 0,95 \Leftrightarrow \\
&P\left(-\frac{1}{\frac{20}{\sqrt{n}}} < Z < 0\right) + P\left(0 \leq Z < \frac{1}{\frac{20}{\sqrt{n}}}\right) = 0,95 \Leftrightarrow \\
&2 \times P\left(0 \leq Z < \frac{1}{\frac{20}{\sqrt{n}}}\right) = 0,95 \Leftrightarrow \\
&P\left(0 \leq Z < \frac{1}{\frac{20}{\sqrt{n}}}\right) = 0,475 \Leftrightarrow \\
&\frac{\sqrt{n}}{20} = 1,96 \Leftrightarrow \sqrt{n} = 39,2 \Leftrightarrow n \approx 1537
\end{aligned}$$

4. Parafusos pequenos: $X < 8,5$, onde X é o comprimento do parafuso.

(a) $X \sim N(\mu; 1)$. Como $P(X < 8,5) = 0,05$, resulta que 8,5 tem que ser menor que μ, ou seja, a abscissa $\frac{8,5-\mu}{1}$ tem que estar no lado negativo da escala da normal padronizada.

$$\begin{aligned}
&P(X < 8,5) = 0,05 \Leftrightarrow P\left(Z < \frac{8,5-\mu}{1}\right) = 0,05 \Leftrightarrow \\
&P\left(Z > -\frac{8,5-\mu}{1}\right) = 0,05 \Leftrightarrow P(0 \leq Z \leq \mu - 8,5) = 0,45 \Leftrightarrow \\
&\mu - 8,5 = 1,64 \Leftrightarrow \mu = 10,14
\end{aligned}$$

(b) Parada desnecessária: amostra indica processo fora de controle ($\overline{X} < 9$), quando, na verdade, o processo está sob controle ($\mu = 10,14$).

$$\begin{aligned}
P\left[\overline{X} < 9 \,|\, \overline{X} \sim N\left(10,14; \frac{1}{4}\right)\right] &= P\left(Z < \frac{9 - 10,14}{0,5}\right) \\
&= P(Z < -2,28) = P(Z > 2,28) = 0,5 - P(0 \leq Z \leq 2,28) \\
&= 0,5 - \text{tab}(2,28) = 0,5 - 0,4887 = 0,0113
\end{aligned}$$

(c) Máquina desregulada: $\overline{X} > 9$; processo operando sem ajuste: $X \sim N(9,5; 1)$

$$\begin{aligned}
P\left[\overline{X} > 9 \,|\, \overline{X} \sim N\left(9,5; \frac{1}{4}\right)\right] &= P\left(Z > \frac{9 - 9,5}{0,5}\right) \\
&= P(Z > -1) = P(-1 < Z < 0) + P(Z \geq 0) \\
&= P(0 < Z < 1) + P(Z \geq 0) = \text{tab}(1,0) + 0,5 = 0,8413
\end{aligned}$$

5. Afirmativa do gerente: $\mu = 2$ e $\sigma = 0,05$. Como $n = 100$, podemos usar o teorema limite central . Logo, $\overline{X} \approx N\left(2; \frac{0,05^2}{100}\right)$.

$$\begin{aligned}
P(\overline{X} \leq 1,985) &= P\left(Z \leq \frac{1,985 - 2}{\frac{0,05}{10}}\right) \\
&= P(Z \leq -3,0) = P(Z \geq 3,0) \\
&= 0,5 - \text{tab}(3,0) = 0,5 - 0,49865 = 0,00135
\end{aligned}$$

A probabilidade de se obter esse valor nas condições dadas pelo gerente é muito pequena, o que pode nos fazer suspeitar da veracidade das afirmativas. É provável que, ou a média não seja 2 (e, sim, menor que 2), ou o desvio padrão não seja 0,05 (e, sim, maior que 0,05). Esboce gráficos da normal para compreender melhor esse comentário!

6. (a) $18 \times 0,4 = 7,2 > 5$ $\qquad 18 \times 0,6 = 10,8 > 5$ $\qquad X \approx N(7,2; 4,32)$

$$\begin{aligned}
P(X \geq 15) &\approx P\left(Z \geq \frac{14,5 - 7,2}{\sqrt{4,32}}\right) \\
&= P(Z \geq 3,51) = 0,5 - 0,49978 = 0,00022
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X < 2) &\approx P\left(Z \leq \frac{1,5 - 7,2}{\sqrt{4,32}}\right) \\
&= P(Z \leq -2,74) = P(Z \geq 2,74) = 0,5 - 0,49693 = 0,00307
\end{aligned}$$

(b) $40 \times 0,3 = 12 > 5$ $\qquad 40 \times 0,7 = 28 > 5$ $\qquad X \approx N(12;\ 8,4)$

$$\begin{aligned}
P(X < 10) &\approx P\left(Z \leq \frac{9,5 - 12}{\sqrt{8,4}}\right) \\
&= P(Z \leq -0,86) = P(Z \geq 0,86) = 0,5 - 0,30511 = 0,19489
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(25 < X < 28) &\approx P\left(\frac{25,5 - 12}{\sqrt{8,4}} \leq Z \leq \frac{27,5 - 12}{\sqrt{8,4}}\right) \\
&= P(4,66 \leq Z \leq 5,35) \approx 0
\end{aligned}$$

(c) $65 \times 0,9 = 58,5 > 5$ $\qquad 65 \times 0,1 = 6,5 > 5$ $\qquad X \approx N(58,5; 5,85)$

$$\begin{aligned} P(X = 58) &\approx P\left(\frac{57,5 - 58,5}{\sqrt{5,85}} \leq Z \leq \frac{58,5 - 58,5}{\sqrt{5,85}}\right) \\ &= P(-0,41 \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq 0,41) = 0,15910 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(60 < X \leq 63) &\approx P\left(\frac{60,5 - 58,5}{\sqrt{5,85}} \leq Z \leq \frac{63,5 - 58,5}{\sqrt{5,85}}\right) \\ &= P(0,83 \leq Z \leq 2,07) = 0,48077 - 0,29673 = 0,18404 \end{aligned}$$

(d) $100 \times 0,2 = 20,0 > 5$ $\qquad 100 \times 0,8 = 80,0 > 5$ $\qquad X \approx N(20; 16)$

$$\begin{aligned} P(25 \leq X \leq 35) &\approx P\left(\frac{24,5 - 20}{4} \leq Z \leq \frac{35,5 - 20}{4}\right) \\ &= P(1,13 \leq Z \leq 3,88) = 0,49995 - 0,37076 = 0,12919 \end{aligned}$$

(e) $50 \times 0,2 = 10,0 > 5$ $\qquad 50 \times 0,8 = 40,0 > 5$ $\qquad X \approx N(10; 8)$

$$P(X > 26) \approx P\left(Z \geq \frac{26,5 - 10}{\sqrt{8}}\right) = P(Z \geq 5,83) \approx 0$$

$$\begin{aligned} P(5 \leq X < 10) &\approx P\left(\frac{4,5 - 10}{\sqrt{8}} \leq Z \leq \frac{9,5 - 10}{\sqrt{8}}\right) \\ &= P(-1,94 \leq Z \leq -0,18) = P(0,18 \leq Z \leq 1,94) \\ &= 0,47381 - 0,07142 = 0,40239 \end{aligned}$$

(f) $np = 35$ $\qquad n(1-p) = 15$ $\qquad X \approx N(35; 10,5)$

$$\begin{aligned} P(X \leq 25) &\approx P\left(Z \leq \frac{25,5 - 35}{\sqrt{10,5}}\right) \\ &= P(Z \leq -2,93) = 0,5 - 0,49831 = 0,00169 \end{aligned}$$

(g) $np = 50$ $\qquad n(1-p) = 50$ $\qquad X \approx N(50; 25)$

$$\begin{aligned} P(42 < X \leq 56) &\approx P\left(\frac{42,5 - 50}{5} \leq Z \leq \frac{56,5 - 50}{5}\right) \\ &= P(-1,5 \leq Z \leq 1,3) = 0,43319 + 0,40320 = 0,83639 \end{aligned}$$

(h) $np = 50$ $\qquad n(1-p) = 50$ $\qquad X \approx N(50; 25)$

$$\begin{aligned} P(X > 60) &\approx P\left(Z \geq \frac{60,5 - 50}{5}\right) \\ &= P(Z \geq 2,1) = 0,5 - 0,48214 = 0,01786 \end{aligned}$$

(i) $np = 8$ $\qquad n(1-p) = 12$ $\qquad X \approx N(8; 4,8)$

$$\begin{aligned} P(X = 5) &\approx P\left(\frac{4,5 - 8}{\sqrt{4,8}} \leq Z \leq \frac{5,5 - 8}{\sqrt{4,8}}\right) \\ &= P(-1,60 \leq Z \leq -1,14) = P(1,14 \leq Z \leq 1,60) = 0,44520 - 0,37286 = 0,07234 \end{aligned}$$

(j) $np = 9 \qquad n(1-p) = 21 \qquad X \approx N(9; 6,3)$

$$\begin{aligned} P(X \geq 12) &\approx P\left(Z \geq \frac{11,5-9}{\sqrt{6,3}}\right) = P(Z \geq 1) \\ &= 0,5 - 0,34134 = 0,15866 \end{aligned}$$

(k) $np = 8 \qquad n(1-p) = 72 \qquad X \approx N(8; 7,2)$

$$\begin{aligned} P(9 < X < 11) &\approx P\left(\frac{9,5-8}{\sqrt{7,2}} \leq Z \leq \frac{10,5-8}{\sqrt{7,2}}\right) \\ &= P(0,56 \leq Z \leq 0,93) = 0,32381 - 0,21226 = 0,11155 \end{aligned}$$

(l) $np = 6 \qquad n(1-p) = 24 \qquad X \approx N(8; 4,8)$

$$\begin{aligned} P(12 \leq X \leq 16) &\approx P\left(\frac{11,5-8}{\sqrt{4,8}} \leq Z \leq \frac{16,5-8}{\sqrt{4,8}}\right) \\ &= P(1,60 \leq Z \leq 3,88) = 0,49995 - 0,44520 = 0,05475 \end{aligned}$$

(m) $np = 15 \qquad n(1-p) = 35 \qquad X \approx N(15; 10,5)$

$$\begin{aligned} P(X > 18) &\approx P\left(Z \geq \frac{18,5-15}{\sqrt{10,5}}\right) \\ P(Z &\geq 1,08) = 0,5 - 0,35993 = 0,14007 \end{aligned}$$

(n) $np = 5,6 \qquad n(1-p) = 22,4 \qquad X \approx N(5,6; 4,48)$

$$\begin{aligned} P(X = 6) &\approx P\left(\frac{5,5-5,6}{\sqrt{4,48}} \leq Z \leq \frac{6,5-5,6}{\sqrt{4,48}}\right) \\ &= P(-0,05 \leq Z \leq 0,43) = 0,01994 + 0,16640 = 0,18634 \end{aligned}$$

(o) $np = 38 \qquad n(1-p) = 57 \qquad X \approx N(38; 22,8)$

$$\begin{aligned} P(30 \leq X < 48) &\approx P\left(\frac{29,5-38}{\sqrt{22,8}} \leq Z \leq \frac{47,5-38}{\sqrt{22,8}}\right) \\ &= P(-1,78 \leq Z \leq 1,99) = 0,47670 + 0,46246 = 0,93916 \end{aligned}$$

7. X = "número de pessoas que votaram". Então $X \sim bin(1002; 0,61)$ e $X \approx N(611,22; 238,3758)$

$$P(X \geq 701) \approx P\left(Z \geq \frac{700,5-611,22}{\sqrt{238.3758)}}\right) = P(Z \geq 5,78) = 0$$

Se a proporção de votantes é de 61%, a probabilidade de encontrarmos 701 ou mais votantes em uma amostra aleatória simples de 1002 é muito baixa. Talvez as pessoas entrevistadas não estejam sendo sinceras, com vergonha de dizer que não votaram...

8. X = "número de meninas em 64 partos"; $X \sim bin(64; 0,5)$ e $X \approx N(32; 16)$

$$\begin{aligned} P(X > 36) &\approx P\left(Z \geq \frac{36,5-32}{4}\right) \\ &= P(Z \geq 1,13) = 0,5 - 0,37076 = 0,12924 \end{aligned}$$

Esse é um resultado que pode ocorrer por mero acaso, ou seja, não é um resultado não-usual.

9. X = "número de passageiros que se apresentam para o vôo em questão". $X \sim bin(400; 0,85)$ e $X \approx N(340; 51)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X > 350) &\approx \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{350,5-340}{\sqrt{51}}\right) \\ &= \mathrm{P}(Z \geq 1,47) = 0,5 - 0,42922 = 0,07078 \end{aligned}$$

Essa é uma probabilidade um pouco alta; talvez valha a pena a companhia rever a política de reservas e aceitar menos que 400 reservas.

10. X = "número de defeituosos na amostra"; $X \sim bin(20; 0.1)$. Note que aqui não podemos usar a aproximação normal, uma vez que $20 \times 0,1 = 2 < 5$. Queremos

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X \geq 2) &= 1 - \mathrm{P}(X < 2) = 1 - [\mathrm{P}(X=0) + \mathrm{P}(X=1)] \\ &= 1 - \binom{20}{0}(0,1)^0(0,9)^{20} - \binom{20}{1}(0,1)(0,9)^{19} = \\ &= 1 - 0,39175 = 0,60825 \end{aligned}$$

10.3 Capítulo 3

1. $1-\alpha = 0,90 \Longrightarrow z_{0,05} = 1,64$

   $1-\alpha = 0,99 \Longrightarrow z_{0,005} = 2,58$

   $1-\alpha = 0,80 \Longrightarrow z_{0,10} = 1,28$

2. $tab(1,28) = \alpha/2 = 0,39973 \Longrightarrow \alpha = 2 \times 0.39973 = 0.79946 \approx 0,80$ ou 80%

   $tab(1,80) = \alpha/2 = 0,46407 \Longrightarrow \alpha = 2 \times 0.46407 = 0.92814 \approx 0,93$ ou 93%

3. $\alpha = 2\% \Longrightarrow 1-\alpha = 98\% \Longrightarrow tab(z_{0,01}) = 0,49 \Longrightarrow z_{0,01} = 2,33$

$$\epsilon = 2.33 \times \frac{2}{\sqrt{36}} = 0,7767$$

Como a média amostral observada é $\overline{x} = \frac{1236}{36} = 34.333$, o intervalo de confiança é

$$[34.333 - 0.7767; 34.333 + 0.7767] = [33,556; 35,110]$$

4. Como a amostra é a mesma, isso significa que a população é a mesma, bem como o tamanho de amostra, ou seja, σ e n sã o os mesmos. Vimos que um nível de confiança maior resulta em um intervalo de confiança maior; logo, o segundo intervalo foi construído com base em um nível de confiança maior do que o utilizado na construção do primeiro.

5. Mantidos fixos o nível de confiança e o desvio padrão populacional, vimos que a margem de erro é inversamente proporcional à raiz quadrada de n. Assim, para reduzir pela metade a margem de erro, temos que dobrar $\sqrt{n}$, ou seja, temos que quadruplicar o tamanho amostral n.

6. É dado que $X \sim N(\mu; 9)$. Como $n = 25$, sabemos que

$$\overline{X} \sim N\left(\mu; \frac{9}{25}\right)$$

Com $1 - \alpha = 0,99$, temos que $\alpha = 0,01$ e $\alpha/2 = 0,005$. Assim, temos que procurar no corpo da tabela a abscissa correspondente ao valor $0,5 - 0,005 = 0,495$,o que nos dá $z_{0,005} = 2,58$. Então

$$\begin{aligned}
&P(-2,58 \leq Z \leq 2,58) = 0,99 \Rightarrow \\
&P\left(-2,58 \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{9}{25}}} \leq 2,58\right) = 0,99 \Rightarrow \\
&P\left(-2,58 \times \sqrt{\frac{9}{25}} \leq \overline{X} - \mu \leq 2,58 \times \sqrt{\frac{9}{25}}\right) = 0,99 \Rightarrow \\
&P(-1,548 \leq \overline{X} - \mu \leq 1,548) = 0,99 \Rightarrow \\
&P(\overline{X} - 1,548 \leq \mu \leq \overline{X} + 1,548) = 0,99
\end{aligned}$$

Como a média amostral obtida é $\overline{x} = \frac{60}{25} = 2,4$ o intervalo de confiança de 99% de confiança é

$$[2,4 - 1,548\,;\, 2,4 + 1,548] = [0,852\,;\, 3,948]$$

7. Queremos $|\epsilon| \leq 0,05$, com $\sigma = 4,2$ e $1 - \alpha = 0,95$.

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Então

$$\begin{aligned}
1,96 \times \frac{4,2}{\sqrt{n}} &\leq 0,05 \Rightarrow \\
\sqrt{n} &\geq \frac{1,96 \times 4,2}{0,05} = 164,64 \Rightarrow \\
n &\geq 27106,3296
\end{aligned}$$

Logo, o tamanho mínimo necessário é $n = 27107$.

8. É dado que $X \sim N(\mu; 0,58^2)$. Como $n = 25$, sabemos que

$$\overline{X} \sim N\left(\mu; \frac{0,58^2}{25}\right)$$

Com $1 - \alpha = 0,90$, temos que $\alpha = 0,10$ e $\alpha/2 = 0,05$. Assim, temos que procurar no corpo da tabela a abscissa correspondente ao valor $0,5 - 0,05 = 0,45$,o que nos dá $z_{0,05} = 1,64$. Então

$$\begin{aligned}
&P(-1,64 \leq Z \leq 1,64) = 0,90 \Rightarrow \\
&P\left(-1,64 \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{0,58^2}{25}}} \leq 1,64\right) = 0,90 \Rightarrow \\
&P\left(-1,64 \times \frac{0,58}{5} \leq \overline{X} - \mu \leq 1,64 \times \frac{0,58}{5}\right) = 0,90 \Rightarrow \\
&P(-0,19024 \leq \overline{X} - \mu \leq 0,19024) = 0,90 \Rightarrow \\
&P(\overline{X} - 0,19024 \leq \mu \leq \overline{X} + 0,19024) = 0,90
\end{aligned}$$

Como a média amostral obtida é $\overline{x} = 2,8$ o intervalo de confiança de nível de confiança 99% é

$$[2,8 - 0,19024\,;\ 2,8 + 0,19024] = [2,60976\,;\ 2,99024]$$

9. $\alpha = 0,05 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{0,025} = 1,96$

   (a) A margem de erro é
   $$\epsilon = 1,96 \times \frac{5}{\sqrt{50}} = 1,3859$$
   Logo, o intervalo de confiança de nível de confiança 0,95 é
   $$[42 - 1,\ 385\,9\,;\ 42 + 1,3859] = [40,\ 6141\,;\ 43,3859]$$

   (b) Como visto em (a) a margem de erro é $\epsilon = 1,3859$.

   (c) Temos que reduzir a margem de erro; logo, o tamanho da amostra terá que ser maior que 50.
   $$\begin{aligned} \epsilon &= 1,96 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \leq 1 \Rightarrow \\ \sqrt{n} &\geq 1,96 \times 5 = 9,8 \Rightarrow \\ n &\geq 9,8^2 = 96,04 \end{aligned}$$
   Logo, n deve ser no mínimo igual a 97.

10. A média amostral é $\overline{x} = \frac{343120}{10} = 34312$.

   (a) A margem de erro é
   $$\epsilon = 1,96 \times \frac{500}{\sqrt{10}} = 309,9$$
   Logo, o intervalo de confiança de nível de confiança 95% é
   $$[34312 - 309,9\,;\ 34312 + 309,9] = [34002,1\,;\ 34621,9]$$

   (b) A margem de erro é
   $$\epsilon = 2,58 \times \frac{500}{\sqrt{10}} = 407,93$$
   Logo, o intervalo de confiança de nível de confiança 95% é
   $$[34312 - 407,93\,;\ 34312 + 407,93] = [33904,07\,;\ 34719,93]$$

   (c) O gerente deve estar usando o nível de significância de 1% (ou nível de confiança de 99%).

11. (a) $\alpha = 2\% \Rightarrow 1 - \alpha = 98\% \Rightarrow z_{0,01} = 2,33$
   $\widehat{p} = \frac{128}{600} = 0,213\,3$
   $$\epsilon = 2,33 \times \sqrt{\frac{0,213\,3(1 - 0,2133)}{600}} = 0,03897$$
   e o intervalo de confiança é
   $$[0,2133 - 0,03897; 0,2133 + 0,03897] = [0,17433; 0,25227]$$

(b) $\alpha = 10\% \Rightarrow 1 - \alpha = 90\% \Rightarrow z_{0,05} = 1,64$
$\widehat{p} = \frac{710}{1200} = 0,591\,67 =$

$$\epsilon = 1,64 \times \sqrt{\frac{0,55 \times 0,45}{1200}} = 0,02355$$

e o intervalo de confiança é

$$[0,59167 - 0,02355; 0,59167 + 0,02355] = [0,56812; 0,61522]$$

12. O problema pede a estimativa para a proporção dos que não querem a fluoração; logo, $\widehat{p} = \frac{120}{300} = 0,4$

(a) $\alpha = 5\% \Rightarrow 1 - \alpha = 95\% \Rightarrow z_{0,025} = 1,96$

$$\epsilon = 1,96 \times \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{300}} = 0,05544$$

e o intervalo de confiança é

$$[0,4 - 0,05544; 0,4 + 0,05544] = [0,34456; 0,045544]$$

(b) $1 - \alpha = 96\% \Rightarrow z_{0,02} = 2,05$

$$\epsilon = 2,05 \times \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{300}} = 0,05798$$

e o intervalo de confiança é

$$[0,4 - 0,05798; 0,4 + 0,05798] = [0,34202; 0,045798]$$

13. É dado que $n = 100$, $\widehat{p} = 0,32$ e $EP(\widehat{P}) = 0,03$.
$\alpha = 3\% \Rightarrow z_{0,015} = 2,17$

$$\epsilon = 2,17 \times 0,03 = 0,0651$$

$$[0,32 - 0,0651; 0,32 + 0,0651] = [0,2549; 0,3851]$$

14. $\widehat{p} = \frac{57}{150} = 0,38$. Para uma margem de erro de 0,08 e um nível de confiança de 90%, o tamanho da amostra teria que ser

$$n \geq \left(\frac{1,64}{0,08}\right)^2 \times 0,38 \times 0,62 = 99,011$$

Como o tamanho da amostra é 150, essa amostra é suficiente.

15. (a) $\widehat{p} = \frac{100}{400} = 0,25$

(b) $EP(\widehat{P}) = \sqrt{\frac{0,25 \times 0,75}{400}} = 0,02651$

(c) $1 - \alpha = 0,80 \Rightarrow z_{0,1} = 1,28$

$$[0,25 - 1,28 \times 0,021651; 0,25 + 1,28 \times 0,021651] = [0,22229; 0,27771]$$

16. $\widehat{p}_0 = 0,35$

$$n \geq \left(\frac{1,96}{0,05}\right)^2 \times 0,35 \times 0,65 = 349,59$$

Logo, $n \geq 350$

10.4 Capítulo 4

1. Temos que usar a Tabela 2, concentrando-nos na linha correspondente a 12 graus de liberdade. Os valores dados podem ser encontrados no corpo da tabela nesta linha.

   (a) À direita de $1,782$ temos uma área de $0,05$; logo, à esquerda de $1,782$ a área é de $0,95$.

   (b) A área abaixo de $-1,356$ é igual à área acima de $1,356$, que é de $0,10$. Logo, à esquerda de $-1,356$ temos uma área de $0,10$ e à direita de $-1,356$ temos uma área de $0,90$.

   (c) À direita de $2,681$ a área é $0,01$.

   (d) À direita de $1,083$ a área é $0,15$; à direita de $3,055$ a área é de $0,005$. Logo, a área entre $1,083$ e $3,055$ é $0,15-0,005=0,145$.

   (e) Como visto no item (b), a área à direita de $-1,356$ é $0,90$. A área à direita de $2,179$ é $0,025$. Logo, a área entre $-1,356$ e $2,179$ é $0,90-0,025=0,875$

2. (a) $t_{15;0,05}=1,753$

   (b) O primeiro fato a observar é que $t_{18;0,90}$ tem que ser negativo, pois à direita dele a área é de $0,90>0,50$. Se à direita a área é 0,90, a área à esquerda é 0,10. Pela simetria da curva, $t_{18;0,90}=-t_{18;0,10}$. Veja a **Figura ??**. Resulta que

   $$t_{18;0,90}=-t_{18;0,10}=-1,33$$

   (c) Analogamente encontra-se que $t_{25;0,975}=-2,060$

3. Contexto: População normal e amostra pequena; distribuição envolvida: t-Student

   $n=15 \qquad 1-\alpha=0,95 \Rightarrow t_{14;0,025}=2,145$

   $$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{808}{15}=53,8667\\ s^2 &= \frac{1}{14}\left[44176-\frac{808^2}{15}\right]=46,5524\end{aligned}$$

   $$\epsilon=2,145\times\sqrt{\frac{46,5524}{15}}=3,7788$$

   O intervalo de confiança é

   $$[53,8667-3,7788;53,8667+3,7788]=[50,088;57,6455]$$

4. Contexto: População normal e amostra pequena; distribuição envolvida: t-Student

   $t_{24;0,01}=2,492$

   $$\left[500-2,492\times\sqrt{\frac{900}{25}};500+2,492\times\sqrt{\frac{900}{25}}\right]=[485,05;514,95]$$

5. Contexto: População normal e amostra pequena; distribuição envolvida: t-Student

   $\alpha = 2\% \Rightarrow t_{29;0,01} = 2,462$

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{401}{30} = 13,367 \\ s^2 &= \frac{1}{29}\left[5443 - \frac{401^2}{30}\right] = 2,861 \end{aligned}$$

   O intervalo de confiança é

$$\left[13,367 - 2,462 \times \sqrt{\frac{2,861}{30}}; 13,367 + 2,462 \times \sqrt{\frac{2,861}{30}}\right] = [12,607; 14,127]$$

6. Como n é grande, podemos usar a abscissa da distribuição normal $z_{0,01} = 2,33$ (o valor exato é $t_{99;0,01} = 2,3646$),

$$\left[13,78 - 2,33 \times \sqrt{\frac{2,865}{100}}; 13,78 + 2,33 \times \sqrt{\frac{2,865}{100}}\right] = [13,386; 14,174]$$

10.5 Capítulo 5

1. Na linha correspondente a 17 graus de liberdade, devem ser consultadas as seguintes colunas:

   (a) $\alpha = 0,02 \Longrightarrow k = 30,992$

   (b) $\alpha = 0,98 \Longrightarrow k = 7,255$

   (c) $\alpha = 0,1 \Longrightarrow k = 24,769$

2. Contexto: População normal

$$n = 15 \qquad 1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \begin{cases} \chi^2_{14;0,025} = 26,119 \\ \\ \chi^2_{14;0,975} = 5,629 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{808}{15} = 53,8667 \\ s^2 &= \frac{1}{14}\left[44176 - \frac{808^2}{15}\right] = 46,5524 \end{aligned}$$

   Intervalo de confiança:

$$\left[\frac{14 \times 46,5524}{26,119}; \frac{14 \times 46,5524}{5,629}\right] = [24,95; 1157,78]$$

3. Contexto: População normal

$$n = 25 \qquad s^2 = 900 \qquad 1 - \alpha = 0,98 \Rightarrow \begin{cases} \chi^2_{24;0,01} = 42,980 \\ \\ \chi^2_{24;0,99} = 10,856 \end{cases}$$

Intervalo de confiança:

$$\left[\frac{24 \times 900}{42,98}; \frac{24 \times 900}{10,856}\right] = [502,56; 1989,68]$$

4. Contexto: População normal

$$n = 30 \qquad \alpha = 2\% \Rightarrow 1 - \alpha = 0,98 \Rightarrow \begin{cases} \chi^2_{29;0,01} = 49,588 \\ \\ \chi^2_{29;0,99} = 14,256 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{401}{30} = 13,367 \\ s^2 &= \frac{1}{29}\left[5443 - \frac{401^2}{30}\right] = 2,861 \end{aligned}$$

Intervalo de confiança:

$$\left[\frac{29 \times 2,861}{49,588}; \frac{29 \times 2,861}{14,256}\right] = [1,67; 5,82]$$

10.6 Capítulo 6

1. (a) Antes da pane: $T \sim N(100; 100)$
   Depois da pane: $T \sim N(\mu; 100)$ – afirmativa dada: $\mu \neq 100$

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 100 \\ H_1 &: \mu \neq 100 \end{aligned}$$

   (b) Afirmativa dada: $\mu < 900$

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 900 \\ H_1 &: \mu < 900 \end{aligned}$$

   (c) Afirmativa dada: $\mu \geq 2$

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 2 \\ H_1 &: \mu < 2 \end{aligned}$$

2. $$\left.\begin{array}{l} X \sim N(\mu; 225) \\ n = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(\mu; \tfrac{225}{25}\right) \text{ ou } \overline{X} \sim N(\mu; 9)$$

   (a)

$$\alpha = \mathrm{P}(\overline{X} > 43 \,|\, \overline{X} \sim N(40; 9)) = \mathrm{P}\left(Z > \frac{43 - 40}{3}\right) = \mathrm{P}(Z > 1,0) = 0,5 - tab(1,0) = 0,1587$$

$$\beta = \mathrm{P}(\overline{X} \leq 43 \,|\, \overline{X} \sim N(45; 9) = \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{43 - 45}{3}\right) = \mathrm{P}(Z \leq -0,67) = 0,5 - tab(0,67) = 0,2514$$

(b)

$$\alpha = 0,10 \Leftrightarrow \mathrm{P}\left[\overline{X} > k \,|\, \overline{X} \sim N(40;9)\right] = 0,10 \Leftrightarrow \mathrm{P}\left(Z > \frac{k-40}{3}\right) = 0,10 \Leftrightarrow$$

$$tab\left(\frac{k-40}{3}\right) = 0,40 \Leftrightarrow \frac{k-40}{3} = 1,28 \Leftrightarrow k = 43,84$$

$$\begin{aligned}\beta &= \mathrm{P}(\overline{X} \le 43,84 \,|\, \overline{X} \sim N(45;9) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{43.84-45}{3}\right) = \mathrm{P}(Z \le -0,39)\\ &= 0,5 - tab(0,39) = 0,34827\end{aligned}$$

3. $\left.\begin{array}{l} X \sim N(\mu;225) \\ n = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(\mu;\frac{225}{25}\right)$ ou $\overline{X} \sim N(\mu;9)$

(a)

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathrm{P}\left[\overline{X} < 34 \,|\, \overline{X} \sim N(40;9)\right] + \mathrm{P}\left[\overline{X} > 46 \,|\, \overline{X} \sim N(40;9)\right]\\ &= \mathrm{P}\left(Z < \frac{34-40}{3}\right) + \mathrm{P}\left(Z > \frac{46-40}{3}\right)\\ &= \mathrm{P}(Z < -2) + \mathrm{P}(Z > 2) = 2 \times \Pr(Z > 2) = 2 \times [0,5 - tab(2,)] = 0,0455\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\beta &= \mathrm{P}(\text{não rejeitar } H_0 \,|\, \mu = 36) = \mathrm{P}\left[34 \le \overline{X} \le 46 \,|\, \overline{X} \sim N(36;9)\right]\\ &= \mathrm{P}\left(\frac{34-36}{3} \le Z \le \frac{46-36}{3}\right) = \mathrm{P}(-0,67 \le Z \le 3,33) = tab(3,33) + tab(0,67) = 0,745\end{aligned}$$

4. $\left.\begin{array}{l} X \sim N(\mu;64) \\ n = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(\mu;\frac{64}{16}\right)$ ou $\overline{X} \sim N(\mu;4)$

(a)

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathrm{P}\left[\overline{X} > 25,5 \,|\, \overline{X} \sim N(23;4)\right] = \mathrm{P}\left(Z > \frac{25,5-23}{2}\right) = \mathrm{P}(Z > 1,25)\\ &= 0,5 - tab(1,25) = 0,1056\end{aligned}$$

$$\beta = \mathrm{P}(\overline{X} \le 25,5 \,|\, \overline{X} \sim N(28;4) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{25,5-28}{2}\right) = \mathrm{P}(Z \le -1,25) = \mathrm{P}(Z > 1,25) = 0,1056$$

(b)

$$\alpha = 0,05 \Leftrightarrow \mathrm{P}\left[\overline{X} > k \,|\, \overline{X} \sim N(23;4)\right] = 0,05 \Leftrightarrow \mathrm{P}\left(Z > \frac{k-23}{2}\right) = 0,05 \Leftrightarrow$$

$$tab\left(\frac{k-23}{2}\right) = 0,45 \Leftrightarrow \frac{k-23}{2} = 1,64 \Leftrightarrow k = 26,28$$

$$\begin{aligned}\beta &= \mathrm{P}(\overline{X} \le 26,28 \,|\, \overline{X} \sim N(28;4) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{26,28-28}{2}\right) = \mathrm{P}(Z \le -0,86)\\ &= \mathrm{P}(Z \ge 0,86) = 0,5 - tab(0,86) = 0,19489\end{aligned}$$

5. $\left.\begin{array}{l} X \sim N(\mu; 36) \\ n = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(\mu; \frac{36}{16}\right)$ ou $\overline{X} \sim N\left(\mu; 1,5^2\right)$

(a)

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathrm{P}\left[\overline{X} < 41,25 \,|\, \overline{X} \sim N(45; 1,5^2)\right] = \mathrm{P}\left(Z < \frac{41,25 - 45}{1,5}\right) = \mathrm{P}(Z < -2,5) \\ &= 0,5 - tab(2,5) = 0,0062 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \beta &= \mathrm{P}(\text{não rejeitar } H_0 \,|\, \mu = 43) = \mathrm{P}\left[\overline{X} \geq 41,25 \,|\, \overline{X} \sim N(43; 1,5^2)\right] \\ &= \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{41,25 - 43}{1,5}\right) = \mathrm{P}(Z \geq -1,17) = 0,5 + tab(1,17) = 0,8790 \end{aligned}$$

10.7 Capítulo 7

1. (a) $X \sim N(\mu; 3,1^2)$ $\quad n = 9 \quad$ $\overline{x} = 13,35$

   $\alpha = 0,02 \Longrightarrow z_{0,01} = 2,33$

   Estatística de teste: $Z_0 = \dfrac{\overline{X} - 12,8}{\frac{3,1}{3}} \sim N(0;1)$ sob H_0.

   $$RC: Z_0 < -2,33 \quad \text{ou} \quad Z_0 > 2,33$$

   (b) O valor observado da estatística de teste é

   $$z_0 = \frac{13,35 - 12,8}{\frac{3,1}{3}} = 0,532$$

   que não pertence à região crítica. Logo, não há evidência amostral suficiente para rejeitarmos a hipótese de que a média da população seja 12,8.

   (c)

   $$P = 2 \times \mathrm{P}(Z > 0,532) = 2 \times [0,5 - tab(0,53)] = 0,5962$$

   O valor P é bastante alto; logo a hipótese nula só seria rejeitada para níveis de significância maiores que 0,5962. Isso é evidência de que não se pode rejeitar a hipótese nula em qualquer nível de significância razoável.

2. Seja X a variável aleatória que representa o peso das balas. Então $X \sim N(\mu; 0,25)$. Como $n = 25$, resulta que

   $$\overline{X} \sim N(\mu; 0,01)$$

   A afirmativa do fabricante é $\mu \geq 2$. Logo, a negação de tal afirmação é $\mu < 2$. Como essa última expressão não contém o sinal de igualdade, ela se torna a hipótese alternativa. Então, nossas hipóteses são:

   $$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 2 \\ H_1 &: \mu < 2 \end{aligned}$$

Estatística de teste: $Z_0 = \dfrac{\overline{X} - 2}{\frac{0,5}{5}} \sim N(0,1)$ sob H_0.

$$RC : Z_0 < -z_{0,05} \qquad \text{ou} \qquad Z_0 < -1,645$$

O valor observado da estatistica de teste é

$$z_0 = \frac{1,98 - 2}{0,1} = -0,2$$

que não se encontra na região crítica. Logo, não podemos rejeitar a hipótese nula. Ou seja, os dados não trazem evidência de que o fabricante esteja mentindo, isto é, os dados dão evidência de que o peso médio das balas é de 2 gramas.

3. O problema na produção surge quando $\mu < 15$. Logo, nossas hipóteses são:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 15 \\ H_1 &: \mu < 15 \end{aligned}$$

Estatística de teste: $Z_0 = \dfrac{\overline{X} - 15}{\frac{0,5}{3}} \sim N(0,1)$ sob H_0.

$$RC : Z_0 < -z_{0,001} \qquad \text{ou} \qquad Z_0 < -3,09$$

Escrevendo a região crítica em termos da média amostral temos

$$\frac{\overline{X} - 15}{\frac{0,5}{3}} < -3,09 \Rightarrow \overline{X} < 15 - 3,09 \times \frac{0,5}{3} \Rightarrow \overline{X} < 14,485$$

Então se $\overline{X} < 14,485$ o processo deve ser interrompido para um novo ajuste.

4. A intenção do analista é reduzir o tempo; logo, o interesse dele é que $\mu < 48,5$. A negação dessa afirmativa é $\mu \geq 48,5$. Logo, nossas hipóteses são:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 48,5 \\ H_1 &: \mu < 48,5 \end{aligned}$$

A estatística de teste é

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - 48,5}{\frac{5}{5}} \sim N(0,1) \text{ sob } H_0.$$

e o valor observado é $z_0 = 46,5 - 48,5 = -2$, que resulta no seguinte valor P :

$$P = \mathrm{P}(Z < -2,0) = \Pr(Z > 2,0) = 0,5 - tab(2,0) = 0,02275$$

Podemos afirmar que o tempo de execução reduziu, a qualquer nível de significância inferior 2,275%. Note que rejeitamos a hipótese nula ao nível de significância de 5%, mas não a 1%!

5. Se o consumo for menor ou igual a 12 litros por 100 km, não há problema com a propaganda. O problema surge se o consumo for superior. Logo, nossas hipóteses são:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 12 \\ H_1 &: \mu > 12 \end{aligned}$$

Supondo que o consumo X possa ser aproximado por uma distribuição normal, nossa estatistica de teste é

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - 12}{\frac{1}{6}} \sim N(0,1) \text{ sob } H_0.$$

O valor observado é

$$z_0 = \frac{12,4 - 12}{\frac{1}{6}} = 2,4$$

e o valor P é

$$P = \mathrm{P}(Z > 2,4) = 0,5 - tab(2,4) = 0,0082$$

A propaganda parece ser enganosa, pois a probabilidade de se obter um consumo médio de 12,4 litros por 100 km é pequena se o consumo realmente for de 12 litros por 100 km. Note que H_0 é rejeitada para qualquer nível de significância $\alpha \geq 0,82\%$, o que inclui os níveis de significância usuais de 1% e 5%.

6. $\widehat{p} = \frac{385}{800} = 0,48125$

A afirmativa de interesse é "pelo menos 50% dos estudantes possuem computador", ou seja, $p \geq 0,5$. Logo, as hipóteses são

$$\begin{aligned} H_0 &: p = 0,50 \\ H_1 &: p < 0,50 \end{aligned}$$

$$\alpha = 0,10 \Longrightarrow z_{0,1} = 1,28$$

A estatística de teste é

$$Z_0 = \frac{\hat{P} - 0,5}{\frac{0,5}{\sqrt{800}}} \approx N(0,1) \text{ sob } H_0$$

e a região crítica é

$$Z_0 < -1,28$$

O valor observado da estatística de teste é

$$z_0 = \frac{0,48125 - 0,5}{\frac{0,5}{\sqrt{800}}} = -1,0607$$

Como o valor observado não pertence à região crítica, não podemos rejeitar a hipótese nula. Ou seja, os dados trazem evidência de que a proporção de estudantes que possuem computador é de pelo menos 50%.

7. A afirmativa de interesse é "mais de 10% dos trabalhadores conseguem seus empregos por indicação de amigos ou parentes", ou seja, $p > 0,10$, cuja negativa é $p \leq 0,10$. Logo, as hipóteses são

$$\begin{aligned} H_0 &: p = 0,10 \\ H_1 &: p > 0,10 \end{aligned}$$

Com $\alpha = 5\%$ e um teste unilateral, $z_{0,05} = 1,64$.

A estatística de teste é

$$Z_0 = \frac{\hat{P} - 0,1}{\sqrt{\frac{0,1 \times 0,9}{700}}} \approx N(0,1) \text{ sob } H_0$$

e a região crítica é

$$Z_0 > 1,64$$

O valor observado da estatística de teste é

$$z_0 = \frac{0,123 - 0,1}{\sqrt{\frac{0,1 \times 0,9}{700}}} = 2,0284$$

Como o valor observado da estatística de teste pertence à região crítica, rejeita-se a hipótese nula, ou seja, os dados dâo evidência de que mais 10% dos trabalhadores conseguem seus empregos por indicação de parentes ou amigos.

8. O interesse é verificar se $p > 0,20$. Logo,

$$\begin{aligned} H_0 &: p = 0,20 \\ H_1 &: p > 0,20 \end{aligned}$$

A estatística de teste é

$$Z_0 = \frac{\hat{P} - 0,2}{\sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{64}}} \approx N(0,1) \text{ sob } H_0$$

Como $\alpha = 5\%$ e o teste é unilateral, resulta que $z_{0,05} = 1,64$ e a região crítica é

$$Z_0 > 1,64$$

O valor observado da estatística de teste é

$$z_0 = \frac{\frac{25}{64} - 0,20}{\sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{64}}} = 3,8125$$

que está na região crítica; logo, rejeita-se a hipótese nula, ou seja, as evidências amostrais indicam que houve melhora com as mudanças.

9. As hipóteses são

$$\begin{aligned} H_0 &: p = 0,5 \\ H_1 &: p \neq 0,5 \end{aligned}$$

e a estatística de teste é

$$Z_0 = \frac{\widehat{P} - 0,5}{\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{200}}} \approx N(0,1) \text{ sob } H_0$$

O valor observado da estatística de teste é

$$z_0 = \frac{\frac{115}{200} - 0,5}{\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{200}}} = 2,1213 \approx 2,12$$

e o valor P para o teste bilateral é

$$P = 2 \times \mathrm{P}(Z_0 > 2,12) = 2 \times (0,5 - tab(2,12)) = 0,034$$

Como o valor P é pequeno, a probabilidade de obtermos 115 caras em 200 lançamentos de uma moeda honesta é pequena, o que nos leva a suspeitar da honestidade da moeda. A hipótese nula seria rejeitada para qualquer nível de significância $\alpha \geq 3,4\%$. Isso inclui $\alpha = 5\%$, mas não $\alpha = 1\%$.

10. Com as informações disponíveis, nossas hipóteses são:

$$\begin{aligned} H_0 &: p = 0,25 \\ H_1 &: p \neq 0,25 \end{aligned}$$

e a estatística de teste é

$$Z_0 = \frac{\widehat{P} - 0,25}{\sqrt{\frac{0,25 \times 0,75}{740}}} \approx N(0,1) \text{ sob } H_0$$

O valor observado da estatística de teste é

$$z_0 = \frac{\frac{156}{740} - 0,25}{\sqrt{\frac{0,25 \times 0,75}{740}}} = -2,46$$

e o valor P para o teste bilateral é

$$P = 2 \times \mathrm{P}(Z_0 > 2,46) = 2 \times (0,5 - tab(2,46)) = 0,0139$$

Como o valor P é bastante pequeno, devemos rejeitar a hipótese nula de que a proporção de leitores da classe A é igual a 25%.

10.8 Capítulo 8

1. (a) $X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad n = 9 \qquad \overline{x} = 13,35 \qquad s = 3,1$

   A estatística de teste é

$$T_0 = \frac{\overline{X} - 12,8}{\frac{3,1}{3}} \sim t_8 \text{ sob } H_0$$

   $n = 9, \alpha = 0,02 \Rightarrow t_{8;\,0,01} = 2,896$. Logo, a região crítica é

$$T_0 > +2,896 \text{ ou } \ T_0 < -2,896$$

   (b) O valor observado da estatística de teste é

$$t_0 = \frac{13,35 - 12,8}{\frac{3,1}{3}} = 0,53226$$

   que não pertence à região crítica; logo, não podemos rejeitar H_0.

2. A afirmativa do fabricante é $\mu \geq 2$. Logo, a negação de tal afirmação é $\mu < 2$. Como essa última expressão não contém o sinal de igualdade, ela se torna a hipótese alternativa. Então, nossas hipóteses são:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 2 \\ H_1 &: \mu < 2 \end{aligned}$$

   $X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad n = 25 \qquad \overline{x} = 1,98 \qquad s = 0,5$

   A estatística de teste é

$$T_0 = \frac{\overline{X} - 2}{\frac{0,5}{5}} \sim t_{24} \text{ sob } H_0$$

   $n = 25; \alpha = 0,05 \Longrightarrow t_{24;\,0,05} = 1,711$. Logo, a região crítica é

$$T_0 < -1,711$$

   O valor observado da estatística de teste é

$$t_0 = \frac{1,98 - 2,0}{\frac{0,5}{5}} = -0,2$$

   que não pertence à região crítica; logo, não podemos rejeitar H_0, ou seja, as evidências amostrais indicam que as balas pesam pelo menos 2 gramas.

3. O problema na produção surge quando $\mu < 15$. Logo, nossas hipóteses são:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 15 \\ H_1 &: \mu < 15 \end{aligned}$$

   $X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad n = 9 \qquad \overline{x} = 14,5 \qquad s = 0,5$

A estatística de teste é

$$T_0 = \frac{\overline{X} - 15}{\frac{0,5}{3}} \sim t_8 \text{ sob } H_0$$

$n = 9, \alpha = 0,001 \Longrightarrow t_{8;\,0,001} = 4,501$. A região crítica é

$$T_0 < -4,501$$

O valor observado da estatística de teste é

$$t_0 = \frac{14,5 - 15}{\frac{0,5}{3}} = -3,0$$

que não está na região crítica. Logo, não podemos rejeitar H_0, ou seja, as evidências amostrais indicam que o processo está operando adequadamente.

4. A intenção do analista é reduzir o tempo; logo, o interesse dele é que $\mu < 48,5$. A negação dessa afirmativa é $\mu \geq 48,5$. Logo, nossas hipóteses são:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 48,5 \\ H_1 &: \mu < 48,5 \end{aligned}$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad n = 25 \qquad \overline{x} = 46,5 \qquad s = 5$

A estatística de teste é

$$T_0 = \frac{\overline{X} - 48,5}{\frac{5}{5}} \sim t_{24} \text{ sob } H_0$$

$n = 25, \alpha = 0,05 \Longrightarrow t_{24;\,0,05} = 1,711$. Logo, a região crítica é

$$T_0 < -1,711$$

O valor observado desta estatística é

$$t_0 = \frac{46,5 - 48,5}{\frac{5}{5}} = -2,0$$

Como o valor observado $t_0 = -2,0$ pertence à região crítica, devemos rejeitar H_0, ou seja, as evidências amostrais indicam que o analista foi bem-sucedido em reduzir o tempo de execução.

5. Se o consumo for menor ou igual a 12 litros por 100 km, não há problema com a propaganda. O problema surge se o consumo for superior. Logo, nossas hipóteses são:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 12 \\ H_1 &: \mu > 12 \end{aligned}$$

Supondo que o consumo X possa ser aproximado por uma distribuição normal, temos:

$X \approx N(\mu, \sigma^2) \qquad n = 36 \qquad \overline{x} = 12,4 \qquad s = 1$

A estatística de teste é

$$T_0 = \frac{\overline{X} - 12}{\frac{1}{6}} \sim t_{35} \text{ sob } H_0$$

$n = 36, \alpha = 10\% \Rightarrow t_{35;\,0,10} = 1,306$ e a região crítica é

$$T_0 > 1,306$$

O valor observado da estatística de teste é

$$t_0 = \frac{12,4 - 12}{\frac{1}{6}} = 2,4$$

Como o valor observado $t_0 = 2,4$ está na região crítica, devemos rejeitar H_0, ou seja, a propaganda parece ser enganosa.

10.9 Capítulo 9

1. A afirmativa é que temos amostra de uma população normal com $\sigma^2 = 36,8$, cuja negativa é $\sigma^2 \neq 36,8$. Logo, nossas hipóteses são

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma^2 = 36,8 \\ H_1 &: \sigma^2 \neq 36,8 \end{aligned}$$

A estatística de teste é

$$\chi_0^2 = \frac{15\, S^2}{36,8} \sim \chi_{15}^2 \text{ sob } H_0$$

.

$$n = 16 \qquad \alpha = 0,05 \Rightarrow \begin{cases} \chi^2_{15;0,975} = 6,262 \\ \\ \chi^2_{15;0,025} = 27,488 \end{cases}$$

A região crítica é

$$\chi_0^2 < 6,232 \qquad \text{ou} \qquad \chi_0^2 > 27,488$$

.

Para esses dados, temos que

$$\sum_{i=1}^{16} x_i = 3703,9 \qquad\qquad \sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 859017,65$$

Logo, a variância amostral é

$$s^2 = \frac{1}{15}\left(859017,65 - \frac{3703,9^2}{16}\right) = 105,8632917$$

e o valor observado da estatística de teste é

$$\chi_0^2 = \frac{15 \times 105,8632917}{36,8} = 43,15$$

que pertence à região crítica. Logo, os dados dão evidência de que a variânica é diferente de 36,8.

2. (a) Supondo normalidade, nossas hipóteses são

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma^2 = 1,56 \\ H_1 &: \sigma^2 \neq 1,56 \end{aligned}$$

A estatística de teste é

$$\chi_0^2 = \frac{29\, S^2}{1,56} \sim \chi_{29}^2 \text{ sob } H_0$$

.

$$n = 30 \qquad \alpha = 0,05 \Rightarrow \begin{cases} \chi^2_{29;0,975} = 16,047 \\ \\ \chi^2_{15;0,025} = 45,722 \end{cases}$$

A região crítica é

$$\chi_0^2 < 16,047 \qquad \text{ou} \qquad \chi_0^2 > 45,722$$

.

O valor observado da estatistica de teste é

$$\chi_0^2 = \frac{29 \times 2,2}{1,56} = 40,897$$

que não pertence à região crítica. Logo, os dados dão evidência de que não houve alteração variância da taxa de câmbio.

(b) Olhando na linha correspondente a 29 graus de liberdade, vemos que $39,087 < 40,897 < 42,557$. A abscissa 39,087 deixa probabilidade 0,1 acima dela e a abscissa 42,557 deixa probabilidade 0,05 acima dela, Logo, a probabilidade acima do valor observado 40,897 está entre 0,05 e 0,1. Como o teste é bilateral, o valor P está entre 0,1 e 0,2.

3. (a) Temos afirmativas sobre a média e sobre a variância do tempo de execução da tarefa. O objetivo do treinamento é reduzir tanto o tempo médio, quanto a variabilidade (variância). Logo, temos dois testes a realizar.

Teste sobre a média:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 40 \\ H_1 &: \mu < 40 \end{aligned}$$

Supondo que o tempo de execução X possa ser aproximado por uma distribuição normal, temos:

$X \approx N(\mu, \sigma^2) \qquad n = 14 \qquad \overline{x} = 35,6 \qquad s = 3,4$

A estatística de teste é

$$T_0 = \frac{\overline{X} - 40}{\frac{3,4}{\sqrt{14}}} \sim t_{13} \text{ sob } H_0$$

$n = 14$, $\alpha = 2,5\% \Rightarrow t_{13;\,0,025} = 2,160$ e a região crítica é

$$T_0 < -2,160$$

O valor observado da estatística de teste é

$$t_0 = \frac{35,6 - 40}{\frac{3,4}{\sqrt{14}}} = -4,84$$

Como o valor observado $t_0 = -4,84$ está na região crítica, devemos rejeitar H_0, ou seja, há evidências de que o treinamento conseguiu reduzir o tempo médio de execução.

O valor da menor abscissa na cauda esquerda da ditribuição t_{13} é -3,852, que corrsponde a uma probabilidade de 0,001 abaixo dela. Logo, o valor $P < 0,001$. (O valor exato é $P = 0,000161435$.)

Teste sobre a variância:

$$\begin{array}{lcl} H_0 & : & \sigma^2 = 36 \\ H_1 & : & \sigma^2 < 36 \end{array}$$

Supondo que o tempo de execução X possa ser aproximado por uma distribuição normal, a estatística de teste é

$$\chi_0^2 = \frac{13\,S^2}{36} \sim \chi_{13}^2 \text{ sob } H_0$$

.

$$n = 14 \qquad \alpha = 0,025 \Rightarrow \chi^2_{13;0,975} = 5,009$$

A região crítica é $\chi_0^2 < 5,009$.

O valor observado da estatistica de teste é

$$\chi_0^2 = \frac{14 \times 3,4^2}{36} = 4,17$$

que pertence à região crítica. Logo, os dados dão evidência de que o treinamento também reduziu a variabilidade dos tempos de execução.

Olhando na linha correspondente a 13 graus de liberdade, vemos que $4,107 < 4,17 < 4,765$. A abscissa 4,107 deixa probabilidade 0,01 abaixo dela e a abscissa 4,765 deixa probabilidade 0,02 abaixo dela, Logo, a probabilidade abaixo do valor observado 4,17 está entre 0,01 e 0,02. Como o teste é unilateral, o valor P está entre 0,01 e 0,02 (Obs. O valor exato é $P = 0,010755078$.)

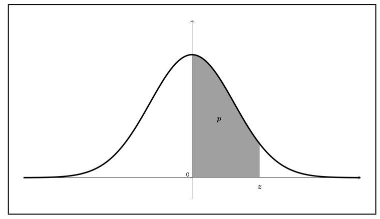
(b) **I.C. para a média**

$\epsilon = 2,160 \times \dfrac{3,4}{\sqrt{14}} = 1,9628$

$[35,6 - 1,9628; 35,6 + 1,9628] = [33,6372; 37,5628]$ I.C. para a variância

$\left[\dfrac{13 \times 3,4^2}{24,736}; \dfrac{13 \times 3,4^2}{5,009}\right] = [6,075; 30,002]$

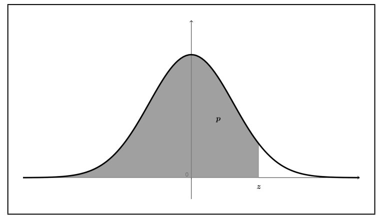
Tabela da distribuição normal padrão
$p = \mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$



Casa inteira e 1a.decimal	2a. casa decimal 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Tabela da distribuição acumulada da normal padrão

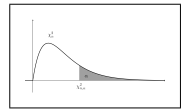
$p = \mathrm{P}(Z \leq z)$



Casa inteira e 1a.decimal	2a. casa decimal 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Valores críticos $\chi^2_{n,\alpha}$ da qui-quadrado

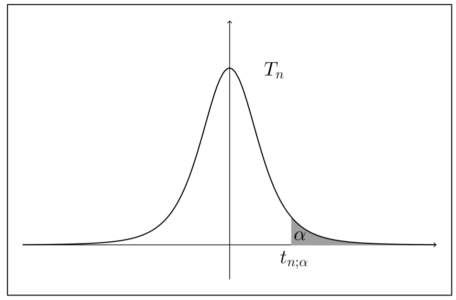
$\alpha = P(\chi^2_n > \chi^2_{n,\alpha})$



gl n	$\alpha =$	0,999	0,995	0,990	0,980	0,975	0,950	0,900	0,800	0,200	0,100	0,050	0,025	0,020	0,010	0,005	0,001
1		0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,004	0,016	0,064	1,642	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635	7,879	10,828
2		0,002	0,010	0,020	0,040	0,051	0,103	0,211	0,446	3,219	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210	10,597	13,816
3		0,024	0,072	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	1,005	4,642	6,251	7,815	9,348	9,837	11,345	12,838	16,266
4		0,091	0,207	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	1,649	5,989	7,779	9,488	11,143	11,668	13,277	14,860	18,467
5		0,210	0,412	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	2,343	7,289	9,236	11,070	12,833	13,388	15,086	16,750	20,515
6		0,381	0,676	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	3,070	8,558	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812	18,548	22,458
7		0,598	0,989	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	3,822	9,803	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475	20,278	24,322
8		0,857	1,344	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490	4,594	11,030	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090	21,955	26,124
9		1,152	1,735	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168	5,380	12,242	14,684	16,919	19,023	19,679	21,666	23,589	27,877
10		1,479	2,156	2,558	3,059	3,247	3,940	4,865	6,179	13,442	15,987	18,307	20,483	21,161	23,209	25,188	29,588
11		1,834	2,603	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578	6,989	14,631	17,275	19,675	21,920	22,618	24,725	26,757	31,264
12		2,214	3,074	3,571	4,178	4,404	5,226	6,304	7,807	15,812	18,549	21,026	23,337	24,054	26,217	28,300	32,909
13		2,617	3,565	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042	8,634	16,985	19,812	22,362	24,736	25,472	27,688	29,819	34,528
14		3,041	4,075	4,660	5,368	5,629	6,571	7,790	9,467	18,151	21,064	23,685	26,119	26,873	29,141	31,319	36,123
15		3,483	4,601	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547	10,307	19,311	22,307	24,996	27,488	28,259	30,578	32,801	37,697
16		3,942	5,142	5,812	6,614	6,908	7,962	9,312	11,152	20,465	23,542	26,296	28,845	29,633	32,000	34,267	39,252
17		4,416	5,697	6,408	7,255	7,564	8,672	10,085	12,002	21,615	24,769	27,587	30,191	30,995	33,409	35,718	40,790
18		4,905	6,265	7,015	7,906	8,231	9,390	10,865	12,857	22,760	25,989	28,869	31,526	32,346	34,805	37,156	42,312
19		5,407	6,844	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651	13,716	23,900	27,204	30,144	32,852	33,687	36,191	38,582	43,820
20		5,921	7,434	8,260	9,237	9,591	10,851	12,443	14,578	25,038	28,412	31,410	34,170	35,020	37,566	39,997	45,315
21		6,447	8,034	8,897	9,915	10,283	11,591	13,240	15,445	26,171	29,615	32,671	35,479	36,343	38,932	41,401	46,797
22		6,983	8,643	9,542	10,600	10,982	12,338	14,041	16,314	27,301	30,813	33,924	36,781	37,659	40,289	42,796	48,268
23		7,529	9,260	10,196	11,293	11,689	13,091	14,848	17,187	28,429	32,007	35,172	38,076	38,968	41,638	44,181	49,728
24		8,085	9,886	10,856	11,992	12,401	13,848	15,659	18,062	29,553	33,196	36,415	39,364	40,270	42,980	45,559	51,179
25		8,649	10,520	11,524	12,697	13,120	14,611	16,473	18,940	30,675	34,382	37,652	40,646	41,566	44,314	46,928	52,620
26		9,222	11,160	12,198	13,409	13,844	15,379	17,292	19,820	31,795	35,563	38,885	41,923	42,856	45,642	48,290	54,052
27		9,803	11,808	12,879	14,125	14,573	16,151	18,114	20,703	32,912	36,741	40,113	43,195	44,140	46,963	49,645	55,476
28		10,391	12,461	13,565	14,847	15,308	16,928	18,939	21,588	34,027	37,916	41,337	44,461	45,419	48,278	50,993	56,892
29		10,986	13,121	14,256	15,574	16,047	17,708	19,768	22,475	35,139	39,087	42,557	45,722	46,693	49,588	52,336	58,301
30		11,588	13,787	14,953	16,306	16,791	18,493	20,599	23,364	36,250	40,256	43,773	46,979	47,962	50,892	53,672	59,703

Valores críticos $t_{n;\alpha}$ da t-Student

$\alpha = \mathrm{P}(T_n > t_{n;\alpha})$



gl	Probabilidade α na cauda superior												
n	0,150	0,100	0,060	0,050	0,040	0,030	0,025	0,020	0,010	0,005	0,0025	0,002	0,001
1	1,963	3,078	5,242	6,314	7,916	10,579	12,706	15,895	31,821	63,657	127,321	159,153	318,309
2	1,386	1,886	2,620	2,920	3,320	3,896	4,303	4,849	6,965	9,925	14,089	15,764	22,327
3	1,250	1,638	2,156	2,353	2,605	2,951	3,182	3,482	4,541	5,841	7,453	8,053	10,215
4	1,190	1,533	1,971	2,132	2,333	2,601	2,776	2,999	3,747	4,604	5,598	5,951	7,173
5	1,156	1,476	1,873	2,015	2,191	2,422	2,571	2,757	3,365	4,032	4,773	5,030	5,893
6	1,134	1,440	1,812	1,943	2,104	2,313	2,447	2,612	3,143	3,707	4,317	4,524	5,208
7	1,119	1,415	1,770	1,895	2,046	2,241	2,365	2,517	2,998	3,499	4,029	4,207	4,785
8	1,108	1,397	1,740	1,860	2,004	2,189	2,306	2,449	2,896	3,355	3,833	3,991	4,501
9	1,100	1,383	1,718	1,833	1,973	2,150	2,262	2,398	2,821	3,250	3,690	3,835	4,297
10	1,093	1,372	1,700	1,812	1,948	2,120	2,228	2,359	2,764	3,169	3,581	3,716	4,144
11	1,088	1,363	1,686	1,796	1,928	2,096	2,201	2,328	2,718	3,106	3,497	3,624	4,025
12	1,083	1,356	1,674	1,782	1,912	2,076	2,179	2,303	2,681	3,055	3,428	3,550	3,930
13	1,079	1,350	1,664	1,771	1,899	2,060	2,160	2,282	2,650	3,012	3,372	3,489	3,852
14	1,076	1,345	1,656	1,761	1,887	2,046	2,145	2,264	2,624	2,977	3,326	3,438	3,787
15	1,074	1,341	1,649	1,753	1,878	2,034	2,131	2,249	2,602	2,947	3,286	3,395	3,733
16	1,071	1,337	1,642	1,746	1,869	2,024	2,120	2,235	2,583	2,921	3,252	3,358	3,686
17	1,069	1,333	1,637	1,740	1,862	2,015	2,110	2,224	2,567	2,898	3,222	3,326	3,646
18	1,067	1,330	1,632	1,734	1,855	2,007	2,101	2,214	2,552	2,878	3,197	3,298	3,610
19	1,066	1,328	1,628	1,729	1,850	2,000	2,093	2,205	2,539	2,861	3,174	3,273	3,579
20	1,064	1,325	1,624	1,725	1,844	1,994	2,086	2,197	2,528	2,845	3,153	3,251	3,552
21	1,063	1,323	1,621	1,721	1,840	1,988	2,080	2,189	2,518	2,831	3,135	3,231	3,527
22	1,061	1,321	1,618	1,717	1,835	1,983	2,074	2,183	2,508	2,819	3,119	3,214	3,505
23	1,060	1,319	1,615	1,714	1,832	1,978	2,069	2,177	2,500	2,807	3,104	3,198	3,485
24	1,059	1,318	1,612	1,711	1,828	1,974	2,064	2,172	2,492	2,797	3,091	3,183	3,467
25	1,058	1,316	1,610	1,708	1,825	1,970	2,060	2,167	2,485	2,787	3,078	3,170	3,450
26	1,058	1,315	1,608	1,706	1,822	1,967	2,056	2,162	2,479	2,779	3,067	3,158	3,435
27	1,057	1,314	1,606	1,703	1,819	1,963	2,052	2,158	2,473	2,771	3,057	3,147	3,421
28	1,056	1,313	1,604	1,701	1,817	1,960	2,048	2,154	2,467	2,763	3,047	3,136	3,408
29	1,055	1,311	1,602	1,699	1,814	1,957	2,045	2,150	2,462	2,756	3,038	3,127	3,396
30	1,055	1,310	1,600	1,697	1,812	1,955	2,042	2,147	2,457	2,750	3,030	3,118	3,385
31	1,054	1,309	1,599	1,696	1,810	1,952	2,040	2,144	2,453	2,744	3,022	3,109	3,375
32	1,054	1,309	1,597	1,694	1,808	1,950	2,037	2,141	2,449	2,738	3,015	3,102	3,365
33	1,053	1,308	1,596	1,692	1,806	1,948	2,035	2,138	2,445	2,733	3,008	3,094	3,356
34	1,052	1,307	1,595	1,691	1,805	1,946	2,032	2,136	2,441	2,728	3,002	3,088	3,348
35	1,052	1,306	1,594	1,690	1,803	1,944	2,030	2,133	2,438	2,724	2,996	3,081	3,340
36	1,052	1,306	1,593	1,688	1,802	1,942	2,028	2,131	2,434	2,719	2,990	3,075	3,333
37	1,051	1,305	1,592	1,687	1,800	1,940	2,026	2,129	2,431	2,715	2,985	3,070	3,326
38	1,051	1,304	1,591	1,686	1,799	1,939	2,024	2,127	2,429	2,712	2,980	3,064	3,319
39	1,050	1,304	1,590	1,685	1,798	1,937	2,023	2,125	2,426	2,708	2,976	3,059	3,313
40	1,050	1,303	1,589	1,684	1,796	1,936	2,021	2,123	2,423	2,704	2,971	3,055	3,307

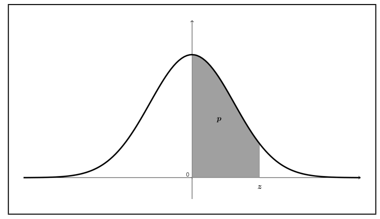
Apêndice A

Tabelas

- Tabela da distribuição normal padrão – $p = \mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
- Tabela da distribuição acumulada da normal padrão – $\Phi(z) = \mathrm{P}(Z \leq z),\ z \geq 0$
- Valores críticos $\chi^2_{n,\alpha}$ da qui-quadrado – $\mathrm{P}(\chi^2_n > \chi^2_{n,\alpha}) = \alpha$
- Valores críticos $t_{n;\alpha}$ da distribuição t – $\mathrm{P}(T_n > t_{n,\alpha}) = \alpha$

Tabela da distribuição normal padrão

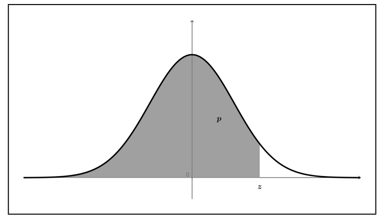
$p = \mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$



Casa inteira e 1a.decimal	2a. casa decimal 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Tabela da distribuição acumulada da normal padrão

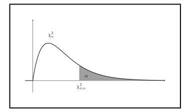
$p = \mathrm{P}(Z \leq z)$



Casa inteira	2a. casa decimal									
e 1a.decimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Valores críticos $\chi^2_{n,\alpha}$ da qui-quadrado

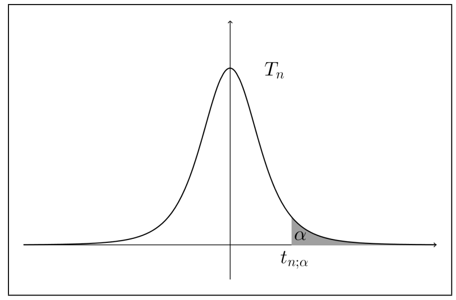
$\alpha = P(\chi^2_n > \chi^2_{n,\alpha})$



gl n	$\alpha =$ 0,999	0,995	0,990	0,980	0,975	0,950	0,900	0,800	0,200	0,100	0,050	0,025	0,020	0,010	0,005	0,001
1	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,004	0,016	0,064	1,642	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635	7,879	10,828
2	0,002	0,010	0,020	0,040	0,051	0,103	0,211	0,446	3,219	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210	10,597	13,816
3	0,024	0,072	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	1,005	4,642	6,251	7,815	9,348	9,837	11,345	12,838	16,266
4	0,091	0,207	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	1,649	5,989	7,779	9,488	11,143	11,668	13,277	14,860	18,467
5	0,210	0,412	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	2,343	7,289	9,236	11,070	12,833	13,388	15,086	16,750	20,515
6	0,381	0,676	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	3,070	8,558	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812	18,548	22,458
7	0,598	0,989	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	3,822	9,803	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475	20,278	24,322
8	0,857	1,344	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490	4,594	11,030	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090	21,955	26,124
9	1,152	1,735	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168	5,380	12,242	14,684	16,919	19,023	19,679	21,666	23,589	27,877
10	1,479	2,156	2,558	3,059	3,247	3,940	4,865	6,179	13,442	15,987	18,307	20,483	21,161	23,209	25,188	29,588
11	1,834	2,603	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578	6,989	14,631	17,275	19,675	21,920	22,618	24,725	26,757	31,264
12	2,214	3,074	3,571	4,178	4,404	5,226	6,304	7,807	15,812	18,549	21,026	23,337	24,054	26,217	28,300	32,909
13	2,617	3,565	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042	8,634	16,985	19,812	22,362	24,736	25,472	27,688	29,819	34,528
14	3,041	4,075	4,660	5,368	5,629	6,571	7,790	9,467	18,151	21,064	23,685	26,119	26,873	29,141	31,319	36,123
15	3,483	4,601	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547	10,307	19,311	22,307	24,996	27,488	28,259	30,578	32,801	37,697
16	3,942	5,142	5,812	6,614	6,908	7,962	9,312	11,152	20,465	23,542	26,296	28,845	29,633	32,000	34,267	39,252
17	4,416	5,697	6,408	7,255	7,564	8,672	10,085	12,002	21,615	24,769	27,587	30,191	30,995	33,409	35,718	40,790
18	4,905	6,265	7,015	7,906	8,231	9,390	10,865	12,857	22,760	25,989	28,869	31,526	32,346	34,805	37,156	42,312
19	5,407	6,844	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651	13,716	23,900	27,204	30,144	32,852	33,687	36,191	38,582	43,820
20	5,921	7,434	8,260	9,237	9,591	10,851	12,443	14,578	25,038	28,412	31,410	34,170	35,020	37,566	39,997	45,315
21	6,447	8,034	8,897	9,915	10,283	11,591	13,240	15,445	26,171	29,615	32,671	35,479	36,343	38,932	41,401	46,797
22	6,983	8,643	9,542	10,600	10,982	12,338	14,041	16,314	27,301	30,813	33,924	36,781	37,659	40,289	42,796	48,268
23	7,529	9,260	10,196	11,293	11,689	13,091	14,848	17,187	28,429	32,007	35,172	38,076	38,968	41,638	44,181	49,728
24	8,085	9,886	10,856	11,992	12,401	13,848	15,659	18,062	29,553	33,196	36,415	39,364	40,270	42,980	45,559	51,179
25	8,649	10,520	11,524	12,697	13,120	14,611	16,473	18,940	30,675	34,382	37,652	40,646	41,566	44,314	46,928	52,620
26	9,222	11,160	12,198	13,409	13,844	15,379	17,292	19,820	31,795	35,563	38,885	41,923	42,856	45,642	48,290	54,052
27	9,803	11,808	12,879	14,125	14,573	16,151	18,114	20,703	32,912	36,741	40,113	43,195	44,140	46,963	49,645	55,476
28	10,391	12,461	13,565	14,847	15,308	16,928	18,939	21,588	34,027	37,916	41,337	44,461	45,419	48,278	50,993	56,892
29	10,986	13,121	14,256	15,574	16,047	17,708	19,768	22,475	35,139	39,087	42,557	45,722	46,693	49,588	52,336	58,301
30	11,588	13,787	14,953	16,306	16,791	18,493	20,599	23,364	36,250	40,256	43,773	46,979	47,962	50,892	53,672	59,703

Valores críticos $t_{n;\alpha}$ da t-Student

$\alpha = \mathrm{P}(T_n > t_{n;\alpha})$



gl	Probabilidade α na cauda superior												
n	0,150	0,100	0,060	0,050	0,040	0,030	0,025	0,020	0,010	0,005	0,0025	0,002	0,001
1	1,963	3,078	5,242	6,314	7,916	10,579	12,706	15,895	31,821	63,657	127,321	159,153	318,309
2	1,386	1,886	2,620	2,920	3,320	3,896	4,303	4,849	6,965	9,925	14,089	15,764	22,327
3	1,250	1,638	2,156	2,353	2,605	2,951	3,182	3,482	4,541	5,841	7,453	8,053	10,215
4	1,190	1,533	1,971	2,132	2,333	2,601	2,776	2,999	3,747	4,604	5,598	5,951	7,173
5	1,156	1,476	1,873	2,015	2,191	2,422	2,571	2,757	3,365	4,032	4,773	5,030	5,893
6	1,134	1,440	1,812	1,943	2,104	2,313	2,447	2,612	3,143	3,707	4,317	4,524	5,208
7	1,119	1,415	1,770	1,895	2,046	2,241	2,365	2,517	2,998	3,499	4,029	4,207	4,785
8	1,108	1,397	1,740	1,860	2,004	2,189	2,306	2,449	2,896	3,355	3,833	3,991	4,501
9	1,100	1,383	1,718	1,833	1,973	2,150	2,262	2,398	2,821	3,250	3,690	3,835	4,297
10	1,093	1,372	1,700	1,812	1,948	2,120	2,228	2,359	2,764	3,169	3,581	3,716	4,144
11	1,088	1,363	1,686	1,796	1,928	2,096	2,201	2,328	2,718	3,106	3,497	3,624	4,025
12	1,083	1,356	1,674	1,782	1,912	2,076	2,179	2,303	2,681	3,055	3,428	3,550	3,930
13	1,079	1,350	1,664	1,771	1,899	2,060	2,160	2,282	2,650	3,012	3,372	3,489	3,852
14	1,076	1,345	1,656	1,761	1,887	2,046	2,145	2,264	2,624	2,977	3,326	3,438	3,787
15	1,074	1,341	1,649	1,753	1,878	2,034	2,131	2,249	2,602	2,947	3,286	3,395	3,733
16	1,071	1,337	1,642	1,746	1,869	2,024	2,120	2,235	2,583	2,921	3,252	3,358	3,686
17	1,069	1,333	1,637	1,740	1,862	2,015	2,110	2,224	2,567	2,898	3,222	3,326	3,646
18	1,067	1,330	1,632	1,734	1,855	2,007	2,101	2,214	2,552	2,878	3,197	3,298	3,610
19	1,066	1,328	1,628	1,729	1,850	2,000	2,093	2,205	2,539	2,861	3,174	3,273	3,579
20	1,064	1,325	1,624	1,725	1,844	1,994	2,086	2,197	2,528	2,845	3,153	3,251	3,552
21	1,063	1,323	1,621	1,721	1,840	1,988	2,080	2,189	2,518	2,831	3,135	3,231	3,527
22	1,061	1,321	1,618	1,717	1,835	1,983	2,074	2,183	2,508	2,819	3,119	3,214	3,505
23	1,060	1,319	1,615	1,714	1,832	1,978	2,069	2,177	2,500	2,807	3,104	3,198	3,485
24	1,059	1,318	1,612	1,711	1,828	1,974	2,064	2,172	2,492	2,797	3,091	3,183	3,467
25	1,058	1,316	1,610	1,708	1,825	1,970	2,060	2,167	2,485	2,787	3,078	3,170	3,450
26	1,058	1,315	1,608	1,706	1,822	1,967	2,056	2,162	2,479	2,779	3,067	3,158	3,435
27	1,057	1,314	1,606	1,703	1,819	1,963	2,052	2,158	2,473	2,771	3,057	3,147	3,421
28	1,056	1,313	1,604	1,701	1,817	1,960	2,048	2,154	2,467	2,763	3,047	3,136	3,408
29	1,055	1,311	1,602	1,699	1,814	1,957	2,045	2,150	2,462	2,756	3,038	3,127	3,396
30	1,055	1,310	1,600	1,697	1,812	1,955	2,042	2,147	2,457	2,750	3,030	3,118	3,385
31	1,054	1,309	1,599	1,696	1,810	1,952	2,040	2,144	2,453	2,744	3,022	3,109	3,375
32	1,054	1,309	1,597	1,694	1,808	1,950	2,037	2,141	2,449	2,738	3,015	3,102	3,365
33	1,053	1,308	1,596	1,692	1,806	1,948	2,035	2,138	2,445	2,733	3,008	3,094	3,356
34	1,052	1,307	1,595	1,691	1,805	1,946	2,032	2,136	2,441	2,728	3,002	3,088	3,348
35	1,052	1,306	1,594	1,690	1,803	1,944	2,030	2,133	2,438	2,724	2,996	3,081	3,340
36	1,052	1,306	1,593	1,688	1,802	1,942	2,028	2,131	2,434	2,719	2,990	3,075	3,333
37	1,051	1,305	1,592	1,687	1,800	1,940	2,026	2,129	2,431	2,715	2,985	3,070	3,326
38	1,051	1,304	1,591	1,686	1,799	1,939	2,024	2,127	2,429	2,712	2,980	3,064	3,319
39	1,050	1,304	1,590	1,685	1,798	1,937	2,023	2,125	2,426	2,708	2,976	3,059	3,313
40	1,050	1,303	1,589	1,684	1,796	1,936	2,021	2,123	2,423	2,704	2,971	3,055	3,307