Universidade Federal Fluminense

Instituto de Matemática e Estatística

Departamento de Estatística uff

Inferência Estatística - Ideias Básicas

Ana Maria Lima de Farias
Departamento de Estatística

18 de março de 2021

Conteúdo

Capítulo 1

Inferência Estatística – Conceitos Básicos

Na primeira parte do curso foi visto como resumir um conjunto de dados por meio de tabelas de frequências, gráficos e medidas de posição e dispersão. Depois, foram estudados modelos probabilísticos, discretos ou contínuos, para descrever determinados fenômenos. Agora, essas ferramentas serão utilizadas no estudo de um importante ramo da Estatística, conhecido como *Inferência Estatística*, que busca métodos de fazer afirmações sobre características de uma *população*, conhecendo-se apenas resultados de uma *amostra*.

- população e amostra;
- amostra aleatória simples;
- estatísticas e parâmetros;
- estimador;
- distribuição amostral de um estimador.

Introdução

No estudo da estatística descritiva na primeira parte do curso, vimos que população é o conjunto de elementos para os quais se deseja estudar determinada(s) característica(s). Vimos também que uma amostra é um subconjunto da população.

No estudo da inferência estatística, o objetivo principal é obter informações sobre uma população a partir das informações de uma amostra e aqui vamos precisar de definições mais formais de população e amostra. Para facilitar a compreensão desses conceitos, iremos apresentar alguns exemplos a título de ilustração.

Exemplo 1.1

Em um estudo antropométrico em nível nacional, uma amostra de 5000 adultos é selecionada dentre os adultos brasileiros com objetivo de se estimara a altura média do brasileiro.

Solução:

Neste exemplo, a população é o conjunto de todos os brasileiros adultos. No entanto, o interesse (um deles, pelo menos) está na altura dos brasileiros. Assim, nesse estudo, a cada sujeito da população, associamos um número correspondente à sua altura. Se determinado sujeito é sorteado para entrar na amostra, o que nos interessa é esse número, ou seja, sua altura.

Como vimos, essa é a definição de variável aleatória: uma função que associa a cada ponto do espaço amostral um número real. Dessa forma, a nossa população pode ser representada pela variável aleatória $X =$ "altura do adulto brasileiro". Como essa é uma variável aleatória contínua, a ela está associada uma função densidade de probabilidade f e da literatura, sabemos que é razoável supor que essa densidade seja a densidade normal. Assim, nossa população, nesse caso, é representada por uma variável aleatória $X \sim N\left(\mu; \sigma^2\right)$. Conhecendo os valores de μ e σ, teremos informações completas sobre a nossa população.

Uma forma de obtermos os valores de μ e σ é medindo as alturas de todos os brasileiros adultos. Mas esse seria um procedimento caro e demorado. Uma solução, então, é retirar uma amostra (subconjunto) da população e estudar essa amostra. Suponhamos que essa amostra seja retirada com reposição e que os sorteios sejam feitos de forma independente, isto é, o resultado de cada extração não altere o resultado das demais extrações. Ao sortearmos o primeiro elemento, estamos realizando um experimento que dá origem à variável aleatória $X_1 =$ "altura do primeiro elemento"; o segundo elemento dá origem à variável aleatória $X_2 =$ " altura do segundo elemento" e assim por diante. Como as extrações são feitas com reposição, todas as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots$ têm a mesma distribuição, que reflete a distribuição da altura de todos os brasileiros adultos. Para uma amostra específica, temos os valores observados $x_1, x_2, \ldots$ dessas variáveis aleatórias.

♦♦

Exemplo 1.2

Consideremos, agora, um exemplo baseado em pesquisas eleitorais, em que estamos interessados no resultado do segundo turno de uma eleição presidencial brasileira. Vamos considerar uma situação simplificada em que não estamos considerando votos nulos, indecisos etc. Nosso interesse é estimar a proporção de votos no candidato A.

Solução:

Mais uma vez, nossos sujeitos de pesquisa são pessoas com 16 anos ou mais, aptas a votar. O interesse final é saber a proporção de votos de um e outro candidato. Nesta situação simplificada, cada sujeito de pesquisa dá origem a uma variável aleatória binária, isto é, uma variável aleatória que assume apenas dois valores. Como visto, podemos representar esses valores por 1 (candidato A) e 0 (candidato B), o que define uma variável aleatória de Bernoulli, ou seja, essa população pode ser representada pela variável aleatória $X \sim Bern(p)$.

O parâmetro p representa a probabilidade de um sujeito dessa população votar no candidato A. Uma outra interpretação é que p representa a proporção populacional de votantes no candidato A.

Para obtermos informação sobre p, retira-se uma amostra da população e, como antes, vamos supor que essa amostra seja retirada com reposição. Ao sortearmos o primeiro elemento, estamos realizando um experimento que dá origem à variável aleatória X_1 = "voto do primeiro elemento"; o segundo elemento dá origem à variável aleatória X_2 = "voto do segundo elemento" e assim por diante. Como as extrações são feitas com reposição, todas as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \dots$ têm a mesma distribuição de Bernoulli populacional, isto é, $X_i \sim Bern(p), i = 1, 2, \dots$.

♦♦

População

A inferência estatística trata do problema de se obter informação sobre uma população a partir de uma amostra. Embora a população real possa ser constituída por pessoas, empresas, animais etc., as pesquisas estatísticas buscam informações sobre determinadas características dos sujeitos, características essas que podem ser representadas por números. Sendo assim, a cada sujeito da população está associado um número, o que nos permite apresentar a seguinte definiçõa, ilustrada nos dois exemplos acima.

Definição 1.1
*A **população** de uma pesquisa estatística pode ser representada por uma variável aleatória X que descreve a característica de interesse.*

Os métodos de inferência nos permitirão obter estimativas dos parâmetros da distribuição de tal variável aleatória, que pode ser contínua ou discreta.

Amostra Aleatória Simples

Como já dito, é bastante comum o emprego da amostragem em pesquisas estatísticas. Nas pesquisas por amostragem, uma amostra é selecionada da população de interesse e todas as conclusões serão baseadas apenas nessa amostra. Para que seja possível inferir resultados para a população a partir da amostra, é necessário que esta seja "representativa" da população.

Embora existam vários métodos de seleção de amostras, vamos nos concentrar, aqui, no caso mais simples, que é a *amostragem aleatória simples*. Segundo tal método, toda amostra de mesmo tamanho n tem igual chance (probabilidade) de ser sorteada. É possível extrair amostras aleatórias simples com ou sem reposição.

Quando estudamos as distribuições binomial e hipergeométrica, vimos que a distribuição binomial correspondia a extrações com reposição e a distribuição hipergeométrica correspondia a extrações sem reposição. No entanto, para populações grandes – ou infinitas – extrações com e sem reposição não levam a resultados muito diferentes.

Assim, no estudo da Inferência Estatística, vamos sempre lidar com amostragem aleatória simples *com* reposição. Esse método de seleção atribui a cada elemento da população a mesma probabilidade de ser selecionado e esta probabilidade se mantém constante ao longo do processo de seleção da amostra (se as extrações fossem sem reposição isso não aconteceria).

No restante desse curso, vamos omitir a expressão "com reposição", ou seja, o termo amostragem (ou amostra) aleatória simples sempre se referirá à amostragem com reposição.

Uma forma de se obter uma amostra aleatória simples é escrever os números ou nomes dos elementos da população em cartões iguais, colocar esses cartões em uma urna misturando-os bem e fazer os sorteios necessários, tendo o cuidado de colocar cada cartão sorteado na urna antes do próximo sorteio. Na prática, em geral, são usados programas de computador, uma vez que as populações tendem a ser muito grandes.

Agora vamos formalizar o processo de seleção de uma amostra aleatória simples, de forma a relacioná-lo com os problemas de inferência estatística que você vai estudar.

Seja uma população representada por uma variável aleatória X. De tal população será sorteada uma amostra aleatória simples com reposição de tamanho n. Como visto nos exemplos anteriores, cada sorteio dá origem a uma variável aleatória X_i e, como os sorteios são com reposição, todas essas variáveis têm a mesma distribuição de X. Isso nos leva à seguinte definição.

Definição 1.2
*Uma **amostra aleatória simples** de tamanho n de uma variável aleatória X (população) é um conjunto de n variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_n$ independentes e identicamente distribuídas.*

É interessante notar a convenção usual: o valor observado de uma variável aleatória X é representado pela letra minúscula correspondente. Assim, depois do sorteio de uma amostra de tamanho n de uma população X, temos valores observados $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de X.

Estatísticas e Parâmetros

Obtida uma amostra aleatória simples, é possível calcular diversas características desta amostra, como, por exemplo, a média, a mediana, a variância etc. Qualquer uma destas características é uma função de $X_1, X_2, ..., X_n$ e, portanto, o seu valor depende da amostra sorteada.

Sendo assim, cada uma dessas características ou funções é também uma variável aleatória Por exemplo, a média amostral é a variável aleatória definida por

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Isso nos leva à seguinte definição

Definição 1.3
*Uma **estatística amostral** ou **estimador** T é qualquer função da amostra $X_1, X_2, ..., X_n$, isto é,*

$$T = g(X_1, X_2, ..., X_n)$$

onde g é uma função qualquer.

As estatísticas amostrais que consideraremos neste curso são:

- média amostral

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \tag{1.1}$$

- variância amostral

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \tag{1.2}$$

Para uma amostra específica, o valor obtido para o estimador será denominado **estimativa** e, em geral, será representado por letras minúsculas. Por exemplo, temos as seguintes notações correspondentes à média e à variância amostrais: $\overline{x}$ e s^2.

De forma análoga, temos as características de interesse da população. No entanto, para diferenciar as duas situações (população e amostra), atribuímos nomes diferentes.

Definição 1.4
***Parâmetro** é uma característica da população.*

Assim, se a população é representada pela variável aleatória X, alguns parâmetros são a esperança ou média $\mathrm{E}(X)$ e a variância $\mathrm{Var}(X)$ de X.

Com relação às características mais usuais, vamos usar a seguinte notação:

Característica	**Parâmetro (população)**	**Estatística (amostra)**
Média	μ	$\overline{X}$
Variância	σ^2	S^2
Número de elementos	N	n

Distribuições Amostrais

Nos problemas de inferência, estamos interessados em estimar um parâmetro θ da população por meio de uma amostra aleatória simples $X_1, X_2, ..., X_n$. Para isso, usamos uma estatística T e, com base no valor obtido para T a partir de uma amostra particular, iremos tomar as decisões que o problema exige. Já foi dito que T é uma variável aleatória, uma vez que depende da amostra sorteada; amostras diferentes fornecerão diferentes valores para T. Assim, há variabilidade entre as possíveis amostras. Conhecendo tal variabilidade, temos condições de saber "quão infelizes" podemos ser no sorteio da amostra.

Exemplo 1.3

Consideremos a população $\{1, 3, 6, 8\}$, isto é, este é o conjunto dos valores da característica de interesse da população em estudo. Suponha que dessa população iremos extrair uma amostra aleatória simples de tamanho dois e, com base nessa amostra, iremos estimar a média populacional μ a partir da média da média amostral. Vamos, então, estudar o comportamento de $\overline{X}$ ao longo de todas as 16 possíveis amostras de tamanho $n = 2$.

Solução:

Consideremos, inicialmente, a população descrita pela variável aleatória X. Como todos os elementos são igualmente prováveis, temos uma distribuição uniforme discreta:

$$p_X(x) = \begin{cases} 4/16 & \text{, se } x = 1 \\ 4/16 & \text{, se } x = 3 \\ 4/16 & \text{, se } x = 6 \\ 4/16 & \text{, se } x = 8 \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

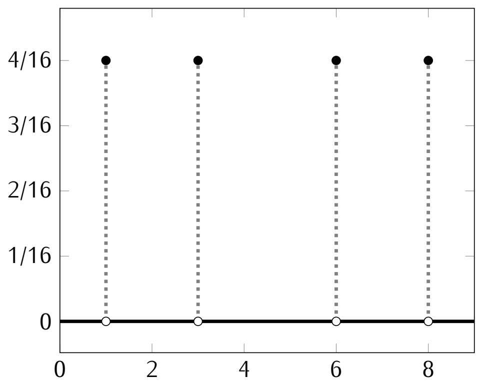


Figura 1.1 – Distribuição de X - população

Para esta população, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) = \mu &= \frac{1}{4}(1+3+6+8) = 4,5 \\
\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 &= \frac{1}{4}\left[(1-4,5)^2 + (3-4,5)^2 + (6-4,5)^2 + (8-4,5)^2\right] = 7,25
\end{aligned}$$

Algumas possibilidades de amostra são $\{1,1\}$, $\{1,3\}$, $\{6,8\}$, para as quais os valores da média amostral são 1, 2 e 7, respectivamente. Podemos ver, então, que há uma variabilidade nos valores da estatística amostral. As amostras $\{1,1\}$ e $\{8,8\}$ são as que têm média amostral mais afastada da verdadeira média populacional. Se esses valores tiverem chance muito mais alta do que os valores mais próximos de $\mathrm{E}(X)$, podemos ter sérios problemas na estimação da média populacional.

Para conhecer o comportamento da média amostral, temos que conhecer todos os possíveis valores de $\overline{X}$, o que equivaleria a conhecer todas as possíveis amostras de tamanho dois de tal população. Nesse exemplo, como só temos quatro elementos na população, a obtenção de todas as amostras aleatórias simples de tamanho dois não é difícil.

Lembre-se do nosso estudo de análise combinatória que, como o sorteio é feito com reposição, em cada um dos sorteios temos quatro possibilidades. Logo, o número total de amostras aleatórias simples é $4 \times 4 = 16$. Por outro lado, em cada sorteio, cada elemento da população tem a mesma chance de ser sorteado; como são quatro elementos, cada elemento tem probabilidade 1/4 de ser sorteado.

Finalmente, como os sorteios são independentes, para obter a probabilidade de um par de elementos pertencer à amostra, basta multiplicar as probabilidades (lembre-se que $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$ quando A e B são independentes). A independência dos sorteios é garantida pela reposição de cada elemento sorteado. Dessa forma, cada uma das possíveis amostras tem probabilidade 1/16 de ser sorteada.

Na Tabela 1.1 a seguir, listamos todas as possíveis amostras, com suas respectivas probabilidades e, para cada uma delas, apresentamos o valor da média amostral.

Tabela 1.1 – Distribuição amostral de $\overline{X}$ – População $\{1,3,6,8\}$

Amostra	Prob.	$\overline{x}$	Amostra	Prob.	$\overline{x}$
(1,1)	1/16	$(1+1)/2 = 1$	(6,1)	1/16	$(6+1)/2 = 3,5$
(1,3)	1/16	$(1+3)/2 = 2$	(6,3)	1/16	$(6+3)/2 = 4,5$
(1,6)	1/16	$(1+6)/2 = 3,5$	(6,6)	1/16	$(6+6)/2 = 6$
(1,8)	1/16	$(1+8)/2 = 4,5$	(6,8)	1/16	$(6+8)/2 = 7$
(3,1)	1/16	$(3+1)/2 = 2$	(8,1)	1/16	$(8+1)/2 = 4,5$
(3,3)	1/16	$(13+3)/2 = 3$	(8,3)	1/16	$(8+3)/2 = 5,5$
(3,6)	1/16	$(3+6)/2 = 4,5$	(8,6)	1/16	$(8+6)/2 = 7$
(3,8)	1/16	$(3+8)/2 = 5,5$	(8,8)	1/16	$(8+8)/2 = 8$

Analisando esta tabela, podemos ver que os possíveis valores $\overline{X}$ são 1; 2; 3; 3,5; 4,5; 5,5; 6; 7; 8 e podemos construir a sua função de probabilidade, notando, por exemplo, que o valor 2 pode ser obtido por meio de duas amostras: (1,3) ou (3,1). Como essas amostras correspondem a eventos mutuamente exclusivos, a probabilidade de se obter uma média amostral igual a 2 é

$$
\begin{aligned}
P(\overline{X} = 2) &= P(\{1,3\} \cup \{3,1\}) \\
&= P(\{1,3\}) + P(\{3,1\}) \\
&= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16}
\end{aligned}
$$

Com o mesmo raciocínio, obtemos a seguinte função de probabilidade para $\overline{X}$:

$$
p_{\overline{X}}(x) = \begin{cases}
1/16 & , \text{se } x = 1 \\
2/16 & , \text{se } x = 2 \\
1/16 & , \text{se } x = 3 \\
2/16 & , \text{se } x = 3,5 \\
4/16 & , \text{se } x = 4,5 \\
2/16 & , \text{se } x = 6,5 \\
1/16 & , \text{se } x = 6 \\
2/16 & , \text{se } x = 7 \\
1/16 & , \text{se } x = 8 \\
0 & , \text{caso contrário.}
\end{cases}
$$

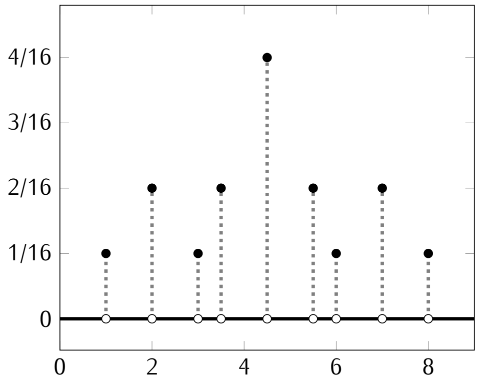


Figura 1.2 – Distribuição de $\overline{X}$ — $n = 2$

Note que a variável aleatória de interesse aqui é $\overline{X}$! Daí segue que

$$
\begin{aligned}
E(\overline{X}) = & \; 1 \times \frac{1}{16} + 2 \times \frac{2}{16} + 3 \times \frac{1}{16} + 3,5 \times \frac{2}{16} + \\
& + 4,5 \times \frac{5}{16} + 5,5 \times \frac{2}{16} + 6 \times \frac{1}{16} + 7 \times \frac{2}{16} + 8 \times \frac{1}{16} \\
& = 4,5 = \mu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(\overline{X}) = & \; (1-4,5)^2 \times \frac{1}{16} + (2-4,5)^2 \times \frac{2}{16} + (3-4,5)^2 \times \frac{1}{16} + \\
& + (3,5-4,5)^2 \times \frac{2}{16} + (4,5-4,5)^2 \times \frac{5}{16} + (5,5-4,5)^2 \times \frac{2}{16} + \\
& + (6-4,5)^2 \times \frac{1}{16} + (7-4,5)^2 \times \frac{2}{16} + (8-4,5)^2 \times \frac{1}{16} \\
& \\
& = 3,625 = \frac{7,25}{2} = \frac{\sigma^2}{2} = \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}
$$

Neste exemplo, podemos ver que $E(\overline{X}) = \mu$ e $Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{2}$, onde 2 é o tamanho da amostra. Esses resultados estão nos dizendo que, em média (esperança), a estatística $\overline{X}$ é igual à média da população e que sua variância é igual à variância da população dividida pelo tamanho da amostra.

♦♦

Exemplo 1.4

Consideremos, agora, a mesma situação do exemplo anterior, só que, em vez de estudarmos a média amostral, uma medida de posição, vamos estudar a dispersão. Como foi visto, a variância populacional é $\mathrm{Var}(X) = 7,25$. Para a amostra, vamos trabalhar com dois estimadores. Um deles é S^2, definido na Equação (1.2) e o outro é

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \tag{1.3}$$

Da mesma forma que fizemos para a média amostral, vamos calcular o valor dessas estatísticas para cada uma das amostras.

Solução:
Na Tabela 1.2, temos os resultados parciais e globais de interesse.

Tabela 1.2 – Distribuição amostral de S^2 e $\widehat{\sigma}^2$ – População $\{1,3,6,8\}$

Amostra	$\overline{x}$	$(x_1 - \overline{x})^2$	$(x_2 - \overline{x})^2$	$\sum_{i=1}^{2}(x_i - \overline{x})^2$	S^2	$\widehat{\sigma}^2$
$(1,1)$	1	$(1-1)^2$	$(1-1)^2$	0	0	0
$(1,3)$	2	$(1-2)^2$	$(3-2)^2$	2	2	1
$(1,6)$	$3,5$	$(1-3,5)^2$	$(6-3,5)^2$	$12,5$	$12,5$	$6,25$
$(1,8)$	$4,5$	$(1-4,5)^2$	$(8-4,5)^2$	$24,5$	$24,5$	$12,25$
$(3,1)$	2	$(3-2)^2$	$(1-2)^2$	2	2	1
$(3,3)$	3	$(3-3)^2$	$(3-3)^2$	0	0	0
$(3,6)$	$4,5$	$(3-4,5)^2$	$(6-4,5)^2$	$4,5$	$4,5$	$2,25$
$(3,8)$	$5,5$	$(3-5,5)^2$	$(8-5,5)^2$	$12,5$	$12,5$	$6,25$
$(6,1)$	$3,5$	$(6-3,5)^2$	$(1-3,5)^2$	$12,5$	$12,5$	$6,25$
$(6,3)$	$4,5$	$(6-4,5)^2$	$(3-4,5)^2$	$4,5$	$4,5$	$2,25$
$(6,6)$	6	$(6-6)^2$	$(6-6)^2$	0	0	0
$(6,8)$	7	$(6-7)^2$	$(8-7)^2$	2	2	1
$(8,1)$	$4,5$	$(8-4,5)^2$	$(1-4,5)^2$	$24,5$	$24,5$	$12,25$
$(8,3)$	$5,5$	$(8-5,5)^2$	$(3-5,5)^2$	$12,5$	$12,5$	$6,25$
$(8,6)$	7	$(8-7)^2$	$(6-7)^2$	2	2	1
$(8,8)$	8	$(8-8)^2$	$(8-8)^2$	0	0	0

Podemos ver que a função de probabilidade de S^2 é:

s^2	0	2	$4,5$	$12,5$	$24,5$
$\mathrm{P}(S^2 = s^2)$	4/16	4/16	2/16	4/16	2/16

e a função de probabilidade de $\widehat{\sigma}^2$ é:

k	0	1	$2,25$	$6,25$	$12,25$
$\mathrm{P}(\widehat{\sigma}^2 = k)$	4/16	4/16	2/16	4/16	2/16

Para essas distribuições, temos:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(S^2) &= 0 \times \frac{4}{16} + 2 \times \frac{4}{16} + 4,5 \times \frac{2}{16} + 12,5 \times \frac{4}{16} + 24,5 \times \frac{2}{16} \\
&= \frac{116}{16} = 7,25 = \sigma^2 = \mathrm{Var}(X)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\widehat{\sigma}^2) &= 0 \times \frac{4}{16} + 1 \times \frac{4}{16} + 2,25 \times \frac{2}{16} + 6,25 \times \frac{4}{16} + 12,25 \times \frac{2}{16} \\
&= \frac{58}{16} = 3,625
\end{aligned}
$$

Vemos que, em média, S^2 é igual à variância populacional, o que não ocorre com $\widehat{\sigma}^2$.

♦♦

Estes dois exemplos ilustram o fato de que qualquer estatística amostral $\widehat{\sigma}^2$ é uma variável aleatória, que assume diferentes valores para cada uma das diferentes amostras.

Tais valores nos forneceriam, juntamente com a probabilidade de cada amostra, a função de probabilidades de T, caso fosse possível, obter todas as amostras aleatórias simples de tamanho n da população.

Isso nos leva à seguinte definição, que é um conceito central na Inferência Estatística.

Definição 1.5
*A **distribuição amostral** de uma estatística T é a função de probabilidade de T ao longo de todas as possíveis amostras aleatórias simples de tamanho n.*

Podemos ver que a obtenção da distribuição amostral de qualquer estatística T é um processo tão ou mais complicado do que trabalhar com a população inteira. Na prática, o que temos é uma única amostra e é com base em tal amostra que tomaremos as decisões pertinentes ao problema em estudo. Esta tomada de decisão, no entanto, será facilitada se conhecermos resultados teóricos sobre o comportamento da distribuição amostral, assunto que será estudado nos próximos três capítulos.

Propriedades de Estimadores

No exemplo anterior, relativo à variância amostral, vimos que $\mathrm{E}(S^2) = \sigma^2$ e $\mathrm{E}(\widehat{\sigma}^2) \neq \sigma^2$. Analogamente, vimos também que $\mathrm{E}(\overline{X}) = \mu$. Vamos explorar um pouco mais o significado desses resultados antes de passar a uma definição formal da propriedade envolvida.

Dada uma população, existem muitas e muitas amostras aleatórias simples de tamanho n que podem ser sorteadas. Cada uma dessas amostras resulta em um valor diferente da estatística de interesse ($\overline{X}$ e S^2, por exemplo). O que esses resultados estão mostrando é como esses diferentes valores se comportam em relação ao verdadeiro (mas desconhecido) valor do parâmetro.

Considere a Figura 1.3, em que o alvo representa o valor do parâmetro e os "tiros", indicados pelo símbolo x, representam os diferentes valores amostrais da estatística de interesse.

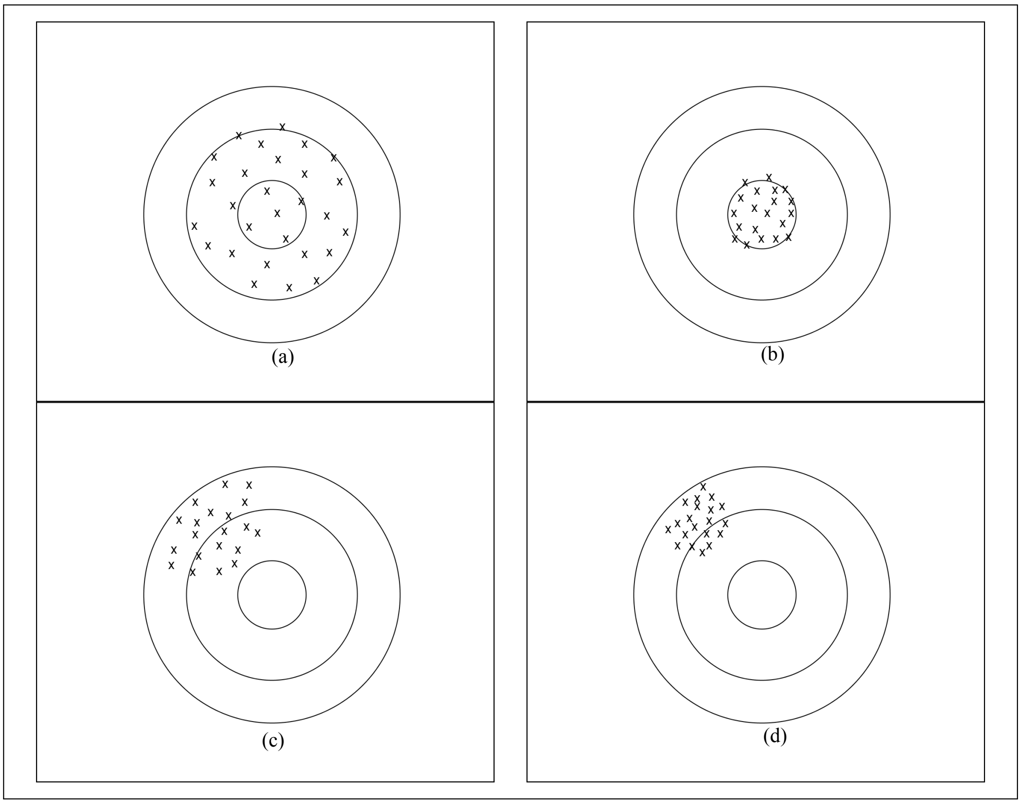


Figura 1.3 – Propriedades de estimadores

Nas partes (a) e (b) da figura, os tiros estão em torno do alvo, enquanto nas partes (c) e (d) isso não acontece. Comparando as partes (a) e (b), podemos ver que na parte (b) os tiros estão mais concentrados em torno do alvo, isto é, têm menor dispersão. Isso refletiria uma pontaria mais certeira do atirador em (b). Analogamente, nas partes (c) e (d), embora ambos os atiradores estejam com a mira deslocada, os tiros do atirador (d) estão mais concentrados em torno de um alvo; o deslocamento poderia até ser resultado de um desalinhamento da arma. Já o atirador (c), além de estar com o alvo deslocado, ele tem os tiros mais espalhados, o que reflete menor precisão.

- Nas partes (a) e (b), temos dois estimadores que fornecem estimativas centradas em torno do verdadeiro valor do parâmetro, ou seja, as diferentes amostras fornecem valores distribuídos em torno do verdadeiro valor do parâmetro. A diferença é que em (a) esses valores estão mais dispersos e, assim, temos mais chance de obter uma amostra "infeliz", ou seja, uma amostra que forneça um resultado muito afastado do valor do parâmetro. Essas duas propriedades estão associadas à esperança e à variância do estimador, que são medidas de centro e dispersão, respectivamente.

- Nas partes (c) e (d), as estimativas estão centradas em torno de um valor diferente do parâmetro de interesse e, na parte (c), a dispersão é maior.

Temos, assim, ilustrados os seguintes conceitos.

Definição 1.6 ***Viés de um estimador***
*Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória simples de uma população X, cuja lei de probabilidade depende de um parâmetro θ. Se T é um estimador de θ, definimos seu **viés** ou **vício** como*

$$Vies(T) = \mathrm{E}(T) - \theta \tag{1.4}$$

*Se $Vies(T) = 0$ então $\mathrm{E}(T) = \theta$ e dizemos que T é um **estimador não-viesado** de θ.*

Como nos exemplos vistos, a esperança $\mathrm{E}(T)$ é calculada ao longo de todas as possíveis amostras, ou seja, é a esperança da distribuição amostral de T. Nas partes (a) e (b) da Figura 1.3 os estimadores são não-viesados e nas partes (c) e (d), os estimadores são viesados.

Com relação aos estimadores $\overline{X}$, S^2 e $\widehat{\sigma}^2$, pode-se provar, formalmente, que os dois primeiros são não-viesados para estimar a média e a variância populacionais, respectivamente, enquanto $\widehat{\sigma}^2$ é viesado para estimar a variância populacional.

Definição 1.7 ***Eficiência de um estimador***
*Se T_1 e T_2 são dois estimadores não-viesados do parâmetro θ, diz-se que T_1 é **mais eficiente** que T_2, se $\mathrm{Var}(T_1) < \mathrm{Var}(T_2)$.*

Na Figura 1.3, o estimador da parte (b) é mais eficiente que o estimador da parte (a).

É interessante observar que o conceito de eficiência, que envolve a variabilidade de um estimador, está associado a estimadores não-viesados. Para analisar estimadores viesados, podemos usar o erro quadrático médio, definido a seguir.

Definição 1.8 ***Erro quadrático médio***
*Seja $X_1, X_2, \cdots, X_n$ uma amostra aleatória simples de uma população X, cuja lei de probabilidade depende de um parâmetro θ. Se T é um estimador de θ, definimos seu **erro quadrático médio** como*

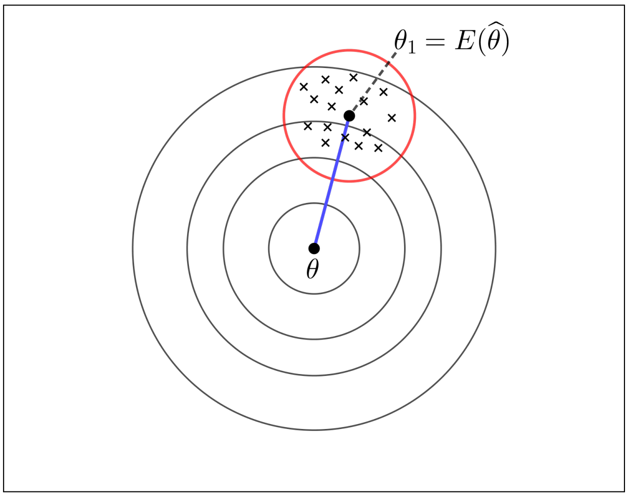
$$EQM(T) = \mathrm{E}\,(T - \theta)^2 \tag{1.5}$$

Pode-se mostrar que é válida a seguinte decomposição para o erro quadrático de um estimador T:

$$\mathrm{EQM}(T) = \mathrm{Var}(T) + [\mathrm{Vies}(T)]^2 \tag{1.6}$$

A equação (1.6) decompõe o erro quadrático médio em termos da variância e do quadrado do vício do estimador. Para estimadores não-viesados, resulta que $\mathrm{EQM}(T) = \mathrm{Var}(T)$. Estimadores viesados podem ser uma opção interessante para estimar um parâmetro se seu erro quadrático médio for pequeno.

Esses conceitos estão ilustrados na figura a seguir.



Os pontos dentro do círculo vermelho representam os valores de $\widehat{\theta}$ ao longo de todas as possíveis amostras. Vemos que esses valores estão centrados em $\theta_1 = \mathrm{E}(\widehat{\theta})$. A variabilidade desses valores em torno da sua média é $\mathrm{Var}(\widehat{\theta})$. Como o estimador é viesado, há uma diferença entre sua média e o verdadeiro valor do parâmetro, que é o viés do estimador, representado pela linha em azul. Em termos de erro quadrático, tomamos esse viés ao quadrado, que é a componente $[\mathrm{Vies}(\widehat{\theta})]^2$.

Resumo

- A população de uma pesquisa estatística é descrita por uma variável aleatória X, que descreve a característica de interesse. Essa variável aleatória pode ser discreta ou contínua.
- O método de amostragem aleatória simples atribui, a cada amostra de tamanho n, igual probabilidade de ser sorteada.
- Se os sorteios dos elementos da amostra são feitos com reposição, cada sujeito da população tem a mesma probabilidade de ser sorteado e essa probabilidade se mantém constante. Dessa forma, uma amostra aleatória simples com reposição (abreviaremos por amostra aleatória simples nesse texto) de uma população X é um conjunto $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, todas com a mesma distribuição da população X.
- Uma estatística ou estimador T é qualquer função de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, isto é, $T = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Como o estimador depende da amostra sorteada, ele é também uma variável aleatória.
- Os estimadores descrevem características da amostra.
- Um parâmetro é uma característica da população.

- As características que iremos estudar são a média (μ e $\overline{X}$) e a variância (σ^2 e S^2).

- Como cada estimador é uma variável aleatória, ele pode ser descrito pela sua função de probabilidade, que é chamada *distribuição amostral do estimador*. A distribuição amostral de um estimador é a distribuição ao longo de todas as possíveis amostras de mesmo tamanho n.

- A média e a variância da distribuição amostral de um estimador referem-se à distribuição ao longo de todas as possíveis amostras. Assim, a média de uma distribuição amostral refere-se à média dos possíveis valores do estimador ao longo de todas as possíveis amostras e a variância reflete a dispersão desses valores em torno dessa média.

- Um estimador é não-viesado se a sua média é igual ao parâmetro que ele pretende estimar. Isso significa que os valores do estimador ao longo de todas as possíveis amostras estão centrados no parâmetro populacional.

- Dados dois estimadores não-viesados de um mesmo parâmetro, T_1 e T_2, diz-se que T_1 é mais eficiente que T_2 se sua variância for menor, ou seja, se $Var(T_1) < Var(T_2)$.

- Se um estimador T é viesado, sua qualidade é medida pelo erro quadrático médio, que pode ser decomposto como a soma da variância de T e do quadrado do viés de T.

Exercícios

1. Para fixar as ideias sobre os conceitos apresentados neste capítulo, você irá trabalhar com amostras aleatórias simples de tamanho três retiradas da população $\{1, 2, 4, 6, 8\}$.

   Pelo princípio da multiplicação, o número total de amostras é $5 \times 5 \times 5 = 125$ e cada uma dessas amostras tem probabilidade $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$.

   Vamos considerar os seguintes estimadores para a média da população:

   - média amostral: $\overline{X} = \frac{X_1+X_2+X_3}{3}$;
   - média amostral ponderada: $\overline{X}_p = \frac{X_1+2X_2+X_3}{4}$;
   - ponto médio: $\Delta = \frac{\min(X_1,X_2,X_3)+\max(X_1,X_2,X_3)}{2}$.

   O que você irá mostrar é

   (i) $\overline{X}$ e $\overline{X}_p$ são não-viesados e que $\overline{X}$ é mais eficiente que $\overline{X}_p$;

   (ii) Δ é viesado, mas sua variância é menor que a variância de $\overline{X}$ e de $\overline{X}_p$.

   Para isso, você irá seguir os seguintes passos:

   (a) Calcule a média μ e a variância σ^2 da população.

   (b) Nas cinco tabelas a seguir, você tem listadas as 125 amostras. Para cada uma das amostras, calcule os valores dos estimadores. Para as seis primeiras amostras, os cálculos já estão feitos, a título de ilustração. Você não precisa indicar todas as contas; apenas use a máquina de calcular e anote o resultado obtido.

Obs.: Na plataforma está disponível a planilha excel com essas tabelas.

(c) Obtenha a função de distribuição de probabilidade, explicitando os diferentes valores de cada um dos estimadores e suas respectivas probabilidades.

(d) Calcule a esperança e a variância de cada um dos estimadores.

(e) Verifique as afirmativas feitas no enunciado do problema.

Amostra			Estimador		
X_1	X_2	X_3	$\overline{X}$	$\overline{X}_p$	Δ
1	1	1	$\frac{1+1+1}{3} = 1$	$\frac{1+2\times1+1}{4} = 1$	$\frac{1+1}{2} = 1$
1	1	2	$\frac{1+1+2}{3} = \frac{4}{3}$	$\frac{1+2\times1+2}{4} = \frac{5}{4}$	$\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$
1	1	4	$\frac{1+1+4}{3} = 2$	$\frac{1+2\times1+4}{4} = \frac{7}{4}$	$\frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$
1	1	6	$\frac{1+1+6}{3} = \frac{8}{3}$	$\frac{1+2\times1+6}{4} = \frac{9}{4}$	$\frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$
1	1	8	$\frac{1+1+8}{3} = \frac{10}{3}$	$\frac{1+2\times1+8}{4} = \frac{11}{4}$	$\frac{1+8}{2} = \frac{9}{2}$
1	2	1	$\frac{1+2+1}{3} = \frac{4}{3}$	$\frac{1+2\times2+1}{4} = \frac{6}{4}$	$\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$
1	2	2			
1	2	4			
1	2	6			
1	2	8			
1	4	1			
1	4	2			
1	4	4			
1	4	6			
1	4	8			
1	6	1			
1	6	2			
1	6	4			
1	6	6			
1	6	8			
1	8	1			
1	8	2			
1	8	4			
1	8	6			
1	8	8			

Amostra			Estimador		
X_1	X_2	X_3	$\overline{X}$	$\overline{X}_p$	Δ
2	1	1			
2	1	2			
2	1	4			
2	1	6			
2	1	8			
2	2	1			
2	2	2			
2	2	4			
2	2	6			
2	2	8			
2	4	1			
2	4	2			
2	4	4			
2	4	6			
2	4	8			
2	6	1			
2	6	2			
2	6	4			
2	6	6			
2	6	8			
2	8	1			
2	8	2			
2	8	4			
2	8	6			
2	8	8			

Amostra			Estimador		
X_1	X_2	X_3	$\overline{X}$	$\overline{X}_p$	Δ
4	1	1			
4	1	2			
4	1	4			
4	1	6			
4	1	8			
4	2	1			
4	2	2			
4	2	4			
4	2	6			
4	2	8			
4	4	1			
4	4	2			
4	4	4			
4	4	6			
4	4	8			
4	6	1			
4	6	2			
4	6	4			
4	6	6			
4	6	8			
4	8	1			
4	8	2			
4	8	4			
4	8	6			
4	8	8			

Amostra			Estimador		
X_1	X_2	X_3	$\overline{X}$	$\overline{X}_p$	Δ
6	1	1			
6	1	2			
6	1	4			
6	1	6			
6	1	8			
6	2	1			
6	2	2			
6	2	4			
6	2	6			
6	2	8			
6	4	1			
6	4	2			
6	4	4			
6	4	6			
6	4	8			
6	6	1			
6	6	2			
6	6	4			
6	6	6			
6	6	8			
6	8	1			
6	8	2			
6	8	4			
6	8	6			
6	8	8			

Amostra			Estimador		
X_1	X_2	X_3	$\overline{X}$	$\overline{X}_p$	Δ
8	1	1			
8	1	2			
8	1	4			
8	1	6			
8	1	8			
8	2	1			
8	2	2			
8	2	4			
8	2	6			
8	2	8			
8	4	1			
8	4	2			
8	4	4			
8	4	6			
8	4	8			
8	6	1			
8	6	2			
8	6	4			
8	6	6			
8	6	8			
8	8	1			
8	8	2			
8	8	4			
8	8	6			
8	8	8			

Solução do Exercício

1. Para a população, temos que

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1+2+4+6+8}{5} = 4,2 \\ \sigma^2 &= \frac{1^2+2^2+4^2+6^2+8^2}{5} - (4,2)^2 = 6,56 \end{aligned}$$

Completando-se as tabelas dadas, chegamos às seguintes funções de distribuição de probabilidade dos estimadores:

$\overline{X}$	$\Pr(\overline{X} = x)$	Cálculo de $E(\overline{X})$	Cálculo de $Var(\overline{X})$
x	p	px	$E(\overline{X}^2)$
3/3	1/125	3/375	$(3/3)^2\,(1/125)$
4/3	3/125	12/375	$(4/3)\,(3/125)$
5/3	3/125	15/375	$(5/3)\,(3/125)$
6/3	4/125	24/375	$(6/3)^2\,(4/125)$
7/3	6/125	42/375	$(7/3)^2\,(6/125)$
8/3	6/125	48/375	$(8/3)^2\,(6/125)$
9/3	9/125	81/375	$(9/3)^2\,(9/125)$
10/3	9/125	90/375	$(10/3)^2\,(9/125)$
11/3	12/125	132/375	$(11/3)^2\,(12/125)$
12/3	10/125	120/375	$(12/3)^2\,(10/125)$
13/3	9/125	117/375	$(13/3)^2\,(9/125)$
14/3	12/125	168/375	$(14/3)^2\,(12/125)$
15/3	6/125	90/375	$(15/3)^2\,(6/125)$
16/3	12/125	192/375	$(16/3)^2\,(12/125)$
17/3	3/125	51/375	$(17/3)^2\,(3/125)$
18/3	10/125	180/375	$(18/3)^2\,(10/125)$
20/3	6/125	120/375	$(20/3)^2\,(6/125)$
22/3	3/125	66/375	$(22/3)^2\,(3/125)$
24/3	1/125	24/375	$(24/3)^2\,(1/125)$
	Soma	1575/375	$22305/(9 \times 125)$

Logo,

$$E(\overline{X}) = \frac{1575}{375} = 4,2 = \mu$$

$$Var(\overline{X}) = \frac{22305}{9 \times 125} - (4,2)^2 = 2,186667 = \frac{6,56}{3} = \frac{\sigma^2}{3}$$

$\overline{X}_p$	$\Pr(\overline{X}_p = x)$	Cálculo de $E(\overline{X}_p)$	Cálculo de $Var(\overline{X}_p)$
x	p	px	$E(\overline{X}_p^2)$
4/4	1/125	4/500	$(4/4)^2\,(1/125)$
5/4	2/125	10/500	$(5/4)^2\,(2/125)$
6/4	2/125	12/500	$(6/4)^2\,(2/125)$
7/4	4/125	28/500	$(7/4)^2\,(4/125)$
8/4	3/125	24/500	$(8/4)^2\,(3/125)$
9/4	4/125	36/500	$(9/4)^2\,(4/125)$
10/4	6/125	60/500	$(10/4)^2\,(6/125)$
11/4	6/125	66/500	$(11/4)^2\,(6/125)$
12/4	8/125	96/500	$(12/4)^2\,(8/125)$
13/4	4/125	52/500	$(13/4)^2\,(4/125)$
14/4	10/125	140/500	$(14/4)^2\,(10/125)$
15/4	4/125	60/500	$(15/4)^2\,(4/125)$
16/4	9/125	144/500	$(16/4)^2\,(9/125)$
17/4	4/125	68/500	$(17/4)^2\,(4/125)$
18/4	10/125	180/500	$(18/4)^2\,(10/125)$
19/4	4/125	76/500	$(19/4)^2\,(4/125)$
20/4	8/125	160/500	$(20/4)^2\,(8/125)$
21/4	4/125	84/500	$(21/4)^2\,(4/125)$
22/4	8/125	176/500	$(22/4)^2\,(8/125)$
23/4	2/125	46/500	$(23/4)^2\,(2/125)$
24/4	7/125	168/500	$(24/4)^2\,(7/125)$
25/4	2/125	50/500	$(25/4)^2\,(2/125)$
26/4	6/125	156/500	$(26/4)^2\,(6/125)$
28/4	4/125	112/500	$(28/4)^2\,(4/125)$
30/4	2/125	60/500	$(30/4)^2\,(2/125)$
32/4	1/125	32/500	$(32/4)^2\,(1/125)$
	Soma	2100/500	$40200/(16 \times 125)$

Logo,

$$E(\overline{X}_p) = 4,2 = \mu$$

$$Var(\overline{X}_p) = \frac{40200}{16 \times 125} - (4,2)^2 = 2,46$$

Δ	$\Pr(\Delta = x)$	Cálculo de $E(\Delta)$	Cálculo de $Var(\Delta)$
x	p	$p \cdot x$	$E(\Delta^2)$
2/2	1/125	2/250	$(2/2)^2\,(1/125)$
3/2	6/125	18/250	$(3/2)^2\,(6/125)$
4/2	1/125	4/250	$(4/2)^2\,(1/125)$
5/2	12/125	60/250	$(5/2)^2\,(12/125)$
6/2	6/125	36/250	$(6/2)^2\,(6/125)$
7/2	18/125	126/250	$(7/2)^2\,(18/125)$
8/8	13/125	104/250	$(8/2)^2\,(13/125)$
9/2	24/125	216/250	$(9/2)^2\,(24/125)$
10/2	24/125	240/250	$(10/2)^2\,(24/125)$
12/2	13/125	156/250	$(12/2)^2\,(13/125)$
14/2	6/125	84/250	$(14/2)^2\,(6/125)$
16/2	1/125	16/250	$(16/2)^2\,(1/125)$
	Soma	1062/250	$9952/(4 \times 125)$

Logo,

$$E(\Delta) = \frac{1062}{250} = 4,248$$

$$Var(\Delta) = \frac{9952}{4 \times 125} - (4,248)^2 = 1,858496$$

Na tabela a seguir, apresentamos o resumo dos resultados obtidos.

	Parâmetro populacional	Estimador		
		$\overline{X}$	$\overline{X}_p$	Δ
Média	$\mu = 4,2$	$4,2000$	$4,2000$	$4,2480$
Variância	$\sigma^2 = 6,56$	$2,1867$	$2,4600$	$1,8585$

Conclui-se que $\overline{X}$ e $\overline{X}_p$ são estimadores não-viesados de μ e que $\overline{X}$ é mais eficiente que $\overline{X}_p$, uma vez que $Var(\overline{X}) < Var(\overline{X}_p)$.

O estimador Δ é viesado, pois $E(\Delta) \neq \mu$. No entanto, a variância desse estimador é menor que as variâncias dos dois estimadores não-viesados.

Capítulo 2

Distribuição Amostral da Média

Neste capítulo, você irá aprofundar seus conhecimentos sobre a distribuição amostral da média amostral. No capítulo anterior, analisamos, por meio de alguns exemplos, o comportamento da média amostral; mas naqueles exemplos, a população era pequena e foi possível obter todas as amostras, ou seja, foi possível obter a distribuição amostral exata. Agora, veremos resultados teóricos sobre a distribuição amostral da média amostral, que nos permitirão fazer análises sem ter que listar todas as amostras. Tal conhecimento é importante, uma vez que, na prática, temos apenas uma única amostra.

Os principais resultados que estudaremos são:

- média e variância da distribuição amostral da média;
- distribuição amostral da média para populações normais.

Distribuição Amostral da Média

Média e Variância

Vimos, anteriormente, por meio de exemplos, que a média amostral $\overline{X}$ é um estimador não-viesado da média populacional μ. Aqueles exemplos ilustram o seguinte resultado geral.

Teorema 2.1

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples de tamanho n de uma população representada pela variável aleatória X com média μ e variância σ^2. Então,

$$\mathrm{E}(\overline{X}) = \mu$$
$$\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

□

É importante notar que esse resultado se refere a qualquer população X, ou seja, o Teorema 2.1 é válido, qualquer que seja a distribuição da variável aleatória que descreve a nossa população. O que ele estabelece é que as médias amostrais das diferentes amostras aleatórias simples de tamanho n tendem a "acertar o alvo" da média populacional μ; lembre-se da **Figura 1.3**, partes (a) e (b). Além disso, à medida que o tamanho amostral n aumenta, a dispersão em torno do alvo, medida por $\mathrm{Var}(\overline{X})$, vai diminuindo e tende a zero quando $n \to \infty$.

O desvio-padrão da distribuição amostral de qualquer estatística é usualmente chamado de erro padrão. Então, o erro padrão da média amostral é

$$\mathrm{EP}(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Populações Normais

Na prática estatística, várias populações podem ser descritas, pelo menos aproximadamente, por uma distribuição normal. Obviamente, o teorema anterior continua valendo no caso de uma população normal, mas temos uma característica a mais da distribuição amostral da média quando a população é normal: ela é também normal.

Teorema 2.2

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples (aas) de tamanho n de uma ***população normal****, isto é, uma população representada por uma variável aleatória normal X com média μ e variância σ^2. Então, a distribuição amostral da média amostral $\overline{X}$ é normal com média μ e variância σ^2/n, ou seja,*

$$X \sim N\left(\mu; \sigma^2\right) \Longrightarrow \overline{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

□

Na **Figura 2.1** ilustra-se o comportamento da distribuição amostral da média amostral com base em amostras de tamanho $n = 4$ para uma população normal com média 1 e variância 9. A título de comparação, apresenta-se a distribuição populacional. Podemos ver que ela é mais dispersa que a distribuição amostral de $\overline{X}$ mas ambas estão centradas no verdadeiro valor populacional $\mu = 1$.

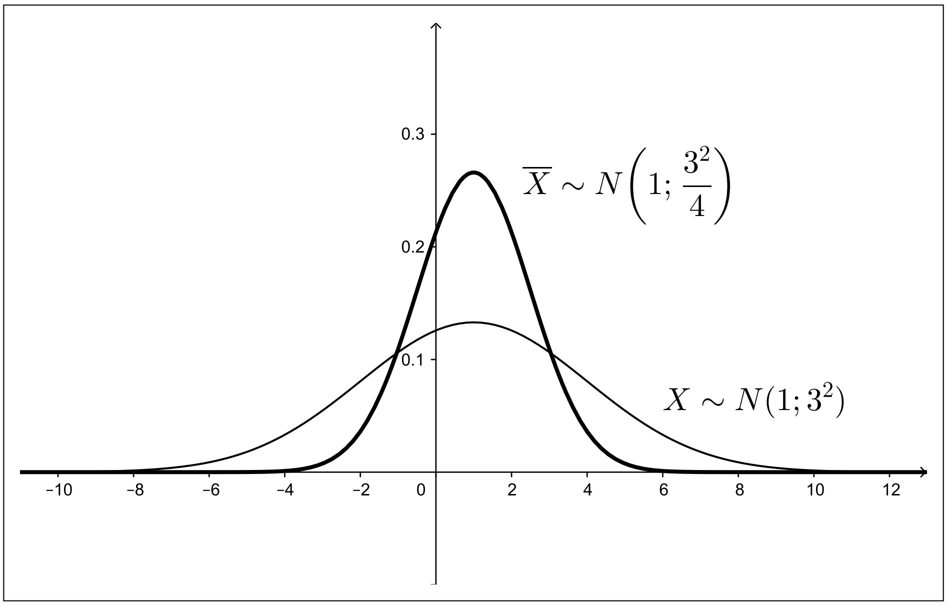


Figura 2.1 – Distribuição amostral de $\overline{X}$ com base em aas de tamanho $n = 4$ de uma população $X \sim N(1; 9)$.

Exemplo 2.1
A capacidade máxima de um elevador é de 500kg. Se a distribuição dos pesos dos usuários é $N(70; 100)$, qual é a probabilidade de que sete pessoas ultrapassem este limite? E de seis pessoas?

Solução:
Podemos considerar os sete passageiros como uma amostra aleatória simples da população de todos os usuários, representada pela variável aleatória $X \sim N(70; 100)$. Seja, então, $X_1, \ldots, X_7$ uma amostra aleatória simples de tamanho $n = 7$. Se o peso máximo é 500kg, para que sete pessoas ultrapassem o limite de segurança temos que ter

$$\sum_{i=1}^{7} X_i > 500 \Rightarrow \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} X_i > \frac{500}{7} \Rightarrow \overline{X} > 71,729$$

Mas, pelo Teorema 2.2, sabemos que $\overline{X} \sim N\left(70; \frac{100}{7}\right)$. Logo,

$$\begin{aligned} P(\overline{X} > 71,729) &= P\left(\frac{\overline{X} - 70}{\sqrt{\frac{100}{7}}} > \frac{71,729 - 70}{\sqrt{\frac{100}{7}}}\right) = P(Z > 0,46) \\ &= 0,5 - \text{tab}(0,46) = 0,5 - 0,17724 = 0,32276 \end{aligned}$$

Com seis pessoas teríamos que ter

$$\begin{aligned} P\left(\overline{X} > \frac{500}{6}\right) &= P\left(Z > \frac{83,333 - 70}{\sqrt{\frac{100}{7}}}\right) = P(Z > 3,53) \\ &0,5 - \text{tab}(3,53) = 0,5 - 0,49979 = 0,00021 \end{aligned}$$

Podemos ver que existe uma probabilidade alta (0,32 ou 32% de chance) de sete pessoas ultrapassarem o limite de segurança. Já com seis pessoas, essa probabilidade é bastante pequena. Assim, o número máximo de pessoas no elevador deve ser estabelecido como seis ou menos.

♦♦

Exemplo 2.2

Uma população é descrita por uma variável aleatória X que tem distribuição normal com média 40 e desvio-padrão 5.

(a) Calcule $\mathrm{P}(35 < X < 45)$.

(b) Se $\overline{X}$ é a média de uma amostra aleatória simples de 16 elementos retirados dessa população, calcule $\mathrm{P}(35 < \overline{X} < 45)$.

(c) Construa, em um único sistema de coordenadas, os gráficos das distribuições de X e $\overline{X}$.

(d) Que tamanho deveria ter a amostra para que $\mathrm{P}(35 < \overline{X} < 45) = 0,95$?

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(35 < X < 45) &= \mathrm{P}\left(\frac{35-40}{5} < Z < \frac{45-40}{5}\right) \\
&= \Pr(-1 < Z < 1) = 2 \times \mathrm{P}(0 < Z < 1) \\
&= 2 \times \mathrm{tab}(1,0) = 0,68268
\end{aligned}$$

(b) Com $n = 16$, resulta que $\overline{X} \sim N\left(40; \frac{5^2}{16}\right)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(35 < \overline{X} < 45) &= \mathrm{P}\left(\frac{35-40}{\sqrt{\frac{25}{16}}} < Z < \frac{45-40}{\sqrt{\frac{25}{16}}}\right) \\
&= \mathrm{P}(-4 < Z < 4) = 2 \times \mathrm{P}(0 < Z < 4) \\
&= 2 \times \mathrm{tab}(4,0) \approx 1,00
\end{aligned}$$

(c) Veja a **Figura** 2.2. Como visto, a distribuição amostral com $n = 16$ é menos dispersa que a distribuição populacional e, então, podemos ver que, entre 35 e 45, temos concentrada praticamente toda a distribuição de $\overline{X}$.

(d) Queremos que $\mathrm{P}(35 < \overline{X} < 45) = 0,95$, ou seja,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(35 < \overline{X} < 45) = 0,95 \Leftrightarrow \mathrm{P}\left(\frac{35-40}{\sqrt{\frac{25}{n}}} < Z < \frac{45-40}{\sqrt{\frac{25}{n}}}\right) = 0,95 \Leftrightarrow \\
&\mathrm{P}(-\sqrt{n} < Z < \sqrt{n}) = 0,95 \Leftrightarrow 2 \times \mathrm{P}(0 < Z < \sqrt{n}) = 0,95 \Leftrightarrow \\
&2 \times tab(\sqrt{n}) = 0,95 \Leftrightarrow tab(\sqrt{n}) = 0,475 \Leftrightarrow \sqrt{n} = 1,96 \Leftrightarrow n \approx 4
\end{aligned}$$

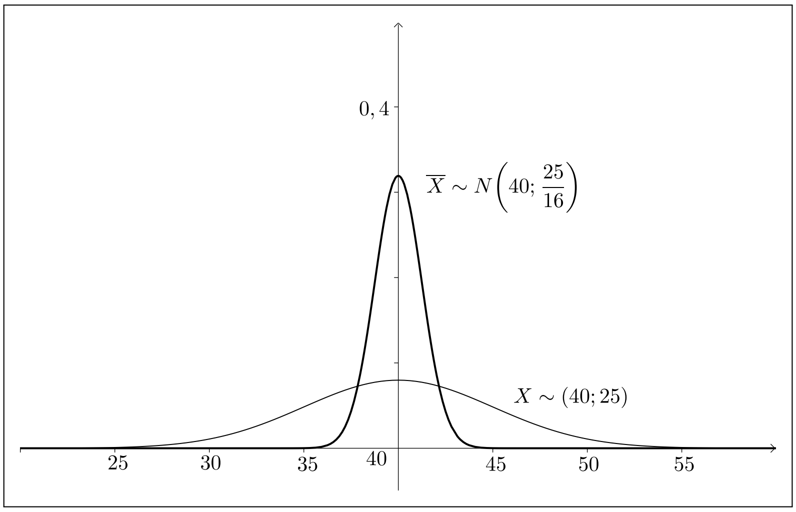


Figura 2.2 – Distribuição amostral de $\overline{X}$ com base em aas de tamanho $n = 16$ de uma população $X \sim N(40; 25)$.

A título de ilustração, apresentam-se na **Figura 2.3** as distribuições amostrais de $\overline{X}$ para $n = 16$ e $n = 4$.

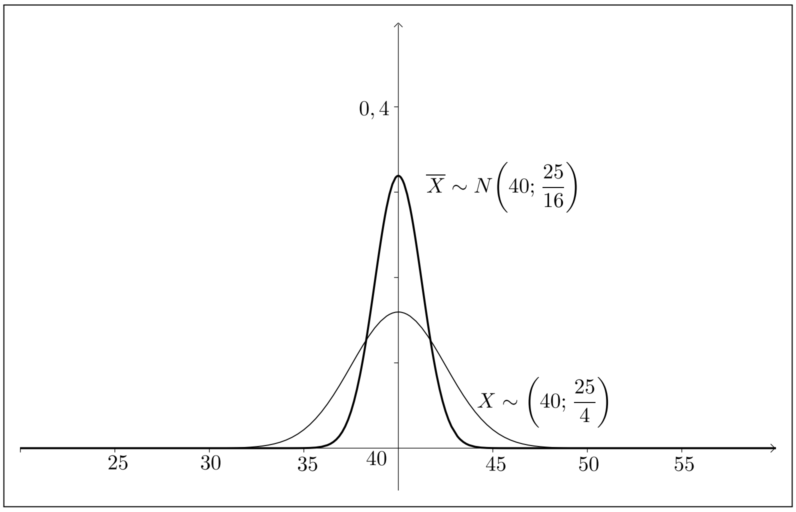


Figura 2.3 – Distribuição amostral de $\overline{X}$ com base em amostras de tamanhos $n = 16$ e $n = 4$ de uma população $N(40; 25)$.

♦♦

Exemplo 2.3
A máquina de empacotar um determinado produto o faz segundo uma distribuição normal, com média μ e desvio-padrão de 10g.

(a) Em quanto deve ser regulado o peso médio μ para que apenas 10% dos pacotes tenham menos do que 500g?

(b) Com a máquina assim regulada, qual a probabilidade de que o peso total de quatro pacotes escolhidos ao acaso seja inferior a 2kg?

Solução:

(a) Seja X a variável aleatória que representa o peso dos pacotes. Sabemos, então, que $X \sim N(\mu; 100)$. Queremos que

$$P(X < 500) = 0,10 \Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{10} < \frac{500-\mu}{10}\right) = 0,10 \Rightarrow P\left(Z < \frac{500-\mu}{10}\right) = 0,10$$

Então, na densidade normal padrão, à esquerda da abscissa $\frac{500-\mu}{10}$ temos que ter uma área (probabilidade) de 0,10. Logo, essa abscissa tem que ser negativa. Na Tabela 1, temos que procurar o valor $0,40 = 0,50 - 0,10$, o que nos fornece a abscissa 1,28. Logo,

$$\frac{500-\mu}{10} = -1,28 \Rightarrow \mu = 512,8 \text{ g}$$

(b) Sejam X_1, X_2, X_3, X_4 os pesos dos 4 pacotes da amostra. Queremos que $\sum_{i=1}^{4} X_i < 2000$g. Isso é equivalente a $\overline{X} < 500$. Logo,

$$\begin{aligned}
P(\overline{X} < 500) &= P\left(\frac{\overline{X}-512,8}{\sqrt{\frac{100}{4}}} < \frac{500-512,8}{\sqrt{\frac{100}{4}}}\right) \\
&= P(Z < -2,56) = P(Z > 2,56) = 0,5 - P(0 \leq Z \leq 2,56) \\
&= 0,5 - tab(2,56) = 0,5 - 0,49477 = 0,00523
\end{aligned}$$

Com a máquina regulada para 512,8g, há uma probabilidade de 0,00523 de que uma amostra de 4 pacotes apresente peso médio inferior a 500g. Note que com um pacote apenas, essa probabilidade é de 0,10. Por isso, as inspeções de controle de qualidade são sempre feitas com base em amostras de tamanho $n > 1$. Isso evita que a decisão se baseie em uma única amostra "infeliz".

♦♦

Resumo

- Dada uma amostra aleatória simples com reposição (aas) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de uma população X com média μ e variância σ^2, ambas finitas, a média amostral $\overline{X}$ é um estimador não-viesado de μ com variância igual à variância populacional dividida pelo tamanho amostral n, isto é,

$$\begin{aligned}
E(\overline{X}) &= \mu \\
Var(\overline{X}) &= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

- O desvio-padrão da distribuição amostral de qualquer estimador é usualmente chamado de *erro-padrão*. Então, o erro-padrão da média amostral é $EP(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

- Nas condições anteriores e com a hipótese adicional normalidade da população X, a distribuição amostral de $\overline{X}$ também é normal, isto é,

$$X \sim N\left(\mu; \sigma^2\right) \Longrightarrow \overline{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Exercícios

1. Uma amostra de tamanho $n = 18$ é extraída de uma população normal com média 15 e desvio-padrão 2,5. Calcule a probabilidade de que a média amostral
   (a) esteja entre 14,5 e 16,0;
   (b) seja maior que 16,1.
2. Os comprimentos das peças produzidas por determinada máquina têm distribuição normal com uma média de 172mm e desvio padrão de 5mm. Calcule a probabilidade de uma amostra aleatória simples de 16 peças ter comprimento médio:
   (a) entre 169mm e 175mm;
   (b) maior que 178mm;
   (c) menor que 165mm.
3. Qual deverá ser o tamanho de uma amostra aleatória simples a ser retirada de uma população $N(150; 13^2)$ para que $\mathrm{P}(\left|\overline{X} - \mu\right| < 6,5) = 0,95$?
4. Volte ao Exemplo 2.3. Depois de regulada a máquina, prepara-se uma carta de controle de qualidade. Uma amostra de 4 pacotes será sorteada a cada hora. Se a média da amostra for inferior a 497g ou superior a 520g, a produção deve ser interrompida para ajuste da máquina, isto é, ajuste do peso médio.
   (a) Qual é a probabilidade de uma parada desnecessária?
   (b) Se a máquina se desregulou para $\mu = 500$g, qual é a probabilidade de se continuar a produção fora dos padrões desejados?
5. Uma empresa produz parafusos em duas máquinas. O comprimento dos parafusos produzidos em ambas é aproximadamente normal com média de 20mm na primeira máquina e 25mm na segunda máquina e desvio-padrão comum de 4mm. Uma caixa com 16 parafusos, sem identificação, é encontrada e o gerente de produção determina que, se o comprimento médio for maior que 23mm, então a caixa será identificada como produzida pela máquina 2; caso contrário, será identificada como produzida pela máquina 1. Especifique os possíveis erros nessa decisão e calcule as suas probabilidades.
6. Uma fábrica produz parafusos especiais, para atender um determinado cliente, que devem ter comprimento de 8,5cm. Como os parafusos grandes podem ser reaproveitados a um custo muito baixo, a fábrica precisa controlar apenas a proporção de parafusos pequenos. Para que o processo de produção atinja o lucro mínimo desejável, é necessário que a proporção de parafusos pequenos seja no máximo de 5%.

(a) Supondo que a máquina que produz os parafusos o faça de modo que os comprimentos tenham distribuição normal com média μ e desvio-padrão de 1,0cm, em quanto deve ser regulada a máquina para satisfazer as condições de lucratividade da empresa?

(b) Para manter o processo sob controle, é programada uma carta de qualidade. A cada hora será sorteada uma amostra de quatro parafusos e, se o comprimento médio dessa amostra for menor que 9,0cm, o processo de produção será interrompido para uma nova regulagem da máquina. Qual é a probabilidade de uma parada desnecessária?

(c) Se a máquina se desregulou de modo que o comprimento médio passou a ser 9,5cm, qual é a probabilidade de se continuar o processo de produção fora dos padrões desejados?

Solução dos Exercícios

1. $\overline{X} \sim N\left(15; \frac{2{,}5^2}{18}\right)$

(a)

$$\begin{aligned}
P(14,5 \le \overline{X} \le 16) &= P\left(\frac{14,5-15}{\sqrt{\frac{2{,}5^2}{18}}} \le Z \le \frac{16-15}{\sqrt{\frac{2{,}5^2}{18}}}\right) \\
&= P(-0,85 \le Z \le 1,70) = P(-0,85 \le Z \le 0) + P(0 < Z \le 1,70) \\
&= P(0 \le Z \le 0,85) + P(0 \le Z \le 1,70) = tab(0,85) + tab(1,70) = 0,75777
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
P(\overline{X} > 16,1) &= P\left(Z > \frac{16,1-15}{\sqrt{\frac{2{,}5^2}{18}}}\right) = P(Z > 1,87) \\
&= 0,5 - P(0 \le Z \le 1,87) = 0,5 - tab(1,87) = 0,03074
\end{aligned}$$

2. Seja X = comprimento das peças; então $X \sim N(172; 25)$ e $n = 16$

(a)

$$\begin{aligned}
P(169 \le \overline{X} \le 175) &= P\left(\frac{169-172}{\sqrt{\frac{25}{16}}} \le \frac{\overline{X}-172}{\sqrt{\frac{25}{16}}} \le \frac{175-172}{\sqrt{\frac{25}{16}}}\right) \\
&= P(-2,4 \le Z \le 2,4) = 2 \times P(0 \le Z \le 2,4) \\
&= 2 \times tab(2,4) = 2 \times 0,4918 = 0,9836
\end{aligned}$$

(b)

$$P(\overline{X} > 178) = P\left(Z > \frac{178-172}{\sqrt{\frac{25}{16}}}\right) = P(Z > 4,8) \approx 0$$

(c)

$$P(\overline{X} < 165) = P\left(Z < \frac{165 - 172}{\sqrt{\frac{25}{16}}}\right) = P(Z < -5,6) \approx 0$$

3. Temos que $X \sim N(150; 13^2)$ e queremos determinar n para que $P(\left|\overline{X} - \mu\right| < 6,5) = 0,95$.

$$P(\left|\overline{X} - 150\right| < 6,5) = 0,95 \Leftrightarrow P(-6,5 < \overline{X} - 150 < 6,5) = 0,95 \Leftrightarrow$$
$$P\left(-\frac{6,5}{\frac{13}{\sqrt{n}}} < \frac{\overline{X} - 150}{\frac{13}{\sqrt{n}}} < \frac{6,5}{\frac{13}{\sqrt{n}}}\right) = 0,95 \Leftrightarrow P(-0,5\sqrt{n} < Z < 0,5\sqrt{n}) = 0,95 \Leftrightarrow$$
$$2 \times P(0 < Z < 0,5\sqrt{n}) = 0,95 \Leftrightarrow P(0 < Z < 0,5\sqrt{n}) = 0,475 \Leftrightarrow tab(0,5\sqrt{n}) = 0,475 \Leftrightarrow$$
$$0,5\sqrt{n} = 1,96 \Leftrightarrow \sqrt{n} = \frac{1,96}{0,5} = 3,92 \Leftrightarrow n = (3,92)^2 \approx 16$$

4. Depois da regulagem, $X \sim N(512,8; 100)$.

   (a) Parada desnecessária: amostra indica que o processo está fora de controle ($\overline{X} < 497$ ou $\overline{X} > 520$), quando, na verdade, o processo está ajustado ($\mu = 512,8$). Neste caso, podemos usar a notação de probabilidade condicional para auxiliar na solução do exercício. Queremos calcular

$$\begin{aligned}
&P\left[\left(\overline{X} < 497\right) \cup \left(\overline{X} > 520\right) \mid \overline{X} \sim N\left(512,8; \tfrac{100}{4}\right)\right] \\
&= P\left[\overline{X} < 497 \mid \overline{X} \sim N(512,8; 25)\right] + P\left[\overline{X} > 520 \mid \overline{X} \sim N(512,8; 25)\right] \\
&= P\left(Z < \frac{497 - 512,8}{5}\right) + P\left(Z > \frac{520 - 512,8}{5}\right) \\
&= P(Z < -3,16) + P(Z > 1,44) = P(Z > 3,16) + P(Z > 1,44) \\
&= [0,5 - P(0 \le Z \le 3,16)] + [0,5 - P(0 \le Z \le 1,44)] \\
&= 0,5 - tab(3,16) + 0,5 - tab(1,44) = 1,0 - 0,49921 - 0,42507 = 0,07572
\end{aligned}$$

   (b) Agora queremos

$$\begin{aligned}
&P\left[497 \le \overline{X} \le 520 \mid \overline{X} \sim N(500; 25)\right] = P\left(\frac{497 - 500}{5} \le Z \le \frac{520 - 500}{5}\right) \\
&= P(-0,6 \le Z \le 4) = P(-0,6 \le Z < 0) + Pr(0 \le Z \le 4) \\
&= P(0 \le Z \le 0,6) + Pr(0 \le Z \le 4) = \mathrm{tab}(0,6) + \mathrm{tab}(4,0) = 0,72572
\end{aligned}$$

   Note que a probabilidade de uma parada desnecessária é pequena, às custas da alta probabilidade de se operar fora de controle.

5. Os erros são:

   E_1 : estabelecer que são da máquina 1, quando na verdade foram produzidos pela máquina 2 ou

E_2 : estabelecer que são da máquina 2, quando na verdade foram produzidos pela máquina 1.

A regra de decisão é a seguinte:

$$\begin{aligned}\overline{X} > 23 &\Longrightarrow \text{ máquina 2}\\ \overline{X} \leq 23 &\Longrightarrow \text{ máquina 1}\end{aligned}$$

Na máquina 1 o comprimento é $N(20; 16)$ e na máquina 2, $N(25; 16)$.

$$\begin{aligned}P(E_1) &= P\left[\overline{X} \leq 23 | \overline{X} \sim N\left(25; \frac{16}{16}\right)\right] = P\left(Z \leq \frac{23-25}{1}\right)\\ &= \Pr(Z \leq -2) = P(Z \geq 2) = 0,5 - tab(2,0) = 0,5 - 0,4772 = 0,0228\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(E_2) &= P\left[\overline{X} > 23 | \overline{X} \sim N\left(20; \frac{16}{16}\right)\right] = P\left(Z > \frac{23-20}{1}\right)\\ &= \Pr(Z > 3) = 0,5 - tab(3,0) = 0,5 - 0,4987 = 0,0013\end{aligned}$$

6. Parafusos pequenos: $X < 8,5$, onde X é o comprimento do parafuso.

   (a) $X \sim N(\mu; 1)$. Como $\Pr(X < 8,5) = 0,05$, resulta que 8,5 tem que ser menor que μ, ou seja, a abscissa $8,5 - \mu$ tem que estar no lado negativo da escala da normal padronizada.

$$\begin{aligned}&\Pr(X < 8,5) = 0,05 \Leftrightarrow P\left(Z < \frac{8,5-\mu}{1}\right) = 0,05 \Leftrightarrow\\ &P\left(Z > -\frac{8,5-\mu}{1}\right) = 0,05 \Leftrightarrow P(0 \leq Z \leq \mu - 8,5) = 0,45 \Leftrightarrow\\ &\mu - 8,5 = 1,64 \Leftrightarrow \mu = 10,14\end{aligned}$$

   (b) Parada desnecessária: amostra indica processo fora de controle ($\overline{X} < 9$), quando, na verdade, o processo está sob controle ($\mu = 10,14$).

$$\begin{aligned}&P\left[\overline{X} < 9 \,|\, \overline{X} \sim N\left(10,14; \frac{1}{4}\right)\right] = P\left(Z < \frac{9-10,14}{0,5}\right)\\ &= P(Z < -2,28) = P(Z > 2,28) = 0,5 - P(0 \leq Z \leq 2,28)\\ &= 0,5 - tab(2,28) = 0,5 - 0,4887 = 0,0113\end{aligned}$$

   (c) Máquina desregulada: $\overline{X} > 9$; processo operando sem ajuste: $X \sim N(9,5; 1)$

$$\begin{aligned}&P\left[\overline{X} > 9 \,|\, \overline{X} \sim N\left(9,5; \frac{1}{4}\right)\right] = P\left(Z > \frac{9-9,5}{0,5}\right) = P(Z > -1)\\ &= P(-1 < Z < 0) + P(Z \geq 0) = P(0 < Z < 1) + P(Z \geq 0) = tab(1,0) + 0,5 = 0,8413\end{aligned}$$

Capítulo 3

O Teorema Limite Central

Neste capítulo, iremos concluir o estudo sobre a distribuição amostral da média amostral, que se iniciou no capítulo anterior com a análise da situação em que a população era normal e vimos que a média amostral também tem distribuição normal. Agora, iremos estudar o Teorema Limite Central, que nos dá uma aproximação para a distribuição da média amostral para grandes amostras, qualquer que seja a distribuição populacional.

Teorema Limite Central

Os resultados vistos no capítulo anterior são válidos para populações normais, isto é, se uma população é normal com média μ e variância σ^2, então a distribuição amostral de $\overline{X}$ é também normal com média μ e variância σ^2/n, em que n é o tamanho da amostra. O Teorema Central do Limite nos fornece um resultado análogo para qualquer distribuição populacional, desde que o tamanho da amostra seja suficientemente grande.

Teorema 3.1 ***Teorema Limite Central***
Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples de uma população X tal que $\mathrm{E}(X) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Então, a distribuição de $\overline{X}$ converge para a distribuição normal com média μ e variância σ^2/n quando $n \to \infty$. Equivalentemente,

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \longrightarrow N(0,1)$$

□

A interpretação prática do Teorema Limite Central é a seguinte: para amostras “grandes” de qualquer população, podemos aproximar a distribuição amostral de $\overline{X}$ por uma distribuição normal com a mesma média populacional e variância igual à variância populacional dividida pelo tamanho da amostra.

Quão grande deve ser a amostra para se obter uma boa aproximação depende das características da distribuição populacional. Se a distribuição populacional não se afastar muito de uma distribuição normal, a aproximação será boa, mesmo para tamanhos pequenos de amostra.

Na **Figura 3.1** ilustra-se esse teorema para uma distribuição contínua, conhecida como distribuição exponencial. Esta distribuição depende de um parâmetro, que é a média da distribuição. O gráfico superior representa a distribuição populacional e os histogramas representam a distribuição amostral de $\overline{X}$ ao longo de 5.000 amostras de tamanhos 10, 50, 100 e 250. Assim, podemos ver que, embora a população seja completamente diferente da normal, a distribuição amostral de $\overline{X}$ vai se tornando cada vez mais próxima da normal à medida que n aumenta.

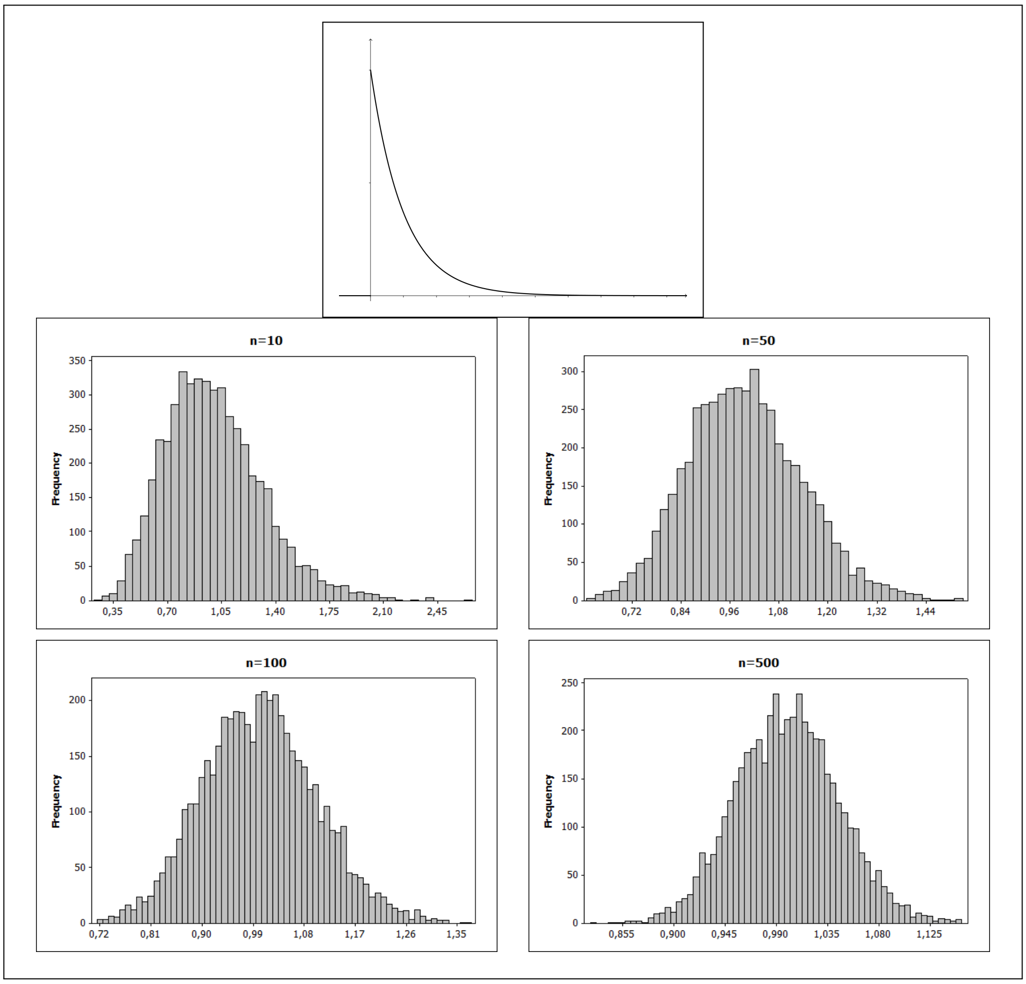


Figura 3.1 – Ilustração do Teorema Limite Central para uma população $X \sim exp(1)$

Em termos práticos, esse teorema é de extrema importância e, por isso é chamado teorema central; em geral, amostras de tamanho $n > 30$ já fornecem uma aproximação razoável.

Exemplo 3.1

Uma moeda é lançada 50 vezes, com o objetivo de se verificar sua honestidade. Se ocorrem 36 caras nos 50 lançamentos, o que podemos concluir?

Solução:

Neste caso, a população pode ser representada por uma variável de Bernoulli X com parâmetro p, isto é, X assume o valor 1 com probabilidade p na ocorrência de cara e assume o valor 0 com probabilidade $1 - p$ na ocorrência de coroa. Para uma variável de Bernoulli, temos que $\mathrm{E}(X) = p$ e $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$. Como são feitos 50 lançamentos, o tamanho da amostra é 50 (n grande!) e, pelo Teorema Limite Central, $\overline{X}$ é aproximadamente normal com média $\mathrm{E}(\overline{X}) = p$ e variância $\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{p(1-p)}{50}$.

Suponhamos que a moeda seja honesta, isto é, que $p = 1/2$. Nessas condições, qual é a probabilidade de obtermos 36 caras em 50 lançamentos? Com a hipótese de honestidade da moeda, o Teorema Limite Central nos diz que

$$\overline{X} \approx N\left(\frac{1}{2}; \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{50}\right)$$

A probabilidade de se obter 36 ou mais caras em 50 lançamentos é equivalente à probabilidade de $\overline{X}$ ser maior ou igual a $\frac{36}{50} = 0,72$ e essa probabilidade pode ser aproximada por

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\overline{X} \geq 0,72) &= \mathrm{P}\left(\frac{\overline{X} - 0,5}{\sqrt{200}} \geq \frac{0,72 - 0,5}{\sqrt{\frac{1}{200}}}\right) \\
&= \mathrm{P}(Z \geq 3,11) = 0,5 - \mathrm{P}(0 \leq Z < 3,11) \\
&= 0,5 - tab(3,11) = 0,5 - 0,4991 = 0,0009
\end{aligned}$$

Note que essa probabilidade é bastante pequena, ou seja, há uma pequena probabilidade de obtermos 36 ou mais caras em um lançamento de uma moeda honesta. Isso pode nos levar a suspeitar sobre a honestidade da moeda!

♦♦

Exemplo 3.2

O fabricante de uma lâmpada especial afirma que o seu produto tem vida média de 1.600 horas, com desvio-padrão de 250 horas. O dono de uma empresa compra 100 lâmpadas desse fabricante. Qual é a probabilidade de que a vida média dessas lâmpadas ultrapasse 1.650 horas?

Solução:

Podemos aceitar que as 100 lâmpadas compradas sejam uma amostra aleatória simples da população das lâmpadas produzidas por esse fabricante. Como $n = 100$ é um tamanho suficientemente grande de amostra, podemos usar o Teorema Limite Central, que nos diz que $\overline{X} \approx N\left(1600; \frac{250^2}{100}\right)$. Logo,

$$\begin{aligned} P(\overline{X} > 1650) &= P\left(\frac{\overline{X} - 1600}{\sqrt{\frac{250^2}{100}}} > \frac{1650 - 1600}{\sqrt{\frac{250^2}{100}}}\right) \\ &= P(Z > 2,0) = 0,5 - P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0,5 - tab(2,0) = 0,5 - 0,4772 = 0,022 \end{aligned}$$

♦♦

Resumo

O Teorema Limite Central limite é um dos mais importantes teoremas da teoria inferencial. Ele nos dá informações sobre a distribuição amostral de $\overline{X}$ para amostras *grandes* de qualquer população. Mais precisamente, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória simples de uma população X tal que $E(X) = \mu$ e $\text{Var}(X) = \sigma^2$, então a distribuição de $\overline{X}$ converge para a distribuição normal com média μ e variância σ^2/n quando $n \to \infty$. Equivalentemente,

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \longrightarrow N(0,1)$$

ou

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \longrightarrow N(0,1)$$

Exercícios

1. A divisão de inspeção do Departamento de Pesos e Medidas de uma determinada cidade está interessada em calcular a real quantidade de refrigerante que é colocada em garrafas de dois litros, no setor de engarrafamento de uma grande empresa de refrigerantes. O gerente do setor de engarrafamento informou à divisão de inspeção que o desvio-padrão para garrafas de dois litros é de 0,05 litro. Uma amostra aleatória de 100 garrafas de dois litros, obtida deste setor de engarrafamento, indica uma média de 1,985 litro. Qual é a probabilidade de se obter uma média amostral de 1,985 ou menos, caso a afirmativa do gerente esteja certa? O que se pode concluir?

Solução dos Exercícios

1. Afirmativa do gerente: $\mu = 2$ e $\sigma = 0,05$. Como $n = 100$, podemos usar o Teorema Limite Central. Logo, $\overline{X} \approx N\left(2; \frac{0,05^2}{100}\right)$.

$$
\begin{aligned}
P(\overline{X} \leq 1,985) &= P\left(Z \leq \frac{1,985 - 2}{\frac{0,05}{10}}\right) \\
&= P(Z \leq -3,0) = P(Z \geq 3,0) \\
&= 0,5 - \text{tab}(3,0) = 0,5 - 0,4987 = 0,0013
\end{aligned}
$$

A probabilidade de se obter esse valor nas condições dadas pelo gerente é muito pequena, o que pode nos fazer suspeitar da veracidade das afirmativas. É provável que ou a média não seja 2 (e, sim, menor que 2), ou o desvio-padrão não seja 0,05 (e, sim, maior que 0,05). Esboce gráficos da normal para compreender melhor esse comentário!

Capítulo 4

Distribuição Amostral da Proporção

Neste capítulo, você verá uma importante aplicação do Teorema Limite Central: iremos estudar a distribuição amostral de proporções para amostras grandes, que nos permitirá fazer inferência sobre proporções.

Você verá os seguintes resultados:

- aproximação da binomial pela normal;
- correção de continuidade;
- distribuição amostral da proporção amostral.

Distribuição Amostral da Proporção

No capítulo anterior, vimos o Teorema Limite Central (TLC), que trata da distribuição da média amostral $\overline{X}$ quando $n \to \infty$. Esse teorema nos diz que, se X é uma população com média μ e variância σ^2, então a distribuição amostral da média de uma amostra aleatória simples de tamanho n se aproxima de uma distribuição normal com média μ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$ quando $n \to \infty$.

Considere, agora, uma população em que cada elemento é classificado de acordo com a presença ou ausência de determinada característica. Por exemplo, podemos pensar em eleitores escolhendo entre dois candidatos, pessoas classificadas de acordo com o sexo, trabalhadores classificados como trabalhador com carteira assinada ou não, e assim por diante. Essa população é, então, representada por uma variável aleatória de Bernoulli X, isto é:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se elemento possui a característica de interesse} \\ 0, & \text{se elemento não possui a caracaterística de interesse} \end{cases}$$

Vamos denotar por p a proporção de elementos da população que possuem a característica de interesse. Então

$$\mathrm{P}(X = 1) = p \tag{4.1}$$

$$\mathrm{E}(X) = p \tag{4.2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = p(1 - p) \tag{4.3}$$

Em geral, o parâmetro p é desconhecido e precisamos estimá-lo a partir de uma amostra.

Seguindo notação já vista anteriormente, vamos indicar por $X \sim Bern(p)$ o fato de uma variável aleatória X ter distribuição de Bernoulli com parâmetro p (probabilidade de sucesso).

Suponha, agora, que de uma população $X \sim Bern(p)$ seja extraída uma amostra aleatória simples $X_1, X_2, \dots, X_n$ *com* reposição. Essa amostra resulta em uma sequência de 0's (elementos que não possuem a característica) e 1's (elementos que possuem a característica). A média amostral é

$$\overline{x} = \frac{0 + 0 + \cdots + 0 + 1 + 1 + \cdots + 1}{n} = \frac{1 + 1 + \cdots + 1}{n}$$

ou seja, a média amostral é a proporção amostral dos elementos que possuem a característica de interesse.

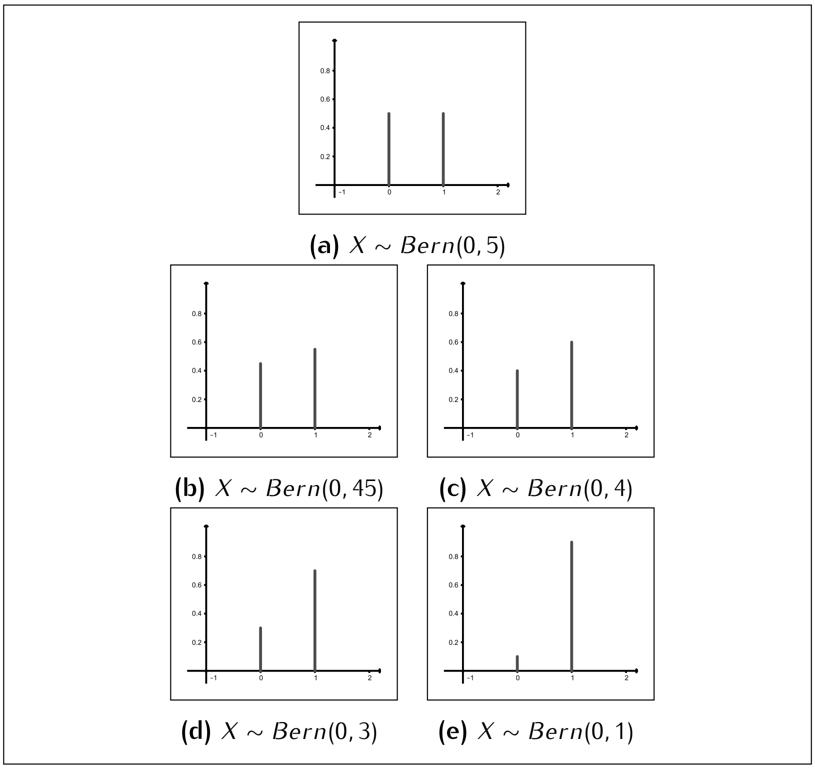
Assim, estudar a distribuição amostral da média amostral de uma população $X \sim Bern(p)$ equivale a estudar a distribuição da proporção amostral, que representaremos por $\widehat{P}$.

Usando o Teorema Limite Central e os resultados dados em (4.2) e (4.3), concluímos que, para grandes amostras,

$$\widehat{P} \approx N\left(p; \frac{p(1 - p)}{n}\right) \tag{4.4}$$

Condições para uso da aproximação normal

O Teorema Limite Central é um teorema sobre convergência quando $n \to \infty$. Na prática, traduzimos $n \to \infty$ por n *grande*. Não existe uma regra clara que defina o que é "grande". Quanto mais próxima da normal for a distribuição populacional, mais rápida é a convergência. Uma das principais características da distribuição normal é o fato de ela ser simétrica. No caso da distribuição de Bernoulli, ela é simétrica quando $p = 0,5$ e será aproximadamente simétrica quando p e $1 - p$ forem próximos de 0,5. Veja a Figura 4.1.



(a) $X \sim Bern(0,5)$ (b) $X \sim Bern(0,45)$ (c) $X \sim Bern(0,4)$ (d) $X \sim Bern(0,3)$ (e) $X \sim Bern(0,1)$

Figura 4.1 – Efeito de p sobre a assimetria da distribuição de Bernoulli

Existe a seguinte regra empírica para nos ajudar a decidir se é razoável utilizar a distribuição normal como aproximação da distribuição amostral de $\widehat{P}$:

> **!** A distribuição da proporção amostral com base em amostra de tamanho n de uma população $X \sim Bern(p)$ pode ser aproximada por uma distribuição normal com média $\mu = p$ e variância $\sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n}$ se são satisfeitas as seguintes condições:
>
> 1. $n \geq 30$ – amostra grande
> 2. $np \geq 5$ – pelo menos 5 sucessos na amostra
> 3. $n(1-p) \geq 5$ – pelo menos 5 fracassos na amostra

Correção de continuidade

Como visto anteriormente, a distribuição normal é contínua, enquanto a proporção amostral $\widehat{P}$ é uma variável aleatória discreta, que assume os valores $\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{n}{n}$, sendo n o tamanho da amostra. Para obter resultados mais precisos na aproximação da distribuição de $\widehat{P}$ pela distribuição normal, é comum usar-se a *correção de continuidade*. Para introduzir esse conceito, vamos trabalhar com o número de sucessos na amostra, em vez da proporção. Então, para uma amostra de tamanho n, podemos ter $0, 1, 2, \cdots, n$ sucessos na amostra. Para usar a aproximação normal, cada um desses valores será substituído por um intervalo: se k é o número de sucessos na amostra, na aproximação normal trabalharemos com o intervalo $[k - 0,5; k + 0,5]$. Vamos ver como utilizar a correção de continuidade através de um exemplo. Nesse primeiro exemplo, faremos os cálculos em todos os detalhes, para que você possa entender a lógica da aproximação. Nos exemplos e exercícios subsequentes apresentaremos apenas as etapas realmente necessárias.

Exemplo 4.1

De um lote de produtos manufaturados, extrai-se uma amostra aleatória simples de 100 itens. Se 10% dos itens do lote são defeituosos, calcule a probabilidade de a proporção amostral

(a) ser 0,12;

(b) estar no intervalo $[0,12; 0,14]$;

(c) estar no intervalo $(0,12; 0,15)$;

(d) ser, no máximo, 0,12;

(e) ser maior que 0,87.

Solução:

Temos uma amostra de tamanho $n = 100$ de uma população $X \sim Bern(0,10)$. As condições para utilização da aproximação normal são válidas:

$$n = 100 > 30$$
$$100 \times 0,1 = 10 > 5$$
$$100 \times 0,9 = 90 > 5$$

Assim, a distribuição da proporção amostral pode ser aproximada por uma $N\left(0,10; \frac{0,10\times 0,90}{100}\right)$, ou seja, $N(0,10; 0,03^2)$.

(a) Uma proporção de 0,12 corresponde a 12 sucessos na amostra de tamanho 100.

$$\begin{aligned}
P(\widehat{P} = 0,12) &= P\left(\widehat{P} = \frac{12}{100}\right) \underbrace{=}_{\text{cor. de cont.}} P\left(\frac{12-0,5}{100} \leq \widehat{P} \leq \frac{12+0,5}{100}\right) \\
&= P(0,115 \leq \widehat{P} \leq 0,125) \underbrace{\approx}_{\text{TLC}} P\left(\frac{0,115-0,10}{0,03} \leq \widehat{P} \leq \frac{0,125-0,10}{0,03}\right) \\
&= P(0,5 \leq Z \leq 0,83) = tab(0,83) - tab(0,50) = 0,2967 - 0,1915 = 0,1052
\end{aligned}$$

(b) Para estar no intervalo $[0,12; 0,14]$, temos que ter 12, 13 ou 14 sucessos na amostra. Note que o intervalo é fechado nos 2 extremos. Com raciocínio análogo ao empregado no item anterior, temos:

$$
\begin{aligned}
P(0,12 \leq \widehat{P} \leq 0,14) &= P(\widehat{P} = 0,12) + P(\widehat{P} = 0,13) + P(\widehat{P} = 0,14) \\
&= P\left(\widehat{P} = \frac{12}{100}\right) + P\left(\widehat{P} = \frac{13}{100}\right) + P\left(\widehat{P} = \frac{14}{100}\right) \\
&= P\left(\frac{12-0,5}{100} \leq \widehat{P} \leq \frac{12+0,5}{100}\right) + P\left(\frac{13-0,5}{100} \leq \widehat{P} \leq \frac{13+0,5}{100}\right) \\
&+ P\left(\frac{14-0,5}{100} \leq \widehat{P} \leq \frac{14+0,5}{100}\right) \\
&= P(0,115 \leq \widehat{P} \leq 0,125) + P(0,125 \leq \widehat{P} \leq 0,135) + P(0,135 \leq \widehat{P} \leq 0,145) \\
&= P(0,115 \leq \widehat{P} \leq 0,145)
\end{aligned}
$$

Esta última igualdade é consequência do fato de os intervalos se sobreporem. Note que os limites intermediários aparecem nos 2 intervalos. Usando a aproximação normal, temos

$$
\begin{aligned}
P(0,12 \leq \widehat{P} \leq 0,14) = P(0,115 \leq \widehat{P} \leq 0,145) &\approx P\left(\frac{0,115-0,10}{0,03} \leq Z \leq \frac{0,145-0,10}{0,03}\right) \\
&= P(0,5 \leq Z \leq 1,5) = tab(1,5) - tab(0,5) \\
&= 0,4332 - 0,1915 = 0,2417
\end{aligned}
$$

(c) Para estar no intervalo $(0,12; 0,15)$, temos que ter 13 ou 14 sucessos na amostra. Note que o intervalo é aberto nos 2 extremos. Com raciocínio análogo ao empregado no item anterior, temos:

$$
\begin{aligned}
P(0,12 < \widehat{P} < 0,15) &= P(0,13 \leq \widehat{P} \leq 0,14) = P\left(\widehat{P} = \frac{13}{100}\right) + P\left(\widehat{P} = \frac{14}{100}\right) \\
&= P\left(\frac{13-0,5}{100} \leq \widehat{P} \leq \frac{13+0,5}{100}\right) + P\left(\frac{14-0,5}{100} \leq \widehat{P} \leq \frac{14+0,5}{100}\right) \\
&= P(0,125 \leq \widehat{P} \leq 0,135) + P(0,135 \leq \widehat{P} \leq 0,145) = P(0,125 \leq \widehat{P} \leq 0,145) \\
&\approx P\left(\frac{0,125-0,10}{0,03} \leq Z \leq \frac{0,145-0,10}{0,03}\right) = P(0,83 \leq Z \leq 1,5) \\
&= tab(1,5) - tab(0,83) = 0,4332 - 0,2967 = 0,1365
\end{aligned}
$$

(d) Uma proporção máxima de 0,12 significa $12, 11, 10, \cdots 0$ sucessos na amostra. Em termos da normal aproximadora, temos que calcular a probabilidade à esquerda da abscissa padronizada correspondente, ou seja:

$$
\begin{aligned}
P(\widehat{P} \leq 0,12) = P(\widehat{P} \leq 0,125) &\approx P\left(Z \leq \frac{0,125-0,10}{0,03}\right) = P(Z \leq 0,83) = 0,5 + tab(0,83) \\
&= 0,5 + 0,2967 = 0,7967
\end{aligned}
$$

(e) Para ser maior que 0,87, temos que ter $88, 89, \cdots, 100$ sucessos na amostra. Em termos da normal aproximadora, temos que calcular a probabilidade à direita da abscissa padronizada correspondente, ou seja:

$$P(\widehat{P} > 0,87) = P(\widehat{P} \geq 0,88) \approx P\left(Z \geq \frac{0,875 - 0,10}{0,03}\right) = P(Z \geq 25,83) \approx 0$$

♦♦

Com este exemplo, podemos ver que o ponto importante é se o intervalo é fechado, ou não. No quadro a seguir, em que k é o número de sucessos na amostra e n é o tamanho da amostra, resumimos os resultados básicos, que podem ser conjugados para analisar todos os tipos possíveis de intervalo.

Probabilidade exata	Probabilidade para a aproximação normal
$P\left(\widehat{P} = \frac{k}{n}\right)$	$P\left(\frac{k-0,5}{n} \leq \widehat{P} \leq \frac{k+0,5}{n}\right)$
$P\left(\widehat{P} \leq \frac{k}{n}\right)$	$P\left(\widehat{P} \leq \frac{k+0,5}{n}\right)$
$P\left(\widehat{P} < \frac{k}{n}\right) = P\left(\widehat{P} \leq \frac{k-1}{n}\right)$	$P\left(\widehat{P} \leq \frac{k-1+0,5}{n}\right) = P\left(\widehat{P} \leq \frac{k-0,5}{n}\right)$
$P\left(\widehat{P} \geq \frac{k}{n}\right)$	$P\left(\widehat{P} \geq \frac{k-0,5}{n}\right)$
$P\left(\widehat{P} > \frac{k}{n}\right) = P\left(\widehat{P} \geq \frac{k+1}{n}\right)$	$P\left(\widehat{P} \geq \frac{k+1-0,5}{n}\right) = P\left(\widehat{P} \geq \frac{k+0,5}{n}\right)$

Note que, se na probabilidade original o k está incluído no intervalo, então ele tem que estar incluído no intervalo para cálculo da probabilidade aproximada pela normal.

Exemplo 4.2 ***Controle de qualidade***

No controle de qualidade de produtos, uma técnica comumente utilizada é a *amostragem de aceitação*. Segundo essa técnica, um lote inteiro é rejeitado se contiver mais do que um número determinado de itens defeituosos. A companhia X compra parafusos de uma fábrica em lotes de 10.000 e rejeita o lote se uma amostra aleatória simples de 50 parafusos contiver pelo menos cinco defeituosos. Se o processo de fabricação tem uma taxa de 12% de defeituosos, qual é a probabilidade de um lote ser rejeitado pela companhia X?

Solução:

Temos uma amostra de tamanho 50 de uma população $X \sim Bern(0,12)$. As condições para aproximação pela normal são satisfeitas:

$$n = 50 > 30 \qquad 50 \times 0,12 = 6 > 5 \qquad 50 \times 0,88 = 44 > 5.$$

O lote será rejeitado se $\widehat{P} \geq \frac{5}{50}$.

$$\mathrm{P}\left(\widehat{P} \geq \frac{5}{50}\right) = \mathrm{P}\left(\widehat{P} \geq \frac{5-0,5}{50}\right) = \mathrm{P}\left(\widehat{P} \geq 0,09\right) \approx \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{0,09-0,12}{\sqrt{\frac{0,12\times 0,88}{50}}}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z \geq -0,65) = 0,5 + tab(0,65) = 0,5 + 0,2422 = 0,7422$$

Note que essa é uma probabilidade alta, mas o problema aqui é a alta taxa de defeituosos do processo: 12%.

♦♦

Resumo

- Neste capítulo estudamos a distribuição amostral da proporção amostral, que é a média amostral de uma população $X \sim Bern(p)$. Vimos que essa distribuição pode ser aproximada por uma distribuição normal de média p e variância $\frac{p(1-p)}{n}$, desde que sejam satisfeitas as seguintes condições:
  - ⋆ $n \geq 30$
  - ⋆ $np \geq 5$
  - ⋆ $n(1-p) \geq 5$
- No uso da aproximação normal, é importante que se utilize a correção de continuidade, para aumentar a precisão da aproximação.

Exercícios

1. Use a aproximação normal, com correção de continuidade, para calcular as probabilidades pedidas, tendo o cuidado de verificar que as condições para essa aproximação são realmente satisfeitas.

   (a) $\mathrm{P}(\widehat{P} \leq 0,5)$ se $X \sim Bern(0,7)$ e $n = 50$

   (b) $\mathrm{P}(0,42 < \widehat{P} \leq 0,56)$ se $X \sim Bern(0,5)$ e $n = 100$

   (c) $\mathrm{P}(\widehat{P} > 0,6)$ se $X \sim Bern(0,5)$ e $n = 100$

   (d) $\mathrm{P}(\widehat{P} = 0,25)$ se $X \sim Bern(0,4)$ e $n = 40$

   (e) $\mathrm{P}(\widehat{P} \geq 0,4)$ se $X \sim Bern(0,3)$ e $n = 30$

   (f) $\mathrm{P}(0,125 < \widehat{P} < 0,175)$ se $X \sim Bern(0,1)$ e $n = 80$

   (g) $\mathrm{P}(0,4 \leq \widehat{P} \leq 0,6)$ se $X \sim Bern(0,2)$ e $n = 30$

   (h) $\mathrm{P}(\widehat{P} < 0,36)$ se $X \sim Bern(0,3)$ e $n = 50$

(i) $P(0,25 \leq \widehat{P} < 0,45)$ se $X \sim Bern(0,4)$ e $n = 120$

2. Em uma sondagem, perguntou-se a 1.002 membros de determinado sindicato se eles haviam votado na última eleição para a direção do sindicato e 701 responderam afirmativamente. Os registros oficiais obtidos depois da eleição mostram que 61% dos membros aptos a votar de fato votaram. Calcule a probabilidade de que, dentre 1.002 membros selecionados aleatoriamente, no mínimo 701 tenham votado, considerando que a verdadeira taxa de votantes seja de 61%. O que o resultado sugere?

3. Supondo que meninos e meninas sejam igualmente prováveis, qual é a probabilidade de nascerem 36 ou mais meninas em 64 partos? Em geral, um resultado é considerado não-usual se a sua probabilidade de ocorrência é pequena, digamos, menor que 0,05. É não-usual nascerem 36 meninas em 64 partos?

4. Com base em dados históricos, uma companhia aérea estima em 15% a taxa de desistência entre seus clientes, isto é, 15% dos passageiros com reserva não aparecem na hora do voo. Para otimizar a ocupação de suas aeronaves, essa companhia decide aceitar 400 reservas para os voos em aeronaves que comportam apenas 350 passageiros. Calcule a probabilidade de que essa companhia não tenha assentos suficientes em um desses voos. Essa probabilidade é alta o suficiente para a companhia rever sua política de reserva?

Solução dos exercícios

1. (a) $n = 50 > 30$ $\quad np = 50 \times 0,7 = 35 > 5$ $\quad n(1-p) = 50 \times 0,3 = 15 > 5$

condições OK! $\quad$ Normal aproximadora: $N\left(0,70; \dfrac{0,7 \times 0,3}{50}\right)$

$$P(\widehat{P} \leq 0,5) = P\left(\widehat{P} \leq \frac{25}{50}\right) = P\left(\widehat{P} \leq \frac{25+0,5}{50}\right) = P(\widehat{P} \leq 0,51) \approx P\left(Z \leq \frac{0,51-0,7}{\sqrt{\dfrac{0,7 \times 0,3}{50}}}\right)$$

$$= P(Z \leq -2,93) = 0,5 - tab(2,93) = 0,5 - 0,4983 = 0,0017$$

(b) $n = 100 > 30$ $\quad np = n(1-p) = \quad 100 \times 0,5 = 50 > 5$

condições OK! $\quad$ Normal aproximadora: $N\left(0,50; \dfrac{0,5 \times 0,5}{100}\right)$

$$P(0,42 < \widehat{P} \leq 0,56) = P\left(\frac{43}{100} \leq \widehat{P} \leq \frac{56}{100}\right) = P\left(\frac{42,5}{100} \leq \widehat{P} \leq \frac{56,5}{100}\right)$$

$$\approx P\left(\frac{0,425-0,5}{\sqrt{\dfrac{0,5 \times 0,5}{100}}} \leq Z \leq \frac{0,565-0,5}{\sqrt{\dfrac{0,5 \times 0,5}{100}}}\right)$$

$$= P(-1,5 \leq Z \leq 1,3) = tab(1,5) + tab(1,3) = 0,4332 + 0,4032 = 0,8364$$

(c) $n = 100 > 30$ $\quad np = n(1-p) = 100 \times 0,5 = 50 > 5$

condições OK! $\quad$ Normal aproximadora: $N\left(0,50; \dfrac{0,5 \times 0,5}{100}\right)$

$$\mathrm{P}(\widehat{P} > 0,6) = \mathrm{P}\left(\widehat{P} \geq \frac{61}{100}\right) = \mathrm{P}\left(\widehat{P} \geq \frac{61-0,5}{100}\right) = \mathrm{P}(\widehat{P} \geq 0,605) \approx \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{0,605-0,5}{\sqrt{\frac{0,5\times 0,5}{100}}}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z \geq 2,1) = 0,5 - tab(2,1) = 0,5 - 0,4821 = 0,0179$$

(d) $n = 40 > 30$ $\quad np = 40 \times 0,4 = 16 > 5$ $\quad n(1-p) = 40 \times 0,6 = 24 > 5$

condições OK! $\quad$ Normal aproximadora: $N\left(0,40; \dfrac{0,4 \times 0,6}{40}\right)$

$$\mathrm{P}(\widehat{P} = 0,25) = \mathrm{P}\left(\widehat{P} = \frac{10}{40}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{10-0,5}{40} \leq \widehat{P} \leq \frac{10+0,5}{40}\right)$$
$$= \mathrm{P}(0,2375 \leq \widehat{P} \leq 0,2625) \approx \mathrm{P}\left(\frac{0,2375-0,4}{\sqrt{\frac{0,4\times 0,6}{40}}} \leq Z \leq \frac{0,2625-0,4}{\sqrt{\frac{0,4\times 0,6}{40}}}\right)$$
$$= \mathrm{P}(-2,10 \leq Z \leq -1,78) = \mathrm{P}(1,78 \leq Z \leq 2,10) = tab(2,10) - tab(1,78)$$
$$= 0,4821 - 0,4625 = 0,0196$$

(e) $n = 30 \geq 30$ $\quad np = 30 \times 0,3 = 9 > 5$ $\quad (1-p) = 30 \times 0,7 = 21 > 5$

condições OK! $\quad$ Normal aproximadora: $N\left(0,30; \dfrac{0,3 \times 0,7}{30}\right)$

$$\mathrm{P}(\widehat{P} \geq 0,4) = \mathrm{P}\left(\widehat{P} \geq \frac{12}{30}\right) = \mathrm{P}\left(\widehat{P} \geq \frac{12-0,5}{30}\right) = \mathrm{P}(\widehat{P} \geq 0,3833) \approx \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{0,3833-0,3}{\sqrt{\frac{0,3\times 0,7}{30}}}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z \geq 1,0) = 0,5 - tab(1,0) = 0,5 - 0,3413 = 0,1587$$

(f) $n = 80 > 30$ $\quad np = 80 \times 0,1 = 8 > 5$ $\quad (1-p) = 80 \times 0,9 = 72 > 5$

condições OK! $\quad$ Normal aproximadora: $N\left(0,10; \dfrac{0,1 \times 0,9}{80}\right)$

$$
\begin{aligned}
P(0,125 < \widehat{P} < 0,175) &= P\left(\frac{10}{80} < \widehat{P} < \frac{14}{80}\right) = P\left(\frac{11}{80} \le \widehat{P} \le \frac{13}{80}\right) \\
&= P\left(\frac{10,5}{80} \le \widehat{P} \le \frac{13,5}{80}\right) = P(0,13125 \le \widehat{P} \le 0,16875 \\
&\approx P\left(\frac{0,13125 - 0,1}{\sqrt{\frac{0,1 \times 0,9}{80}}} \le Z \le \frac{0,16875 - 0,1}{\sqrt{\frac{0,1 \times 0,9}{80}}}\right) \\
&= P(0,93 \le Z \le 2,05) = tab(2,05) - tab(0,93) \\
&= 0,4798 - 0,3238 = 0,1560
\end{aligned}
$$

(g) $n = 30 \geq 30$ $\quad$ $np = 30 \times 0,2 = 6 > 5$ $\quad$ $n(1-p) = 30 \times 0,8 = 24 > 5$

condições OK! $\quad$ Normal aproximadora: $N\left(0,20; \frac{0,2 \times 0,8}{30}\right)$

$$
\begin{aligned}
P(0,4 \le \widehat{P} \le 0,6) &= P\left(\frac{12}{30} \le \widehat{P} \le \frac{18}{30}\right) = P\left(\frac{11,5}{30} \le \widehat{P} \le \frac{18,5}{30}\right) \\
&= P(0,03833 \le \widehat{P} \le 0,6167 \approx P\left(\frac{0,3833 - 0,2}{\sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{30}}} \le Z \le \frac{0,6167 - 0,2}{\sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{30}}}\right) \\
&= P(2,51 \le Z \le 5,71) = tab(5,71) - tab(2,51) = 0,5 - 0,4940 = 0,0060
\end{aligned}
$$

(h) $n = 50 > 30$ $\quad$ $np = 50 \times 0,3 = 15 > 5$ $\quad$ $n(1-p) = 50 \times 0, = 35 > 5$

condições OK! $\quad$ Normal aproximadora: $N\left(0,30; \frac{0,3 \times 0,7}{50}\right)$

$$
\begin{aligned}
P(\widehat{P} < 0,36) &= P\left(\widehat{P} < \frac{18}{50}\right) = P\left(\widehat{P} \le \frac{17}{50}\right) = P\left(\widehat{P} \le \frac{17 + 0,5}{50}\right) = P(\widehat{P} \le 0,35) \\
&\approx P\left(Z \le \frac{0,35 - 0,3}{\sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{50}}}\right) = P(Z \le 0,77) = 0,5 + tab(0,77) \\
&= 0,5 + 0,2794 = 0,7794
\end{aligned}
$$

(i) $n = 120 > 30$ $\quad$ $np = 120 \times 0,4 = 48 > 5$ $\quad$ $n(1-p) = 120 \times 0,6 = 72 > 5$

condições OK! $\quad$ Normal aproximadora: $N\left(0,40; \frac{0,4 \times 0,6}{120}\right)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(0,25 \le \widehat{P} \le 0,45) &= \mathrm{P}\left(\frac{30}{120} \le \widehat{P} < \frac{54}{120}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{30}{120} \le \widehat{P} \le \frac{53}{120}\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\frac{29,5}{120} \le \widehat{P} \le \frac{53,5}{120}\right) = \mathrm{P}(0,24583 \le Z \le 0,44583) \\
&\approx \mathrm{P}\left(\frac{0,24583 - 0,4}{\sqrt{\dfrac{0,4 \times 0,6}{120}}} \le Z \le \frac{0,44583 - 0,4}{\sqrt{\dfrac{0,4 \times 0,6}{120}}}\right) = \mathrm{P}(-3,45 \le Z \le 1,02) \\
&= tab(3,45) + tab(1,02) = 0,4997 + 0,3461 = 0,8458
\end{aligned}$$

2. A população de interesse é a população de votantes. Temos, então, que $X \sim Bern(0,61)$. As condições para a aproximação normal são válidas (verifique!).

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\widehat{P} \ge \frac{701}{1002}\right) &= \mathrm{P}\left(\widehat{P} \ge \frac{700,5}{1002}\right) = \mathrm{P}(\widehat{P} \ge 0,6991) \\
&\approx \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{0,6991 - 0,61}{\sqrt{\dfrac{0,61 \times 0,39}{1002}}}\right) = \mathrm{P}(Z \ge 5,78) \approx 0
\end{aligned}$$

Se a proporção de votantes é de 61%, a probabilidade de encontrarmos 701 ou mais votantes em uma amostra aleatória simples de 1.002 pessoas é muito baixa. Talvez as pessoas entrevistadas não estejam sendo sinceras, com vergonha de dizer que não votaram...

3. Supondo que meninos e meninas sejam igualmente prováveis, nossa população de interesse (constituída por todos os partos) é $X \sim Bern(0,5)$. Temos uma amostra de $n = 64$ partos. As condições para a aproximação normal são válidas (verifique!).

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\widehat{P} \ge \frac{36}{64}\right) &= \mathrm{P}\left(\widehat{P} \ge \frac{36 - 0,5}{64}\right) = \mathrm{P}(\widehat{P} \ge 0,5546875) \approx \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{0,5546875 - 0,5}{\sqrt{\dfrac{0,5 \times 0,5}{64}}}\right) \\
&= \mathrm{P}(Z \ge 0,875) = 0,5 - tab(0,875) \approx 0,5 - tab(0,88) = 0,5 - 0,3106 = 0,1894
\end{aligned}$$

Esse é um resultado que pode ocorrer por mero acaso, ou seja, não é um resultado não-usual.

4. Vamos considerar a população formada pelos passageiros que se apresentam para os voos dessa companhia. Então, $X \sim Bern(0,85)$ e temos uma amostra de tamanho $n = 400$. Como há 350 lugares, a companhia terá problemas se a proporção de pessoas na amostra que se

apresentarem for maior que $\frac{350}{400} = 0,875$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\widehat{P} > \frac{350}{400}\right) &= \mathrm{P}\left(\widehat{P} \geq \frac{351}{400}\right) = \mathrm{P}\left(\widehat{P} \geq \frac{350,5}{400}\right) = \mathrm{P}(\widehat{P} \geq 0,87625) \\
&\approx \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{0,87625 - 0,85}{\sqrt{\frac{0,85 \times 0,15}{400}}}\right) = \mathrm{P}(Z \geq 1,47) = 0,5 - tab(1,47) \\
&= 0,5 - 0,4292 = 0,0708
\end{aligned}
$$

Essa é uma probabilidade um pouco alta; talvez valha a pena a companhia rever a política de reservas e aceitar menos que 400 reservas.

Capítulo 5

Intervalos de Confiança

Neste capítulo, você aprenderá um método muito importante de estimação de parâmetros. Vimos, anteriormente, que a média amostral $\overline{X}$ é um bom estimador da média populacional μ. Mas vimos, também, que existe uma variabilidade nos valores de $\overline{X}$, ou seja, cada amostra dá origem a um valor diferente do estimador. Uma maneira de informar sobre esta variabilidade é através da *estimação por intervalos*.

Sendo assim, agora você aprenderá os seguintes conceitos e métodos:

- intervalo de confiança;
- margem de erro;
- nível de confiança;
- nível de significância;
- intervalo de confiança para a média de uma população $N\left(\mu; \sigma^2\right)$ com variância conhecida;
- intervalo de confiança para a média de uma população qualquer com base em grandes amostras.

Ideias Básicas

O objetivo central da Inferência Estatística é obter informações para uma população a partir do conhecimento de uma única amostra. Em geral, a população é representada por uma variável aleatória X, com função de probabilidade ou densidade de probabilidade f_X.

Dessa população, então, extrai-se uma amostra aleatória simples com reposição, que dá origem a um conjunto $X_1, X_2, \dots, X_n$ de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, todas com a mesma distribuição f_X. Se f_X depende de um ou mais parâmetros, temos que usar a informação obtida a partir da amostra para estimar esses parâmetros, de forma a conhecermos a distribuição.

Nos capítulos anteriores, por exemplo, vimos que a média amostral $\overline{X}$ é um bom estimador da média populacional μ, no sentido de que ela tende a "acertar o alvo" da verdadeira média populacional. Mas vimos, também, que existe uma variabilidade nos valores de $\overline{X}$, ou seja, cada amostra dá origem a um valor diferente do estimador. Para algumas amostras, $\overline{X}$ será maior que μ, para outras será menor e para outras será igual.

Na prática, temos apenas uma amostra e, assim, é importante que se forneça alguma informação sobre essa possível variabilidade do estimador. Ou seja, é importante informar o valor do estimador $\widehat{\theta}$ obtido com uma amostra específica, mas é importante informar, também, que o verdadeiro valor do parâmetro θ poderia estar em um determinado intervalo, digamos, no intervalo $[\widehat{\theta} - \epsilon, \widehat{\theta} + \epsilon]$. Dessa forma, informamos a nossa *margem de erro* no processo de estimação; essa margem de erro é consequência do processo de seleção aleatória da amostra.

O que vamos estudar agora é como obter esse intervalo, de modo a "acertar na maioria das vezes", isto é, vamos obter um procedimento que garanta que, na maioria das vezes (ou das amostras possíveis), o intervalo obtido conterá o verdadeiro valor do parâmetro θ. A expressão "na maioria das vezes" será traduzida como "probabilidade alta". Dessa forma, vamos lidar com afirmativas do seguinte tipo:

> **!** Com probabilidade alta (em geral, indicada por $1 - \alpha$), o intervalo
>
> $$\left[\widehat{\theta} - \text{erro}; \widehat{\theta} + \text{erro}\right]$$
>
> conterá o verdadeiro valor do parâmetro θ.

A interpretação correta de tal afirmativa é a seguinte: se $1 - \alpha = 0,95$, por exemplo, então isso significa que o procedimento de construção do intervalo é tal que em 95% das possíveis amostras, o intervalo $[\widehat{\theta}-$ erro; $\widehat{\theta}+$ erro$]$ obtido conterá o verdadeiro valor do parâmetro. Note que cada amostra resulta em um intervalo diferente; mas, em 95% das amostras, o intervalo contém o verdadeiro valor do parâmetro. Veja a **Figura 5.1** – dois dos intervalos não contêm o parâmetro θ.

O valor $1 - \alpha$ é chamado *nível de confiança* e o intervalo $[\widehat{\theta}-$ erro; $\widehat{\theta}+$ erro$]$ é chamado de *intervalo de confiança de nível de confiança* $1 - \alpha$, que muitas vezes será citado, de forma reduzida, como intervalo de confiança de $1 - \alpha$. O erro, ou margem de erro, será representado aqui pela letra grega epsilon ϵ.

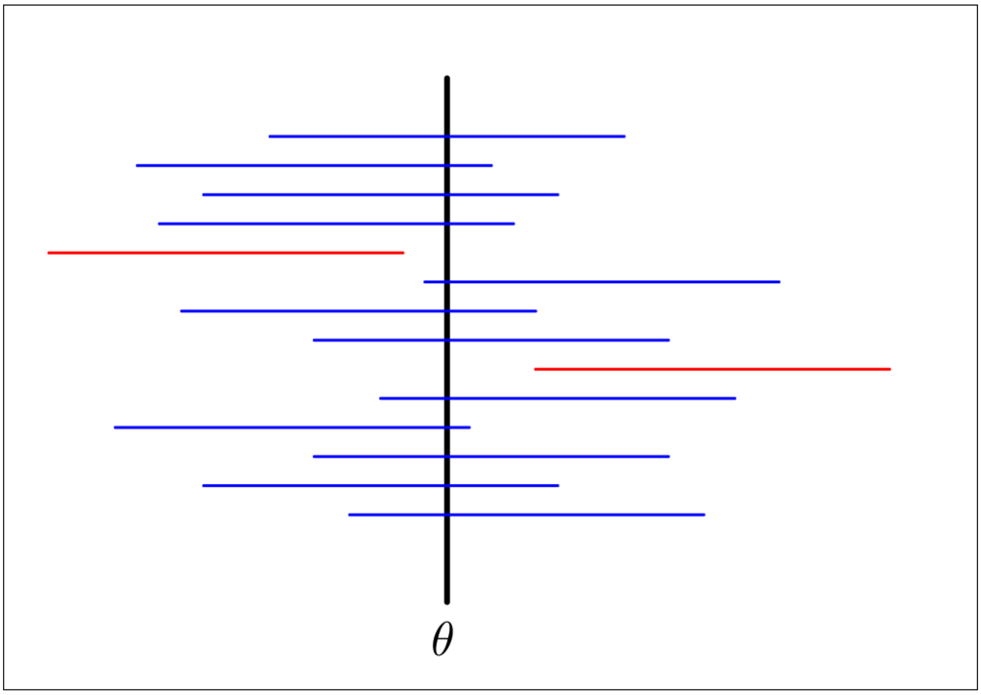


Figura 5.1 – Interpretando os intervalos de confiança

Tendo clara a interpretação do intervalo de confiança, podemos resumir a frase acima da seguinte forma:

$$\mathrm{P}\left(\theta \in \left[\widehat{\theta} - \epsilon; \widehat{\theta} + \epsilon\right]\right) = 1 - \alpha \tag{5.1}$$

Mais uma vez, a probabilidade se refere à probabilidade dentre as diversas possíveis amostras, ou seja, a probabilidade está associada à distribuição amostral do estimador $\widehat{\theta}$. Note que os limites do intervalo dependem de $\widehat{\theta}$, que depende da amostra sorteada, ou seja, os limites do intervalo de confiança são variáveis aleatórias (daí podemos falar em probabilidade). Cada amostra dá origem a um intervalo diferente, mas o procedimento de obtenção dos intervalos garante probabilidade $1 - \alpha$ de acerto.

Intervalo de Confiança para a Média de $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ - σ^2 Conhecida

Vamos agora, introduzir os métodos para obtenção do intervalo de confiança para a média de uma população. Como visto, a média populacional é um parâmetro importante, que pode ser muito bem estimado pela média amostral $\overline{X}$. Para apresentar as ideias básicas, vamos considerar um contexto que é pouco frequente na prática. O motivo para isso é que, em termos didáticos, a apresentação é bastante simples. Como o fundamento é o mesmo para contextos mais gerais, essa abordagem se justifica.

Consideremos uma população descrita por uma variável aleatória normal com média μ e variância σ^2, isto é, $X \sim N(\mu; \sigma^2)$. Vamos supor que o valor de σ^2 seja conhecido e que nosso interesse seja estimar a média μ a partir de uma amostra aleatória simples $X_1, X_2, \dots, X_n$. Como visto no Capítulo 2, Teorema 2.2, a distribuição amostral de $\overline{X}$ é normal com média μ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$, ou seja

$$X \sim N\left(\mu; \sigma^2\right) \Longrightarrow \overline{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Da definição de distribuição amostral, isso significa que os diferentes valores de $\overline{X}$ obtidos a partir das diferentes possíveis amostras se distribuem normalmente em torno de μ com variância $\frac{\sigma^2}{n}$.

Das propriedades da distribuição normal, resulta que

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0; 1)$$

ou equivalentemente,

$$Z = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0; 1) \tag{5.2}$$

Para completar a construção do intervalo de confiança, vamos apresentar a seguinte definição, ilustrada na Figura 5.2:

Definição 5.1 ***Valor crítico da normal*** *O* ***valor crítico*** *de $Z \sim N(0; 1)$ associado à probabilidade α é a abscissa z_α tal que*

$$\mathrm{P}(Z > z_\alpha) = \alpha$$

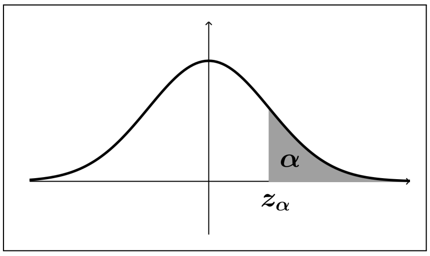


Figura 5.2 – Valor crítico z_α da $N(0; 1)$

Se considerarmos, agora, o valor crítico $z_{\alpha/2}$, conforme ilustrado na Figura 5.3, resulta que, se $Z \sim N(0; 1)$, então

$$\mathrm{P}\left(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \tag{5.3}$$

Mas isso vale para a distribuição normal padrão, em geral. Então, usando os resultados das Equações 5.2 e 5.3, obtemos que

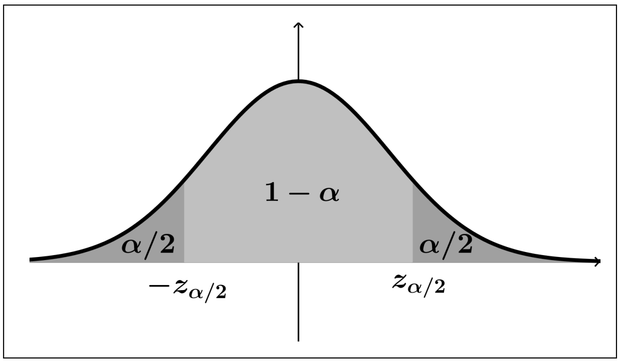


Figura 5.3 – Valor crítico $z_{\alpha/2}$ da $N(0;1)$

$$P\left(-z_{\alpha/2} \le \sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \le z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

o que é equivalente a

$$\begin{aligned} P\left(-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \overline{X}-\mu \le z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= 1-\alpha \Leftrightarrow \\ P\left(-\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le -\mu \le -\overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= 1-\alpha \Leftrightarrow \\ P\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= 1-\alpha \end{aligned} \tag{5.4}$$

Observe a expressão (5.4); ela nos diz que

$$P\left(\mu \in \left[\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\,\overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1-\alpha$$

Mas essa é exatamente a forma geral de um intervalo de confiança, conforme explicitado na Equação 5.1 (note que os limites são variáveis aleatórias!). Temos, então, a seguinte conclusão:

Definição 5.2 ***Intervalo de Confiança para a Média de $X \sim N(\mu;\sigma^2)$ - σ^2 Conhecida*** *Seja $X \sim N(\mu;\sigma^2)$ uma população, cuja variância σ^2 é conhecida. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é uma amostra aleatória simples dessa população, então o intervalo de confiança de nível de confiança $1-\alpha$ para a média populacional μ é dado por*

$$\left[\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\,\overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \tag{5.5}$$

em que $z_{\alpha/2}$ é o valor crítico da distribuição normal correspondente à probabilidade $\alpha/2$.

O intervalo de confiança para μ pode ser escrito na forma $[\overline{X}-\epsilon;\overline{X}+\epsilon]$, onde $\epsilon = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ é a *margem de erro*. Como visto, essa margem de erro está associada ao fato de que diferentes amostras fornecem diferentes valores de $\overline{X}$. As diferentes amostras fornecem diferentes intervalos de confiança, mas uma proporção de $100 \times (1-\alpha)\%$ desses intervalos irá conter o verdadeiro valor de μ. Note que aqui é fundamental a interpretação de probabilidade como frequência relativa: estamos considerando os diferentes intervalos que seriam obtidos, caso sorteássemos todas as possíveis amostras. Assim, o nível de confiança está associado à confiabilidade do processo de obtenção do intervalo: esse processo é tal que acertamos (isto é, o intervalo contém μ) em $100 \times (1-\alpha)\%$ das vezes. Na Figura 5.4 ilustra-se essa interpretação dos intervalos de confiança para uma população normal com variância 4 e tamanho de amostra $n = 16$. A distribuição normal padrão representa a distribuição de probabilidade dos valores de $\sqrt{16}\frac{\overline{X}-\mu}{2}$. Valores extremos de tal estatística levam a intervalos de confiança que não contêm o verdadeiro parâmetro, representados pelos intervalos em preto. Os valores centrais, que têm alta probabilidade $(1-\alpha)$ de ocorrência levam a intervalos que contêm o verdadeiro valor do parâmetro (intervalos em cinza).

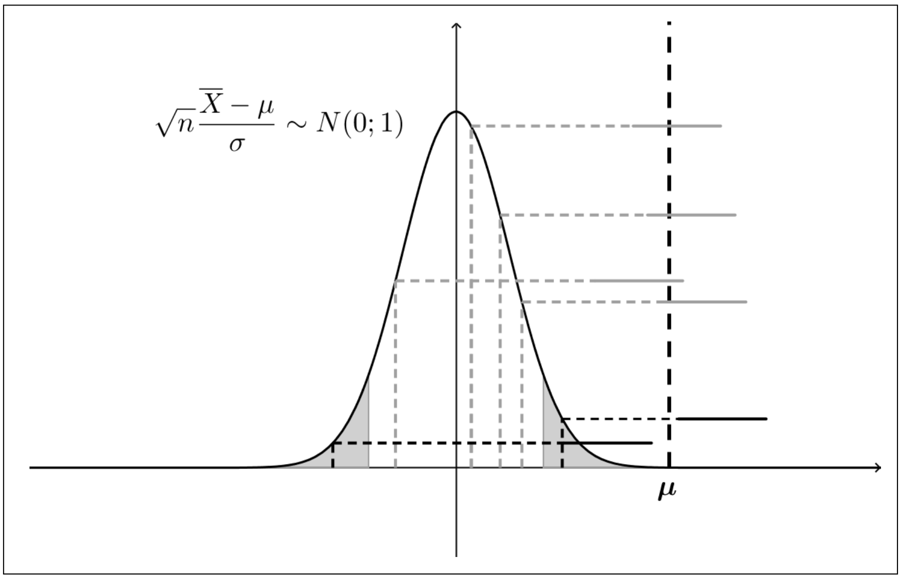


Figura 5.4 – Interpretação do IC para a média da $N(\mu;\sigma^2)$

Na prática, temos apenas *uma* amostra e o intervalo obtido com essa amostra específica, ou contém ou não contém o verdadeiro valor de μ. A afirmativa

$$\mathrm{P}\left(\mu \in \left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\,\overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1-\alpha$$

é válida porque ela envolve a variável aleatória $\overline{X}$, que assume diferentes valores para as diferentes amostras. Quando substituímos o estimador $\overline{X}$ por uma estimativa específica $\overline{x}$ obtida a partir de uma amostra particular, temos apenas um intervalo e não faz mais sentido falar em probabilidade.

Para ajudar na interpretação do intervalo de confiança, suponha que, com uma amostra de tamanho 25, tenha sido obtido o seguinte intervalo de confiança de 0,95:

$$\left[5 - 1,96 \times \frac{2}{\sqrt{25}}\,;\,5 + 1,96 \times \frac{2}{\sqrt{25}}\right] = [4,216;5,784]$$

Esse intervalo específico contém ou não contém o verdadeiro valor de μ e não temos condições de verificar o que é verdade. Mas o que sabemos é que, se repetíssemos o mesmo procedimento de sorteio de uma amostra aleatória simples da população e consequente construção do intervalo de confiança, 95% dos intervalos construídos conteriam o verdadeiro valor de μ.

Sendo assim, é *errado* dizer que há uma probabilidade de 0,95 de o intervalo específico $[4,216; 5,784]$ conter o verdadeiro valor de μ. Mas é certo dizer que, com probabilidade 0,95, o intervalo $\left[\overline{X} - 1,96 \times \frac{2}{\sqrt{25}};\ \overline{X} + 1,96 \times \frac{2}{\sqrt{25}}\right]$ contém μ. Note a variável aleatória $\overline{X}$ no limite do intervalo.

Exemplo 5.1 ***Pesos de homens adultos***

Em determinada população, o peso dos homens adultos é distribuído normalmente com um desvio padrão de 16kg. Uma amostra aleatória simples de 36 homens adultos é sorteada desta população, obtendo-se um peso médio de 78,2kg. Construa um intervalo de confiança de nível de confiança 0,95 para o peso médio de todos os homens adultos dessa população.

Solução:

Vamos inicialmente determinar o valor crítico associado ao nível de confiança de 0,95. Como $1 - \alpha = 0,95$, resulta que $\alpha = 0,05$ e $\alpha/2 = 0,025$.

Analisando a Figura 5.3, vemos que a probabilidade nas duas caudas da distribuição normal padrão é de 0,05; logo, em cada cauda, a probabilidade é 0,025. Em termos da Tabela 1, isso significa que a probabilidade entre 0 e $z_{0,025}$ é $(0,50 - 0,025) = 0,475$ e, assim, devemos procurar no corpo da tabela o valor de 0,475 para determinar a abscissa $z_{0,025}$. Veja a Figura 5.5.

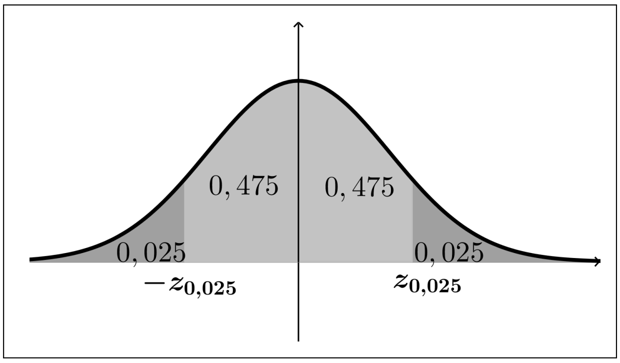


Figura 5.5 – Valor crítico $z_{0,025}$ da $N(0; 1)$

Procurando no corpo da tabela da distribuição normal padrão, vemos que o valor 0,475 corresponde à abscissa $z_{0,025} = 1,96$. Logo, nosso intervalo de confiança é

$$\left[78,2 - 1,96 \times \frac{16}{\sqrt{36}};\ \ 78,2 + 1,96 \times \frac{16}{\sqrt{36}}\right] = [72,9733;\ \ 83,4267]$$

Esse intervalo contém ou não o verdadeiro valor de μ, mas o procedimento utilizado para sua obtenção nos garante que há 95% de chance de estarmos certos, isto é, 95% dos intervalos construídos com esse método conteriam o verdadeiro valor de μ.

♦♦

Margem de erro

Vamos, agora, analisar a margem de erro do intervalo de confiança para a média de uma população normal com variância conhecida. Ela é dada por

$$\epsilon = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{5.6}$$

Lembrando que o erro padrão é o desvio padrão do estimador, podemos escrever

$$\epsilon = z_{\alpha/2} \, \mathrm{EP}_{\overline{X}} \tag{5.7}$$

Analisando a equação (5.6), vemos que a margem de erro depende diretamente do valor crítico e do desvio-padrão populacional e é inversamente proporcional à raiz quadrado do tamanho da amostra.

Na Figura 5.6 ilustra-se a relação de dependência da margem de erro com o desvio padrão populacional σ. Temos duas distribuições amostrais centradas na mesma média e baseadas em amostras de mesmo tamanho: $\overline{X}_1 \sim N\left(\mu; \frac{\sigma_1^2}{n}\right)$ e $\overline{X}_2 \sim N\left(\mu; \frac{\sigma_2^2}{n}\right)$ com $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$. Nas duas distribuições, a área total das caudas sombreadas é α, de modo que os intervalos limitados pelas linhas verticais são os intervalos de confiança de nível $1 - \alpha$, ou seja, a área central em ambas distribuições é $1 - \alpha$. Para a distribuição mais dispersa, isto é, com σ maior, o comprimento do intervalo é maior. Esse resultado deve ser intuitivo: se há mais variabilidade na população, a nossa margem de erro para estimação da média populacional tem que ser maior, mantidas fixas as outras condições (tamanho de amostra e nível de confiança).

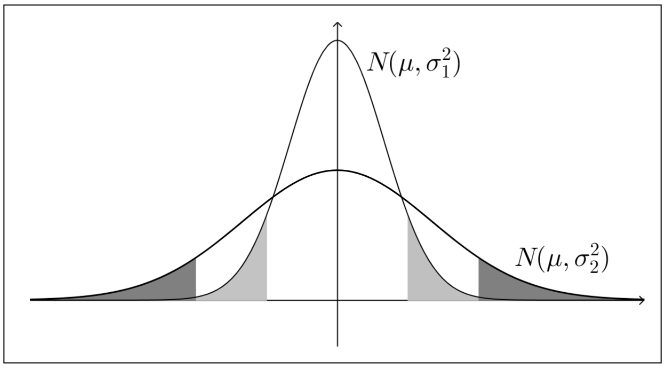


Figura 5.6 – Margem de erro versus dispersão populacional: $\sigma_1 < \sigma_2 \Rightarrow \epsilon_1 < \epsilon_2$

Por outro lado, se mantivermos fixos o tamanho da amostra e o desvio padrão populacional, é razoável, também, que a margem de erro seja maior para um nível de confiança maior. Ou seja, se queremos aumentar a probabilidade de acerto, é razoável que o intervalo seja maior. Aumentar a probabilidade de acerto significa aumentar o nível de confiança, o que acarreta em um valor crítico $z_{\alpha/2}$ maior. Veja a **Figura 5.7**, onde ilustra-se o intervalo de confiança para dois níveis de confiança diferentes: $1-\alpha_1 > 1-\alpha_2$. O primeiro intervalo é maior, refletindo o maior grau de confiança, ou seja, o preço que se paga por um nível de confiança maior é que o comprimento do intervalo de confiança também será maior.

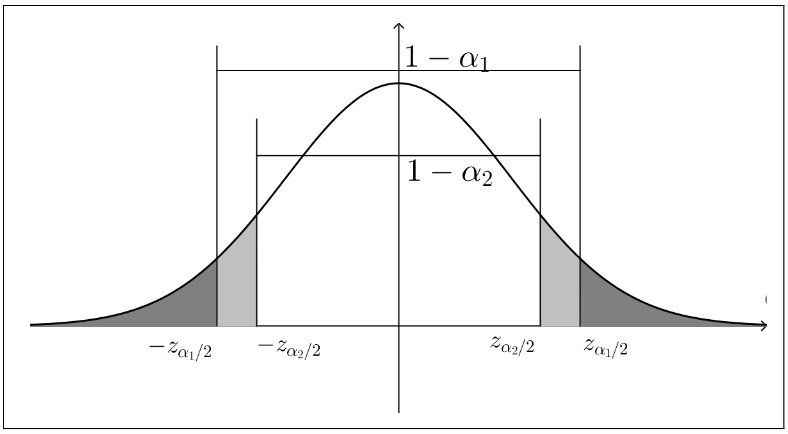


Figura 5.7 – Margem de erro versus nível de confiança: $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow (1-\alpha_1) > (1-\alpha_2) \Rightarrow \epsilon_1 > \epsilon_2$

Finalmente, mantidos o mesmo desvio padrão populacional e o mesmo nível de confiança, quanto maior o tamanho da amostra, menor será a margem de erro, mas a redução da margem de erro depende de $\sqrt{n}$; assim, para reduzir a margem de erro pela metade, teremos que quadruplicar o tamanho da amostra:

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n'}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n'} = 2\sqrt{n} \Rightarrow n' = 4n$$

Exemplo 5.2 ***Resultados de pesquisa***

Na divulgação dos resultados de uma pesquisa, publicou-se o seguinte texto (dados fictícios):

> *Com o objetivo de se estimar a média de uma população, estudou-se uma amostra de tamanho $n = 45$. De estudos anteriores, sabe-se que essa população é muito bem aproximada por uma distribuição normal com desvio padrão 3, mas acredita-se que a média tenha mudado desde esse último estudo. Com os dados amostrais obteve-se o intervalo de confiança* $[1,79; 3,01]$.

Quais são o as informações importantes que não foram divulgadas? Como podemos obtê-las?

Solução:

Quando se divulga um intervalo de confiança para um certo parâmetro, é costume publicar também a estimativa pontual. Nesse caso, temos que informar a média amostral $\overline{x}$, que pode ser achada observando-se que o intervalo de confiança é simétrico em torno de $\overline{x}$. Logo, $\overline{x}$ é o ponto médio do intervalo:

$$\overline{x} = \frac{1,79 + 3,01}{2} = 2,4$$

Daí conclui-se que a margem de erro é $\epsilon = 2,4 - 1,79 = 0,61$. Outra informação importante é o nível de confiança, que deve ser encontrado a partir da abscissa $z_{\alpha/2}$ na margem de erro:

$$0,61 = z_{\alpha/2} \times \frac{3}{\sqrt{45}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0,61 \times \sqrt{45}}{3} = 1,36$$

Consultando a tabela da distribuição normal, vemos que $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1,36) = 0,4131$. Logo, o nível de confiança é $2 \times 0,4131 = 0,8262 \approx 0,83$. Veja a Figura 5.8.

♦♦

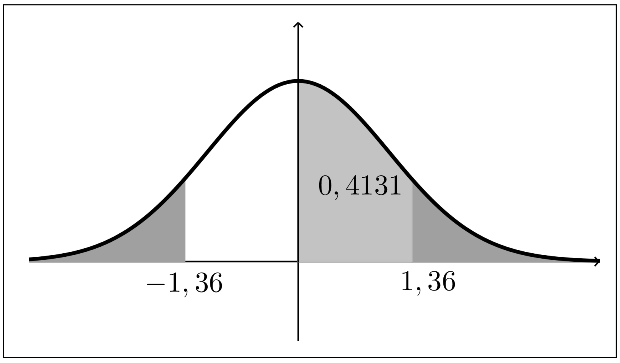


Figura 5.8 – Determinação do nível de confiança

Determinação do tamanho da amostra

No planejamento de pesquisas, é importante ter-se uma ideia do tamanho de amostra necessário. Analisando a equação (5.6), pode-se observar que, na estimação da média de uma população normal com variância conhecida, temos

$$\epsilon = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{n} = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\epsilon} \Longrightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\epsilon}\right)^2 \tag{5.8}$$

Assim, podemos determinar o tamanho da amostra necessário para valores pré estabelecidos da margem de erro e do nível de confiança. Note a relação entre o tamanho da amostra n e as três grandezas envolvidas: variância populacional, nível de confiança e margem de erro.

Exemplo 5.3 ***Tamanho de amostra***
Deseja-se estimar a média de uma população normal com nível de confiança de 90% e margem de erro máxima de 0,08. Qual deve ser o tamanho da amostra se a variância populacional conhecida é

(a) $\sigma^2 = 4$

(b) $\sigma^2 = 16$

Solução:

(a) $n_{\sigma=2} = \left(z_{0,05}\dfrac{2}{0,08}\right)^2 = \left(\dfrac{1,64 \cdot 2}{0,08}\right)^2 = 1681$

(b) $n_{\sigma=4} = \left(z_{0,05}\dfrac{4}{0,08}\right)^2 = \left(\dfrac{1,64 \cdot 4}{0,08}\right)^2 = 6724$

Note que a razão entre as variâncias populacionais é 4 e o mesmo ocorre com os tamanhos amostrais.

♦♦

Intervalo de confiança para a média com base em grandes amostras

Na seção anterior, vimos que o intervalo de confiança para a média de uma *população normal com variância conhecida* é dado por

$$\left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, ; \, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]. \tag{5.9}$$

Essa é uma situação teórica importante, mas com dificuldades práticas de aplicação, pois, em geral, é difícil termos fenômenos descritos exatamente por uma distribuição normal e, mais difícil ainda, que a variância de tal população seja conhecida. Mas tal situação tem um grande valor didático.

Estudamos, também, no Capítulo 3, o Teorema Limite Central que afirma que, para amostras grandes de uma população qualquer com média μ e variância σ^2,

$$Z = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \approx N(0;1) \tag{5.10}$$

Tal resultado nos permitiria obter, de forma análoga, o intervalo de confiança para μ, desde que conhecêssemos a variância σ^2. Esse intervalo teria a mesma forma dada em (5.9), mas com a diferença de que o nível de confiança seria aproximadamente (e não exatamente) $1 - \alpha$.

O que fazer se não conhecemos a variância σ^2? No Capítulo 1, vimos que $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ é um bom estimador para σ^2; em particular, ele é não-viesado. Uma outra propriedade importante é que S^2 é um *estimador consistente*, o que significa, de maneira informal, que seu valor se aproxima do verdadeiro valor de σ^2 à medida em que se aumenta o tamanho da amostra. Então, para grandes amostras, poderíamos pensar em substituir σ por S em 5.10. Isso, de fato, é possível, graças ao seguinte resultado:

Teorema 5.1
Para grandes amostras de uma população X com média μ e variância σ^2

$$Z = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{S} \approx N(0;1)$$

□

Esse teorema nos permite obter o intervalo de confiança para a média de uma população qualquer como

$$\left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\, ; \, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right] \tag{5.11}$$

O nível de confiança será apenas aproximadamente igual a $1 - \alpha$.

Exemplo 5.4 ***Pesos de adultos***

De determinada população, extrai-se uma amostra aleatória simples de 64 pessoas adultas com o objetivo de se estimar o peso médio das pessoas adultas. A amostra acusa peso médio de 78,2kg e desvio-padrão de 16,1kg. Construa um intervalo de confiança de nível de confiança 0,95 para o peso médio de todos os adultos dessa população.

Solução:

Já vimos em exemplos anteriores, que o valor crítico associado ao nível de confiança de 0,95 é 1,96. Não temos qualquer informação sobre a população (os valores dados referem-se à amostra), mas o tamanho da amostra é grande. Assim, o intervalo de confiança aproximado é

$$\left[78,2 - 1,96 \times \frac{16,1}{\sqrt{64}}\,;\ \ 78,2 + 1,96 \times \frac{16,1}{\sqrt{64}}\right] = [74,2555\,;\ \ 82,1445]$$

Como antes, esse intervalo contém ou não o verdadeiro valor de μ, mas o procedimento utilizado para sua obtenção nos garante que há, aproximadamente, 95% de chance de estarmos certos.

♦♦

Resumo

- Como existe uma variabilidade nos valores de um estimador $\widehat{\theta}$ ao longo das possíveis amostras, uma maneira de informar sobre esta variabilidade é através da estimação por intervalos de confiança. Esses intervalos, em geral, têm a forma $\left[\widehat{\theta} - \epsilon; \widehat{\theta} + \epsilon\right]$, em que ϵ é margem de erro.
- A obtenção de um intervalo de confiança é feita de modo que

$$\mathrm{P}\left(\theta \in \left[\widehat{\theta} - \epsilon; \widehat{\theta} + \epsilon\right]\right) = 1 - \alpha$$

  - ⋆ O valor $1 - \alpha$ é o nível de confiança.
  - ⋆ A probabilidade se refere à probabilidade dentre as diversas possíveis amostras, ou seja, a probabilidade está associada à distribuição amostral de $\widehat{\theta}$.
  - ⋆ Cada amostra dá origem a um intervalo diferente, mas o procedimento de obtenção dos intervalos garante probabilidade $1 - \alpha$ de acerto, ou seja, inclusão do verdadeiro valor do parâmetro.

- O intervalo de confiança, de nível de confiança $1 - \alpha$, para a média de uma população normal com variância conhecida é

$$\left[\overline{X} - \epsilon; \overline{X} + \epsilon\right]$$

  com a margem de erro sendo dada por

$$\epsilon = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

  em que $z_{\alpha/2}$ é o valor crítico da densidade normal padrão que deixa probabilidade $\alpha/2$ acima dele.

- Para grandes amostras de uma população qualquer, o intervalo de confiança, de nível de confiança aproximado $1-\alpha$, para a média é

$$\left[\overline{X}-\epsilon;\overline{X}+\epsilon\right]$$

com a margem de erro sendo dada por

$$\epsilon = z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

em que

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$$

Exercícios

1. De uma população $N(\mu;9)$ extrai-se uma amostra aleatória simples de tamanho 25, obtendo-se $\sum_{i=1}^{25} x_i = 60$. Obtenha o intervalo de confiança de 99% para a média da população.

2. Determine o tamanho da amostra necessário para se estimar a média de uma população normal com $\sigma = 4,2$ para que, com confiança de 95%, o erro máximo de estimação seja $\pm 0,05$.

3. O peso X de um certo artigo é descrito aproximadamente por uma distribuição normal com $\sigma = 0,58$. Uma amostra de tamanho $n = 25$ resultou em $\overline{x} = 2,8$. Obtenha o intervalo de confiança de $0,90$ para o peso médio desses artigos.

4. De uma população normal com $\sigma = 5$, retira-se uma amostra aleatória simples de tamanho 50, obtendo-se $\overline{x} = 42$.

   (a) Qual é a margem de erro para um nível de confiança de 95%?

   (b) Obtenha o intervalo de confiança de 95% para a média da população.

   (c) Para que a margem de erro seja ≤ 1, com probabilidade de acerto de 95%, qual deverá ser o tamanho mínimo da amostra?

5. Os valores da venda mensal de determinado artigo têm distribuição aproximadamente normal com desvio padrão de R$500,00. O gerente da loja afirma vender, em média, R$34.700,00. O dono da loja, querendo verificar a veracidade de tal afirmativa, seleciona uma amostra aleatória das vendas em determinado mês, obtendo os seguintes valores:

33.840,00	32.960,00	41.815,00
32.940,00	32.115,00	32.740,00
35.050,00	33.010,00	33.590,00
35.060,00		

(a) Obtenha o intervalo de confiança para a venda média mensal com nível de confiança de 95%.

(b) Obtenha o intervalo de confiança para a venda média mensal com nível de confiança de 99%.

(c) Em qual dos dois níveis de significância podemos afirmar que o gerente se baseou para fazer a afirmativa?

6. Uma amostra de 121 chamadas para o número 0800 da sua empresa revela duração média de 16,6 minutos e desvio padrão de 3,63 minutos.

   (a) Construa um intervalo de confiança de 90% para a duração média das chamadas desse serviço.

   (b) Você pretende encerrar esse serviço, a menos que a duração média das chamadas exceda 18 minutos. O que você pode concluir a partir desses dados?

7. A direção de um cinema está interessada em estimar o número médio de sacos de pipocas vendidos por sessão. Os registros levantados em 70 sessões escolhidas aleatoriamente revelam uma média de 54,98 sacos, com desvio padrão de de 12,7 sacos. Construa um intervalo de confiança de 92% para a média da população.

Solução dos Exercícios

1. É dado que $X \sim N(\mu; 9)$. Como $n = 25$, sabemos que

$$\overline{X} \sim N\left(\mu; \frac{9}{25}\right)$$

Com $1 - \alpha = 0,99$, temos que $\alpha = 0,01$ e $\alpha/2 = 0,005$. Assim, temos que procurar no corpo da tabela a abscissa correspondente ao valor $0,5 - 0,005 = 0,495$, o que nos dá $z_{0,005} = 2,58$. Então, a margem de erro é

$$\epsilon = 2,58 \times \frac{3}{5} = 1,548$$

Como a média amostral obtida é $\overline{x} = \frac{60}{25} = 2,4$, o intervalo de confiança de 99% é

$$[2,4 - 1,548\,;\, 2,4 + 1,548] = [0,852\,;\, 3,948]$$

2. Queremos $|\epsilon| \leq 0,05$, com $\sigma = 4,2$ e $1 - \alpha = 0,95$.

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Então

$$\epsilon = 1,96 \times \frac{4,2}{\sqrt{n}} \leq 0,05 \Rightarrow \sqrt{n} \geq \frac{1,96 \times 4,2}{0,05} = 164,64 \Rightarrow n \geq 27106,3296$$

Logo, o tamanho mínimo necessário é $n = 27107$.

3. É dado que $X \sim N(\mu; 0,58^2)$. Como $n = 25$, sabemos que

$$\overline{X} \sim N\left(\mu; \frac{0,58^2}{25}\right)$$

Com $1 - \alpha = 0,90$, temos que $\alpha = 0,10$ e $\alpha/2 = 0,05$. Assim, temos que procurar no corpo da tabela a abscissa correspondente ao valor $0,5 - 0,05 = 0,45$, o que nos dá $z_{0,05} = 1,64$. Então

$$\epsilon = 1,64 \times \frac{0,58}{\sqrt{25}} = 0,1902$$

Como a média amostral obtida é $\overline{x} = 2,8$ o intervalo de confiança de 90% de confiança é

$$[2,8 - 0,19024\,;\ 2,8 + 0,19024] = [2,60976\,;\ 2,99024]$$

4. $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{0,025} = 1,96$

   (a) A margem de erro é

   $$\epsilon = 1,96 \times \frac{5}{\sqrt{50}} = 1,3859$$

   (b) O intervalo de confiança de 95% é

   $$[42 - 1,\ 385\,9\,;\ 42 + 1,3859] = [40,\ 6141\,;\ 43,3859]$$

   (c) Temos que reduzir a margem de erro; logo, o tamanho da amostra terá que ser maior que 50.

   $$\epsilon = 1,96 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \leq 1 \Rightarrow \sqrt{n} \geq 1,96 \times 5 = 9,8 \Rightarrow n \qquad \geq 9,8^2 = 96,04$$

   Logo, n deve ser no mínimo igual a 97.

5. A média amostral é $\overline{x} = \frac{343.120}{10} = 34.312$.

   (a) A margem de erro é

   $$\epsilon = 1,96 \times \frac{500}{\sqrt{10}} = 309,9$$

   Logo, o intervalo de confiança de 95% é

   $$[34.312 - 309,9\,;\ 34.312 + 309,9] = [34.002,1\,;\ 34.621,9]$$

   (b) A margem de erro é

   $$\epsilon = 2,58 \times \frac{500}{\sqrt{10}} = 407,93$$

   Logo, o intervalo de confiança de 95% é

   $$[34.312 - 407,93\,;\ 34.312 + 407,93] = [33.904,07\,;\ 34.719,93]$$

   (c) O gerente deve estar usando o nível de confiança de 99%.

6. Amostra grande de uma população qualquer

   (a) O intervalo de confiança de nível aproximado de 90% é

$$\left[16,6 - 1,64 \times \frac{3,63}{\sqrt{121}}\,;\, 16,6 + 1,64 \times \frac{3,63}{\sqrt{121}}\right] = [16,0588\,;\, 17,1412]$$

   (b) Como o intervalo está totalmente abaixo de 18 minutos, há evidências de que o tempo médio seja menor que 18 minutos e, portanto, o serviço deve ser encerrado.

7. Amostra grande de uma população qualquer

$$1 - \alpha = 0,92 \Rightarrow z_{0,04} = 1,75$$

   O intervalo de confiança de nível aproximado de 92% é

$$\left[54,98 - 1,75 \times \frac{12,7}{\sqrt{70}}\,;\, 54,98 + 1,75 \times \frac{12,7}{\sqrt{70}}\right] = [52,3236\,;\, 57,6364]$$

Capítulo 6

Intervalos de Confiança Para Proporções – Amostras Grandes

No capítulo anterior, estudamos o método de estimação de uma média populacional por intervalo de confiança no caso, ou de população normal com variância conhecida, ou de amostra grande de uma população qualquer. A distribuição amostral da média amostral é, no primeiro caso, exatamente normal e, no segundo caso, apenas aproximadamente normal. Em ambos os casos, o intervalo de confiança tem a forma $\overline{X} \pm EP(\overline{X})$, sendo $EP(\overline{X})$ o erro padrão da média amostral, ou seja, o seu desvio padrão.

Usaremos, agora, o resultado visto no Capítulo 4, para construir o intervalo de confiança para uma proporção populacional.

Intervalo de Confiança para a Proporção Populacional

O contexto de interesse é o seguinte: temos uma população em que cada elemento é classificado de acordo com a presença ou ausência de determinada característica. O objetivo é estimar a proporção populacional p dos elementos que possuem tal característica. Vimos, no Capítulo 4, que a proporção amostral $\widehat{P}$ é um bom estimador para p e, também que, para grandes amostras,

$$\widehat{P} \approx N\left(p; \frac{p(1-p)}{n}\right).$$

ou equivalentemente

$$\frac{\widehat{P}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \approx N(0;1) \tag{6.1}$$

Vemos, então que o erro padrão de $\widehat{P}$ é

$$\mathrm{EP}(\widehat{P}) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \tag{6.2}$$

Como a distribuição amostral de $\widehat{P}$ é aproximadamente normal, o procedimento de construção do intervalo de confiança para a proporção populacional é totalmente análogo ao do intervalo de confiança para a média de uma população normal com variância conhecida, visto no capítulo anterior. Assim, usando o mesmo procedimento e a mesma notação, obtemos o intervalo de confiança de nível de confiança $1-\alpha$ como

$$\left(\widehat{P}-\epsilon\,;\,\widehat{P}+\epsilon\right)$$

em que

$$\epsilon = z_{\alpha/2}\cdot \mathrm{EP}(\widehat{P}) = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Definição 6.1 ***Intervalo de Confiança Para uma Proporção Populacional*** *Seja $X \sim Bern(p)$ uma população da qual se extrai uma amostra aleatória simples de tamanho suficientemente grande, isto é,*

- $n \geq 30$;
- $np \geq 5$;
- $n(1-p) \geq 5$.

Então, o intervalo de confiança para p de nível de confiança aproximado $1-\alpha$ é dado por

$$\left[\widehat{P}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\quad \widehat{P}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

em que $z_{\alpha/2}$ é o valor crítico da distribuição normal padrão correspondente à probabilidade $\alpha/2$.

Vamos analisar a expressão do erro padrão do estimador nas situações vistas até aqui:

$$\underbrace{\mathrm{EP}(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{X\sim N(\mu;\sigma^2)\,;\sigma \text{ conhecido}} \qquad \underbrace{\mathrm{EP}(\overline{X}) = \frac{S}{\sqrt{n}}}_{X\sim(\mu;\sigma^2);n \text{ grande}} \qquad \underbrace{\mathrm{EP}(\widehat{P}) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}_{X\sim Bern(p)}$$

Nos três casos, queremos estimar a média μ da população, sendo que no terceiro caso, $\mu = p$.

Analisando essas expressões, podemos ver uma diferença fundamental: o erro padrão da proporção amostral depende do parâmetro p que queremos estimar! Isso não ocorre nos outros 2 casos. No primeiro caso, estamos supondo σ conhecido e, no segundo caso, S depende da média amostral, e não da média populacional. Sendo assim, na prática, temos que estimar o erro padrão de $\widehat{P}$, substituindo p por alguma estimativa que denotaremos por $\widehat{p}_0$. Com tal estimativa, obtemos o erro padrão estimado da proporção amostral:

$$\widehat{EP}_{\widehat{P}} = \sqrt{\frac{\widehat{p}_0(1-\widehat{p}_0)}{n}} \tag{6.3}$$

e, para uma determinada amostra, o intervalo de confiança se torna

$$\left[\widehat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}_0(1-\widehat{p}_0)}{n}}\ ;\ \widehat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}_0(1-\widehat{p}_0)}{n}}\right]$$

Obtenção da estimativa $\widehat{p}_0$

Uma estimativa para p pode ser obtida de outras fontes, pesquisas similares ou de uma amostra piloto. Pode-se usar também a própria proporção amostral obtida com a amostra usada na construção do intervalo de confiança; nesse caso, temos que $\widehat{p}_0 = \widehat{p}$.

Uma outra abordagem, conservadora, consiste em usar o valor máximo possível para o erro padrão, dado o tamanho da amostra. Dessa forma, estamos trabalhando com a maior margem de erro possível, o que podemos chamar de *pior cenário*. Da expressão 6.2, vemos que, para um n fixo, o erro padrão depende diretamente de $p(1-p)$. Na **Figura 6.1**, temos o gráfico da função $g(p) = p(1-p)$ para valores de p no intervalo de interesse $[0, 1]$. Vemos que o máximo dessa função ocorre quando $p = 0,5$.

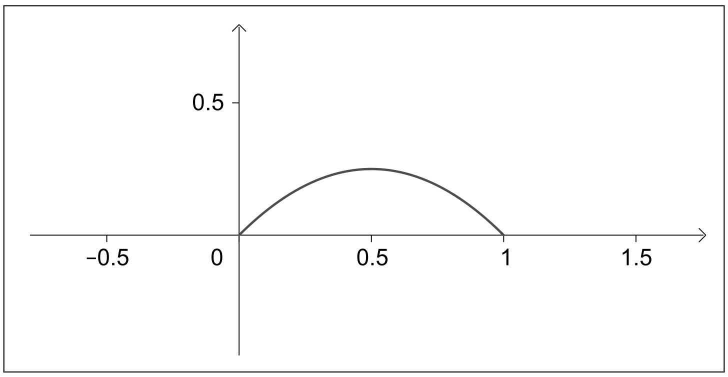


Figura 6.1 – Gráfico da função $p(1-p)$ para $0 \leq p \leq 1$

Assim, tomando $\widehat{p}_0 = 0,5$, o intervalo de confiança terá o maior comprimento possível para n e $1-\alpha$

fixos e sua expressão se torna

$$\left[\widehat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{n}}\ ;\ \widehat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{n}}\right] = \left[\widehat{p} - z_{\alpha/2}\frac{0,5}{\sqrt{n}}\ ;\ \widehat{p} + z_{\alpha/2}\frac{0,5}{\sqrt{n}}\right]$$

Exemplo 6.1

Um gerente de produção deseja estimar a proporção de peças defeituosas em uma de suas linhas de produção. Para isso, ele seleciona uma amostra aleatória simples de 100 peças dessa linha de produção, obtendo 30 defeituosas. Determine o intervalo de confiança para a verdadeira proporção de peças defeituosas nessa linha de produção com nível de confiança de 95%.

Solução:

O primeiro fato a observar é que a amostra é grande, com sucessos (30) e fracassos (70) suficientes, o que nos permite usar a aproximação normal. Com nível confiança de 95%, obtemos que $z_{0,025} = 1,96$. Como não temos estimativa prévia da proporção de defeituosas p, temos que usar a proporção amostral $\widehat{p} = 0,30$. Assim, a margem de erro é

$$\epsilon = 1,96 \times \sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{100}} = 0,0898$$

e o intervalo de confiança é

$$[0,30 - 0,0898\ ;\ 0,30 + 0,0898] = [0,2102; 0,3898]$$

Com a abordagem conservadora, a margem de erro é

$$\epsilon = 1,96 \times \frac{0,5}{\sqrt{100}} = 0,098$$

e o intervalo de confiança,

$$[0,30 - 0,098\ ;\ 0,30 + 0,098] = [0,202; 0,398]$$

♦♦

Determinação do tamanho da amostra

Como já visto, uma questão que se coloca frequentemente é: qual o tamanho da amostra necessário para se estimar uma proporção p com uma margem de erro ϵ e nível de confiança $1-\alpha$? Como já visto no caso de populações normais, a resposta vem da expressão da margem de erro:

$$\epsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\epsilon}$$

ou

$$n = [p(1-p)] \left(\frac{z_{\alpha/2}}{\epsilon} \right)^2$$

Vemos, então, que n é diretamente proporcional a $p(1-p)$, ou seja, quanto maior $p(1-p)$, maior será o tamanho da amostra n. Como já visto, na prática, não conhecemos p (na verdade, estamos querendo estimar esse parâmetro). Então, para determinar o tamanho de amostra necessário para uma margem de erro e um nível de confiança dados, podemos considerar o pior caso, ou seja, podemos tomar o maior valor possível que, como já visto, ocorre quando $p = 0,5$. Caso esteja disponível alguma informação auxiliar, a mesma poderá ser usada para aprimorar a estimativa do tamanho amostral. Voltando à Figura 6.1, vemos que, quanto mais próxima de 0,5 for a estimativa prévia de p, maior será o tamanho da amostra.

Exemplo 6.2

Para estudar a viabilidade de lançamento de um novo produto no mercado, o gerente de uma grande empresa contrata uma firma de consultoria estatística para estudar a aceitação do produto entre os clientes potenciais. O gerente deseja obter uma estimativa com erro máximo de 1% com probabilidade de 80% e pede ao consultor estatístico que forneça o tamanho de amostra necessário.

(a) De posse das informações dadas, o consultor calcula o tamanho da amostra necessário no pior cenário. O que significa "pior cenário" nesse caso? Qual é o tamanho de amostra obtido pelo consultor?

(b) O gerente acha que o custo de tal amostra seria muito alto e autoriza o consultor a realizar um estudo piloto com uma amostra de 100 pessoas para obter uma estimativa da verdadeira proporção. O resultado desse estudo piloto é uma estimativa $\widehat{p} = 0,76$ de aceitação do novo produto. Com base nessa estimativa, o consultor recalcula o tamanho da amostra necessário. Qual é esse tamanho?

(c) Selecionada a amostra com o tamanho obtido no item anterior, obteve-se uma proporção de 72% de clientes favoráveis ao produto. Construa um intervalo de confiança para a verdadeira proporção com nível de confiança de 90%.

Solução:

(a) O pior cenário é quando a população está dividida meio-a-meio em suas preferências, ou seja, quando $p = 0,5$. Com nível de confiança de 80%, obtemos $z_{0,10} = 1,28$. Nesse caso,

$$0,01 = 1,28 \times \sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{1,28}{0,01} \right)^2 \times 0,25 = 4096$$

(b) Vamos agora utilizar $\widehat{p}_0 = 0,76$:

$$\begin{aligned} 0,01 &= 1,28 \times \sqrt{\frac{0,76 \times 0,24}{n}} \Longrightarrow \\ n &= \left(\frac{1,28}{0,01}\right)^2 \times 0,76 \times 0,24 = 2988,4 \end{aligned}$$

ou seja, $n = 2989$

(c) $1 - \alpha = 0,90 \Longrightarrow z_{0,05} = 1,64$

$$\epsilon = 1,64 \times \sqrt{\frac{0,72 \times 0,28}{2989}} = 0,0135$$

e o intervalo de confiança é

$$[0,72 - 0,0135; 0,72 + 0,0135] = [0,7065; 0,7335]$$

♦♦

Exemplo 6.3
Uma associação de estudantes universitários de uma grande universidade deseja saber a opinião dos alunos sobre a proposta da reitoria a respeito do preço do bandejão. Para isso, seleciona aleatoriamente uma amostra de 200 estudantes, dos quais 120 são favoráveis à proposta da reitoria.

(a) Construa um intervalo de confiança para a verdadeira proporção de alunos favoráveis à política da reitoria, com nível de confiança 98%.

(b) Qual é a margem de erro?

(c) Qual deverá ser o tamanho da amostra para se ter um erro de, no máximo, 5% com nível de confiança de 98%?

Solução:

(a) Com nível de confiança de 98%, resulta que $z_{0,01} = 2,33$. Com 120 estudantes favoráveis dentre 200, temos que $\widehat{p} = \frac{120}{200} = 0,6$. Logo

$$\epsilon = 2,33 \times \sqrt{\frac{0,6 \times 0,4}{200}} = 0,0807$$

e o intervalo de confiança é

$$[0,6 - 0,0807; 0,6 + 0,0807] = [0,5193; 0,6807]$$

(b) A margem de erro é $\epsilon = 0,0807$.

(c) Queremos, agora, reduzir a margem de erro para 5%, mantendo o mesmo nível de confiança. Certamente teremos que aumentar o tamanho da amostra:

$$\begin{aligned}
\epsilon \leq 0,05 &\Rightarrow 2,33 \times \sqrt{\frac{0,6 \times 0,4}{n}} \leq 0,05 \Rightarrow \\
\sqrt{n} &\geq \frac{2,33}{0,05} \times \sqrt{0,6 \times 0,4} \Rightarrow \\
n &\geq \left(\frac{2.33}{0.05}\right)^2 \times 0.6 \times 0.4 \Rightarrow n \geq 522
\end{aligned}$$

Se usássemos o pior cenário, isto é, $p = 0,5$ teríamos de ter

$$\begin{aligned}
n &\geq \left(\frac{2.33}{0.05}\right)^2 \times 0.25 \Rightarrow \\
n &\geq 543
\end{aligned}$$

♦♦

Resumo

- Para amostras suficientemente grandes ($n \geq 30$) e com sucessos e fracassos suficientes ($np \geq 5$ e $n(1-p) \geq 5$), o Teorema Limite Central estabelece que

$$\frac{\widehat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \approx N(0; 1)$$

- A margem de erro do intervalo de confiança para a proporção populacional é

$$\epsilon = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = z_{\alpha/2} EP(\widehat{P})$$

onde $z_{\alpha/2}$ é o valor crítico da densidade normal padrão correspondente à probabilidade $\alpha/2$.

- Como a margem de erro depende do parâmetro a ser estimado, é necessário utilizar alguma estimativa $\widehat{p}_0$ no cálculo da margem de erro. Essa estimativa pode ser alguma estimativa prévia, a própria estimativa usada na construção do intervalo de confiança ou o valor correspondente ao pior cenário, $\widehat{p}_0 = 0,5$. Assim, o intervalo de confiança estimado para a proporção populacional p é dado por

$$\left[\widehat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}_0(1-\widehat{p}_0)}{n}} \,;\, \widehat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}_0(1-\widehat{p}_0)}{n}}\right]$$

- Na determinação do tamanho amostral necessário para se obter determinada margem de erro ao nível de confiança $1 - \alpha$, podemos usar o pior cenário, que corresponde a uma população dividida ao meio, isto é, $p = 0,5$. Neste caso, o tamanho amostral é dado por

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{\epsilon}\right)^2 p(1-p) = \frac{1}{4}\left(\frac{z_{\alpha/2}}{\epsilon}\right)^2$$

Exercícios

1. Construa um intervalo de confiança para a proporção populacional em cada um dos casos listados a seguir:

   (a) $n = 600, 1 - \alpha = 98\%$, Número de "sucessos" na amostra: $= 128$.

   (b) $n = 1200, 1 - \alpha = 0,90\%$, Número de "sucessos" na amostra $= 710$, estimativa prévia $\widehat{p}_0 = 0,55\%$.

2. Uma amostra de 300 habitantes de uma grande cidade revelou que 180 desejavam a fluoração da água. Encontre o intervalo de confiança para a verdadeira proporção dos que não desejam a fluoração da água:

   (a) para um nível de confiança de 95%;

   (b) para um nível de confiançaa de 96%.

3. Em uma pesquisa de mercado, 57 das 150 pessoas entrevistadas afirmaram que comprariam determinado produto sendo lançado por uma empresa. Essa amostra é suficiente para se estimar a verdadeira proporção de futuros compradores, com margem de erro de 0,08 e nível de confiança de 90%? Em caso negativo, calcule o tamanho de amostra necessário.

4. Uma amostra aleatória simples de 400 itens forneceu 100 itens correspondentes ao evento "sucesso".

   (a) Qual é a estimativa pontual $\widehat{p}$ para a verdadeira proporção de "sucessos"na população?

   (b) Qual é o erro padrão estimado de $\widehat{P}$?

   (c) Calcule o intervalo de confiança para a verdadeira proporção de "sucessos"na população com nível de confiança de 80%.

5. Em uma sondagem, uma estimativa preliminar de "sucessos" em uma população é de 0,35. Que tamanho deve ter uma amostra para fornecer um intervalo de confiança de 95% com uma margem de erro de 0,05?

Solução dos Exercícios

1. (a) $1 - \alpha = 98\% \Rightarrow z_{0,01} = 2,33$

   $\widehat{p} = \frac{128}{600} = 0,2133$

   $$\epsilon = 2,33 \times \sqrt{\frac{0,2133(1 - 0,2133)}{600}} = 0,03897$$

   e o intervalo de confiança é

   $$[0,2133 - 0,03897; 0,2133 + 0,03897] = [0,17433; 0,25227]$$

(b) $1-\alpha = 90\% \Rightarrow z_{0,05} = 1,64$
$\widehat{p} = \frac{710}{1200} = 0,59167$

$$\epsilon = 1,64 \times \sqrt{\frac{0,55 \times 0,45}{1200}} = 0,02355$$

e o intervalo de confiança é

$$[0,59167 - 0,02355;\;\; 0,59167 + 0,02355] = [0,56812;\;\; 0,61522]$$

2. O problema pede a estimativa para a proporção dos que não querem a fluoração; logo, $\widehat{p} = \frac{120}{300} = 0,4$

(a) $1-\alpha = 95\% \Rightarrow z_{0,025} = 1,96$

$$\epsilon = 1,96 \times \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{300}} = 0,05544$$

e o intervalo de confiança é

$$[0,4 - 0,05544; 0,4 + 0,05544] = [0,34456; 0,45544]$$

(b) $1-\alpha = 96\% \Rightarrow z_{0,02} = 2,05$

$$\epsilon = 2,05 \times \sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{300}} = 0,05798$$

e o intervalo de confiança é

$$[0,4 - 0,05798; 0,4 + 0,05798] = [0,34202; 0,45798]$$

3. $\widehat{p} = \frac{57}{150} = 0,38$. Para uma margem de erro de 0,08 e um nível de confiança de 90%, o tamanho da amostra teria que ser

$$n \geq \left(\frac{1,64}{0,08}\right)^2 \times 0,38 \times 0,62 = 99,011$$

Como o tamanho da amostra é 150, essa amostra é suficiente.

4. (a) $\widehat{p} = \frac{100}{400} = 0,25$
(b) $EP(\widehat{P}) = \sqrt{\frac{0,25 \times 0,75}{400}} = 0,02165$
(c) $1-\alpha = 0,80 \Rightarrow z_{0,1} = 1,28$

$$[0,25 - 1,28 \times 0,02165; 0,25 + 1,28 \times 0,02165] = \\ [0,22229; 0,27771]$$

5. $\widehat{p}_0 = 0,35$

$$n \geq \left(\frac{1,96}{0,05}\right)^2 \times 0,35 \times 0,65 = 349,59 n \geq 350$$

.

Capítulo 7

Testes de Hipóteses – Conceitos Básicos

Na teoria de estimação, vimos que é possível, por meio de estatísticas amostrais adequadas, estimar parâmetros de uma população, dentro de um certo intervalo de confiança. Nos testes de hipóteses, em vez de se construir um intervalo de confiança no qual se espera que o parâmetro da população esteja contido, testa-se a validade de uma afirmação sobre um parâmetro da população. Então, em um teste de hipótese, procura-se tomar decisões a respeito de uma população com base em informações obtidas de amostras desta mesma população.

Neste capítulo, você aprenderá os seguintes conceitos:

- hipóteses nula e alternativa;
- erros tipo I e II;
- estatística de teste;
- regra de decisão;
- região crítica;

Noções Básicas

Vamos trabalhar com alguns exemplos para ilustrar os conceitos básicos de que precisamos para construir testes de hipóteses estatísticos.

Exemplo 7.1 ***Anéis de vedação***
Uma empresa compra anéis de vedação de dois fabricantes. Segundo informações dos fabricantes,

os anéis do fabricante 1 têm diâmetro médio de 14 mm com desvio padrão de 1,2 mm e os anéis do fabricante 2 têm diâmetro médio de 15 mm com desvio padrão de 2,0 mm. Ambos os processos de produção geram anéis com diâmetros cuja distribuição é aproximadamente normal.

Uma caixa com 16 anéis sem identificação é encontrada pelo gerente do almoxarifado. Embora ele suspeite que a caixa seja oriunda do fabricante 2, decide fazer uma medição dos anéis e basear sua decisão no diâmetro médio da amostra: se o diâmetro médio for maior que 14,5 mm, ele identificará a caixa como oriunda do fabricante 2; caso contrário, ele identificará a caixa como vinda do fabricante 1.

Solução:

Esse é um problema típico de decisão empresarial. Vamos analisar esse processo decisório sob o ponto de vista estatístico, estudando os possíveis erros e suas probabilidades de ocorrência. A característica de interesse dos parafusos é o seu diâmetro, que é uma variável aleatória; vamos representar tal variável por X.

Uma primeira observação é que existem apenas duas possibilidades para a origem dos anéis de vedação. Essas possibilidades, no contexto de teste de hipóteses, são chamadas *hipóteses*. Como ele suspeita que a caixa venha do fabricante 2, essa será nossa hipótese principal, a qual chamaremos de *hipótese nula* e representaremos por H_0. A outra hipótese será chamada de *hipótese alternativa* e a representaremos por H_1. Mais adiante veremos como estabelecer as hipóteses nula e alternativa em contextos mais complexos. Temos, então, as seguintes hipóteses:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \text{ anéis vêm do fabricante 2} \\
H_1 &: \text{ anéis vêm do fabricante 1}
\end{aligned}
$$

Em termos das variável aleatória X, podemos estabelecer essas hipóteses como

$$
\begin{aligned}
H_0 &: X \sim N(15; 2,0^2) \\
H_1 &: X \sim N(14; 1,2^2)
\end{aligned}
$$

Um outro elemento fundamental nesse processo de decisão é a regra de decisão que, no contexto estatístico, é sempre formulada em termos da hipótese nula: podemos rejeitar ou não rejeitar H_0. No caso do gerente, a regra de decisão é baseada na média amostral $\overline{X}$ e tem um caráter conservador: o gerente decidirá por um dos dois fabricantes se o diâmetro médio da amostra estiver mais próximo do diâmetro médio dos parafusos produzidos por aquele fabricante. Note que 14,5 está a meio caminho dos diâmetros médios dos dois fabricantes. Como dito, nossa decisão deve ser expressa sempre em termos de H_0. Logo, a regra de decisão é

$$
\begin{aligned}
\overline{X} \leq 14,5 &\Longrightarrow \text{ rejeito } H_0 \\
\overline{X} > 14,5 &\Longrightarrow \text{ não rejeito } H_0
\end{aligned}
$$

A regra de decisão leva a um conjunto de valores de $\overline{X}$ que resultam na rejeição de H_0. No exemplo, qualquer valor observado $\overline{x}$ no intervalo $(-\infty; 14,5]$ leva à rejeição de H_0. Esse intervalo recebe o nome de *região crítica* ou *região de rejeição*, que indicaremos por RC. Então, no exemplo, $RC = (-\infty; 14,5]$.

Há dois erros associados a essa regra de decisão, que são decidir pelo fabricante 2, quando, na verdade, os parafusos vêm do fabricante 1, ou reciprocamente, decidir pelo fabricante 1, quando os parafusos vêm do fabricante 2. Em termos da hipótese nula, esses erros são traduzidos e rotulados como

$$\begin{aligned} \text{Erro I} &: \text{rejeitar } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ é verdadeira} \\ \text{Erro II} &: \text{ não rejeitar } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ é falsa} \end{aligned}$$

Se H_0 é verdadeira, a amostra vem de uma população normal com média 15 e desvio padrão 2,0. Nesse caso, a média amostral com base em amostras de tamanho 16 é também normal com média 15 e desvio padrão $\frac{2,0}{\sqrt{16}} = 0,5$.

Se H_0 é falsa, a amostra vem de uma população normal com média 14 e desvio padrão 1,2 e a média amostral com base em amostras de tamanho 16 é também normal com média 14 e desvio padrão $\frac{1,2}{\sqrt{16}} = 0,3$.

Podemos, então, calcular as probabilidades associadas aos dois erros, que podem ser expressas em termos de probabilidade condicional como:

$$\mathrm{P}(\text{Erro } I) = \mathrm{P}\left(\underbrace{\text{rejeitar } H_0}_{\overline{X} \leq 14,5} | \underbrace{H_0 \text{ verdadeira}}_{\overline{X} \sim N(15;0,0,25)}\right) = \mathrm{P}\left[\overline{X} \leq 14,5 | \overline{X} \sim N\left(15; 0,5^2\right)\right]$$

$$\mathrm{P}(\text{Erro } II) = \mathrm{P}\left(\underbrace{\text{não rejeitar } H_0}_{\overline{X} > 14,5} | \underbrace{H_0 \text{ falsa}}_{\overline{X} \sim N(14;0,09)}\right) = \mathrm{P}\left[\overline{X} > 14,5 | \overline{X} \sim N\left(14; 0,3^2\right)\right]$$

Na **Figura 7.1**, a probabilidade associada ao erro I corresponde à área sombreada de cinza-escuro, enquanto a área sombreada de cinza-claro corresponde à probabilidade do erro tipo II.

Vamos calcular essas probabilidades. Em geral, a probabilidade do erro tipo I é denotada por

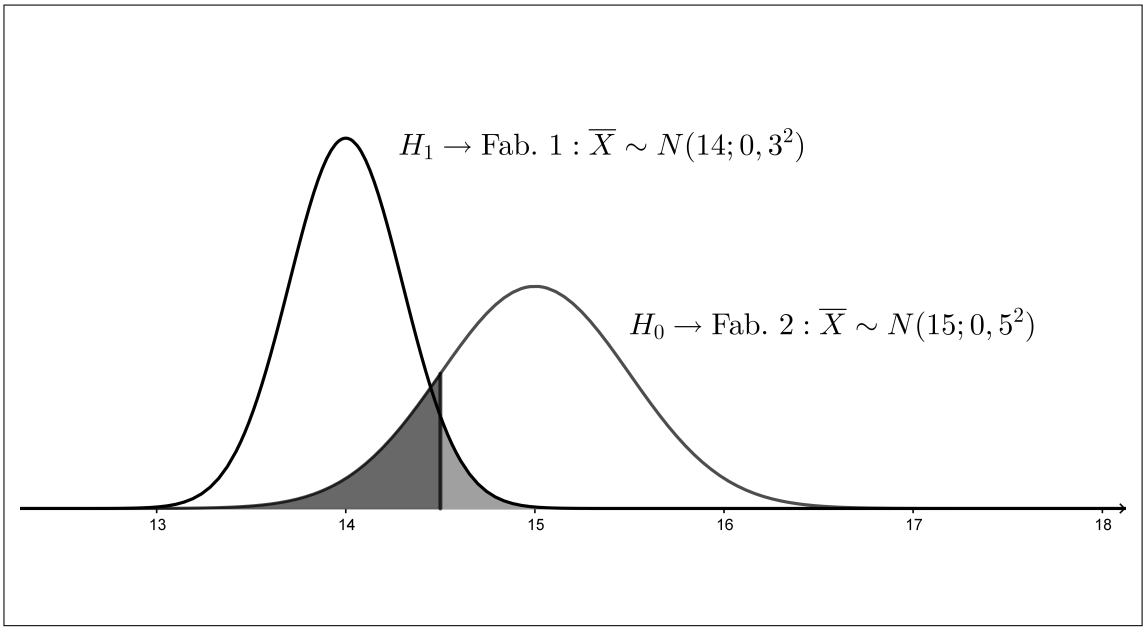


Figura 7.1 – Probabilidades dos erros I e II para o Exemplo 7.1

α e a probabilidade do erro tipo II por β. Assim,

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \mathrm{P}(\text{Erro I}) = \mathrm{P}\left[\overline{X} \leq 14,5 | \overline{X} \sim N\left(15; 0,5^2\right)\right] \\
&= \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{14,5-15}{0,5}\right) = \mathrm{P}(Z \leq -1,00) = \mathrm{P}(Z \geq 1,00) \\
&= 0,5 - tab(1,00) = 0,5 - 0,3413 = 0,1587
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta &= \mathrm{P}(\text{Erro II}) = \mathrm{P}\left[\overline{X} > 14,5 || \overline{X} \sim N\left(14; 0,3^2\right)\right] \\
&= \mathrm{P}\left(Z > \frac{14,5-14}{0,3}\right) = \mathrm{Pr}(Z > 1,67) \\
&= 0,5 - tab(1,67) = 0,5 - 0,4525 = 0,0475
\end{aligned}
$$

Podemos resumir os resultados do exemplo no seguinte quadro:

		Gerente decide que origem é do	
		Fabricante 1	Fabricante 2
Fabricante	2	Erro I ($\alpha = 0,15866$)	OK
Verdadeiro	1	OK	Erro II ($\beta = 0,04746$)

Quando falamos da probabilidade do erro ou mesmo da regra de decisão em termos gerais, estamos considerando o procedimento decisório geral. Como esse procedimento depende da amostra sorteada, temos que expressar as probabilidades dos erros e a regra de decisão levando em conta as possíveis amostras, ou seja, temos que levar em conta a variável aleatória $\overline{X}$ que descreve a média amostral de uma possível amostra aleatória simples de tamanho n.

No exemplo, a regra de decisão geral é: se $\overline{X} > 14,5$, o gerente classifica como produção do fabricante 2. Assim, por exemplo se a caixa em questão tiver uma média $\overline{x} = 14,4$, o gerente classificará a caixa como produzida pelo fabricante 1. Lembre-se de que usamos letras minúsculas para representar o valor observado de uma variável aleatória.

♦♦

Exemplo 7.2 ***Anéis de vedação - continuação***

Suponha, no exemplo anterior, que o gerente ache a probabilidade do erro I muito alta e decida mudar a regra de decisão de modo que essa probabilidade passe a ser 0,05. Qual deve ser a nova regra de decisão?

Solução:

Analisando a Figura 7.1, podemos ver que k tem que ser menor que 14,5.

$$\alpha = 0,05 \Leftrightarrow \mathrm{P}\left[\overline{X} \leq k \,|\, \overline{X} \sim N\left(15; 0,5^2\right)\right] = 0,05 \Leftrightarrow$$
$$\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{k-15}{0,5}\right) = 0,05 \Leftrightarrow 0,5 - tab\left(-\frac{k-15}{0,5}\right) = 0,05 \Leftrightarrow tab\left(-\frac{k-15}{0,5}\right) = 0,45 \Leftrightarrow$$
$$-\frac{k-15}{0,5} = 1,64 \Leftrightarrow k = 14,18$$

♦♦

O procedimento de se fixar a probabilidade α do erro tipo I é o mais utilizado pois, em geral, na prática, a situação não é tão simples como a escolha entre apenas duas decisões. Assim, a região crítica é definida de modo a se ter uma probabilidade pequena para o erro tipo I. Valores comuns para α são 0,05 ou mesmo 0,01.

A título de ilustração, suponha, nos dois exemplos anteriores, que a empresa compre anéis de diversos fabricantes mas, pelas características de produção do fabricante 2, os anéis produzidos por ele sejam especiais para a empresa. Assim, é importante identificar corretamente a origem, caso eles sejam oriundos do fabricante 2. Nesta situação, nossas hipóteses passariam a ser:

$$H_0: \text{ anéis são produzidos pelo fabricante 2}$$
$$H_1: \text{ anéis não são produzidos pelo fabricante 2}$$

Fixado o valor da probabilidade α, podemos definir a região crítica. A diferença fundamental aqui está no cálculo da probabilidade do erro tipo II: não existe um único valor de β. já que, sob H_1, a distribuição pode ter qualquer média.

Conceitos básicos

O contexto em que se baseia a teoria de teste de hipótese é basicamente o mesmo da teoria de estimação por intervalo de confiança. Temos uma população representada por uma variável aleatória X cuja distribuição de probabilidade depende de algum parâmetro θ. O interesse agora está em testar a veracidade de alguma afirmativa sobre θ.

Hipóteses nula e alternativa

A hipótese nula, representada por H_0, é a hipótese básica que queremos testar. Nesse texto consideraremos apenas hipóteses nulas simples, isto é, hipóteses que estabelecem que o parâmetro de interesse é *igual* a um determinado valor. A forma geral é:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

Alguns exemplos são:

$$H_0 : \mu = 6 \qquad H_0 : p = 0,5 \qquad H_0 : \sigma^2 = 25$$

O procedimento de teste de hipótese resultará em uma *regra de decisão* que nos permitirá *rejeitar* ou *não rejeitar* H_0.

A *hipótese alternativa*, representada por H_1, é a hipótese que devemos considerar no caso de rejeição da hipótese nula. A forma mais geral de H_1 é a hipótese *bilateral*

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Em algumas situações, podemos ter informação que nos permita restringir o domínio da hipótese alternativa. Por exemplo, se uma empresa farmacêutica está testando um novo medicamento para enxaqueca no intuito de reduzir o tempo entre a ingestão do medicamento e o alívio dos sintomas, uma possível hipótese alternativa é

$$H_1 : \mu < 10$$

Temos, então, hipóteses unilaterais à esquerda

$$H_1 : \theta < \theta_0$$

e hipóteses unilaterais à direita:

$$H_1 : \theta > \theta_0$$

A escolha entre essas formas de hipótese alternativa se faz com base no conhecimento sobre o problema sendo considerado e deve ser feita *antes* de se ter o resultado da amostra.

Nesse texto consideraremos o seguinte procedimento prático para determinação das hipóteses nula e alternativa.

> "Traduza" a afirmação do problema como uma desigualdade. Faça o mesmo para a afirmação que é a sua negação. A desigualdade que ***não*** envolver o sinal de = será a hipótese alternativa e a hipótese nula será sempre do tipo $\theta = \theta_0$.

Exemplo 7.3 ***Determinação de*** H_0 ***e*** H_1
Considerando as seguintes afirmativas como parte de um problema de teste de hipóteses, determine as hipóteses nula e alternativa apropriadas.

(a) O tempo médio é de, no máximo, 15 minutos

(b) Há, em média, pelo menos 15 clientes.

(c) A proporção de clientes tem de ser pelo menos 60%.

(d) A proporção de defeituosos tem de ser menor que 5%.

(e) O comprimento médio tem de ser 10cm.

Solução:

(a) Afirmativa dada: $\mu \leq 15$
Complementar: $\mu > 15$
A desigualdade que não contém o sinal de = ($\mu > 15$) torna-se a hipótese alternativa:

$$H_0 : \mu = 15$$
$$H_1 : \mu > 15$$

(b) Afirmativa dada: $\mu \geq 15$
Complementar: $\mu < 15$

$$H_0 : \mu = 15$$
$$H_1 : \mu < 15$$

(c) Afirmativa dada: $p \geq 60\%$
Complementar: $p < 60\%$

$$H_0 : p = 0,6$$
$$H_1 : p < 0,6$$

(d) Afirmativa dada: $p < 5\%$
Complementar: $p \geq 5\%$

$$H_0 : p = 0,05$$
$$H_1 : p < 0,05$$

(e) Afirmativa dada: $\mu = 10$
Complementar: $\mu \neq 10$

$$H_0 : \mu = 10$$
$$H_1 : \mu \neq 10$$

♦♦

Estatística de teste, erros e regra de decisão

Assim como na construção dos intervalos de confiança, usaremos uma estatística amostral apropriada para construir o nosso teste de hipótese, e, nesse contexto, essa estatística é chamada *estatística de teste*. As estatísticas de teste naturalmente dependem do parâmetro envolvido no teste e, nesse texto, consideraremos apenas os parâmetros média e proporção (que também é uma média).

O procedimento de decisão será definido em termos da hipótese nula H_0, com duas decisões possíveis: (i) rejeitar H_0 ou (ii) não rejeitar H_0. No quadro a seguir, resumimos as situações possíveis.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Decisão</td></tr>
<tr><td>Rejeitar H_0</td><td>Não rejeitar H_0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Possibi-
lidades</td><td>H_0 verdadeira</td><td>Erro I</td><td>OK</td></tr>
<tr><td>H_0 falsa</td><td>OK</td><td>Erro II</td></tr>
</table>

Vemos, aí, que existem duas possibilidades de erro:

$$\text{Erro tipo I : rejeitar } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ é verdadeira}$$
$$\text{Erro tipo II : não rejeitar } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ é falsa}$$

A decisão sobre a hipótese nula é tomada com base em uma regra que estabelece um conjunto de valores, chamado *região crítica* ou *região de rejeição*, de modo que, se o valor observado da estatística amostral cair nessa região, rejeitaremos H_0; caso contrário, não rejeitaremos H_0. Vamos denotar por RC a região crítica.

Região crítica e nível de significância

Em geral, a definição da região crítica é feita da seguinte forma: RC é o conjunto de valores cuja probabilidade de ocorrência é *pequena* sob a hipótese de veracidade de H_0. *Sendo assim, a região crítica é construída com base na suposição de que H_0 é verdadeira.*

A definição de "probabilidade pequena" se faz por meio da escolha da probabilidade α do erro tipo I, chamada *nível de significância* ou *tamanho do teste*, isto é:

$$\alpha = \text{P(erro tipo I)} = \text{P(rejeitar } H_0 \,|\, H_0 \text{ é verdadeira)}$$

Em geral, o valor de α é pequeno e as escolhas mais comuns são $\alpha = 0,05$ e $\alpha = 0,01$.

Definido o nível de significância α, podemos estabelecer a região crítica usando a distribuição amostral da estatística de teste.

Exemplo 7.4 ***Honestidade de uma moeda***

Considere uma situação em que estamos interessados em verificar se uma moeda é honesta, isto é, $H_0 : p = 0,5$. Como não temos qualquer informação sobre o possível tipo de viés, nossa regra de decisão se baseará no número de coroas obtidas em 10 lançamentos. Se o número de coroas for muito pequeno ou muito grande, rejeitaremos a hipótese de honestidade da moeda. Encontre a região crítica para um nível de significância máximo de 1%, ou seja, a probabilidade de rejeitarmos a hipótese nula de honestidade da moeda quando, na verdade, ela é honesta tem de ser no máximo 0,01.

Solução:

Na tabela a seguir temos as probabilidades de ocorrência de cada um dos resultados possíveis, supondo que a moeda seja honesta. Nesse caso, se X é o número de coroas em 10 lançamentos, então $X \sim bin(10; 0,5)$.

Número de coroas x	$P(X = x)$
0	0,0009766
1	0,0097656
2	0,0439453
3	0,1171875
4	0,2050781
5	0,2460938
6	0,2050781
7	0,1171875
8	0,0439453
9	0,0097656
10	0,0009766

A probabilidade de obtermos 0 ou 10 coroas com uma moeda honesta é $2 \times 0,0009766 =$

$0,0019531$ e se acrescentarmos os resultados 1 coroa ou 9 coroas, a soma das probabilidades é 0,021484, que é maior que 0,01. Assim, nossa regra de decisão deve ser "rejeitar H_0 se saírem 0 ou 10 coroas" e, nesse caso, a probabilidade do erro I é $\alpha = 0,0019531$.

♦♦

Resumo

Neste capítulo, estudamos os conceitos básicos da teoria de testes de hipóteses, em que o interesse está em testar a validade de uma afirmação sobre um parâmetro da população. Então, em um teste de hipótese, procura-se tomar decisões a respeito de uma população, com base em informações obtidas de amostras desta mesma população.

Ao final do seu estudo, você deverá ser capaz de entender perfeitamente os seguintes conceitos.

- A *hipótese nula*, representada por H_0, é a hipótese básica que queremos testar. Nesse texto consideraremos apenas hipóteses nulas simples do tipo

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

- A *hipótese alternativa*, representada por H_1, é a hipótese que devemos considerar no caso de rejeição da hipótese nula. A forma mais geral de H_1 é a hipótese *bilateral*, mas podemos ter hipóteses unilaterais à esquerda e hipóteses unilaterais à direita:

$$H_1 : \theta \neq \theta_0 \qquad H_1 : \theta < \theta_0 \qquad H_1 : \theta > \theta_0$$

- A *estatística de teste* é a estatística amostral apropriada para construir o nosso teste de hipótese. As estatísticas de teste usuais são a média amostral $\overline{X}$ e a proporção amostral $\widehat{P}$, que serão usadas na construção de testes sobre a média e a proporção populacionais, respectivamente.

- O procedimento de decisão é definido em termos da hipótese nula H_0, com as seguintes decisões possíveis: (i) rejeitar H_0 ou (ii) não rejeitar H_0.

- Os erros possíveis no processo de decisão baseado em um teste de hipótese são

$$\begin{array}{c}\text{Erro tipo I : rejeitar } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ é verdadeira} \\ \text{Erro tipo II : não rejeitar } H_0 \text{ quando } H_0 \text{ é falsa}\end{array}$$

- A *região crítica* ou *região de rejeição* é o conjunto de valores da estatística de teste que levam à rejeição de H_0; a região crítica será denotada por RC.

- Em geral, a definição da região crítica é feita fixando-se a probabilidade do erro tipo I; essa probabilidade é chamada *nível de significância* e será indicada pela letra grega alfa, isto é: α.

$$\alpha = \text{P(rejeitar } H_0 \,|\, H_0 \text{ é verdadeira)}$$

- A probabilidade do erro tipo II, em geral, é representada pela letra grega beta, isto é:

$$\beta = \text{P(não rejeitar } H_0 \,|\, H_0 \text{ é falsa)}$$

Exercícios propostos

1. Estabeleça as hipóteses nula e alternativa para as seguintes situações:

   (a) Depois de uma pane geral no sistema de informação de uma empresa, o gerente administrativo deseja saber se houve alteração no tempo de processamento de determinada atividade. Antes da pane, o tempo de processamento podia ser aproximado por uma variável aleatória normal com média de 100 minutos e desvio padrão de 10 minutos. O gerente acredita que a pane não tenha alterado a variabilidade do processo.

   (b) O dono de uma média empresa decide investigar a alegação de seus empregados de que o salário médio na sua empresa é menor que o salário médio nacional, que é de 900 reais.

   (c) Uma empresa fabricante de balas afirma que o peso médio de suas balas é de pelo menos 2 gramas.

2. Considere uma população normal com variância 225, da qual se extrai uma amostra aleatória simples de tamanho 25. Deseja-se testar as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \mu = 40$$
$$H_1 : \mu = 45$$

   (a) Se a região crítica é $RC : \overline{X} > 43$ calcule as probabilidades dos erros tipo I e II.

   (b) Determine a região crítica da forma $\overline{X} > k$ tal que a probabilidade do erro tipo I seja 0,10. Nesse caso, qual é a probabilidade do erro tipo II?

3. Considere uma população normal com variância 225, da qual se extrai uma amostra aleatória simples de tamanho 25. Deseja-se testar as seguintes hipóteses:

$$H_0 : \mu = 40$$
$$H_1 : \mu \neq 40$$

   e para isso define-se a seguinte região crítica:

$$RC : \overline{X} > 46 \text{ ou } \overline{X} < 34$$

   (a) Calcule a probabilidade do erro tipo I.

(b) Calcule a probabilidade do erro tipo II se $\mu = 36$.

4. Considere uma população normal com variância 64, da qual se extrai uma amostra aleatória simples de tamanho 16. Deseja-se testar as seguintes hipóteses:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \mu = 23 \\
H_1 &: \mu = 28
\end{aligned}
$$

(a) Se a região crítica é $RC : \overline{X} > 25,5$ calcule as probabilidades dos erros tipo I e II.

(b) Determine a região crítica da forma $\overline{X} > k$ tal que a probabilidade do erro tipo I seja 0,05. Nesse caso, qual é a probabilidade do erro tipo II?

5. Desejando-se testar as hipóteses

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \mu = 45 \\
H_1 &: \mu < 45
\end{aligned}
$$

sobre a média μ de uma população normal com variância 36, estabeleceu-se a seguinte região crítica com base em amostra aleatória simples de tamanho $n = 16$:

$$RC : \overline{X} < 41,25$$

(a) Calcule a probabilidade do erro tipo I.

(b) Calcule a probabilidade do erro tipo II se $\mu = 43$.

Solução dos Exercícios

1. (a) Antes da pane: $T \sim N(100; 100)$
Depois da pane: $T \sim N(\mu; 100)$

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \mu = 100 \\
H_1 &: \mu \neq 100
\end{aligned}
$$

(b) Afirmativa dada: $\mu < 900$
Complementar: $\mu \geq 900$

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \mu = 900 \\
H_1 &: \mu < 900
\end{aligned}
$$

(c) Afirmativa dada: $\mu \geq 2$
Complementar: $\mu < 2$

$$H_0 : \mu = 2$$
$$H_1 : \mu < 2$$

2. $\left.\begin{array}{c} X \sim N(\mu; 225) \\ n = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(\mu; \frac{225}{25}\right)$ ou $\overline{X} \sim N(\mu; 9)$

(a)

$$\alpha = \mathrm{P}(\overline{X} > 43 \,|\, \overline{X} \sim N(40; 9)) = \mathrm{P}\left(Z > \frac{43-40}{3}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z > 1,00) = 0,5 - tab(1,00) = 0,1587$$

$$\beta = \mathrm{P}(\overline{X} \leq 43 \,|\, \overline{X} \sim N(45; 9) = \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{43-45}{3}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z \leq -0,67) = \mathrm{P}(Z \geq 0,67) = 0,5 - tab(0,67) = 0,2514$$

(b)

$$\alpha = 0,10 \Leftrightarrow \mathrm{P}\left[\overline{X} > k \,|\, \overline{X} \sim N(40; 9)\right] = 0,10 \Leftrightarrow$$
$$\mathrm{P}\left(Z > \frac{k-40}{3}\right) = 0,10 \Leftrightarrow tab\left(\frac{k-40}{3}\right) = 0,40 \Leftrightarrow$$
$$\frac{k-40}{3} = 1,28 \Leftrightarrow k = 43,84$$

$$\beta = \mathrm{P}\left(\overline{X} \leq 43,84 \,|\, \overline{X} \sim N(45; 9)\right) = \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{43,84-45}{3}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z \leq -0,39) = \mathrm{P}(Z \geq 0,39) = 0,5 - tab(0,39) = 0,3483$$

3. $\left.\begin{array}{c} X \sim N(\mu; 225) \\ n = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(\mu; \frac{225}{25}\right)$ ou $\overline{X} \sim N(\mu; 9)$

(a)

$$\alpha = \mathrm{P}\left[\overline{X} < 34 \,|\, \overline{X} \sim N(40; 9)\right] + \mathrm{P}\left[\overline{X} > 46 \,|\, \overline{X} \sim N(40; 9)\right]$$
$$= \mathrm{P}\left(Z < \frac{34-40}{3}\right) + \mathrm{P}\left(Z > \frac{46-40}{3}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z < -2) + \mathrm{P}(Z > 2) = 2 \times \mathrm{P}(Z > 2) = 2 \times [0,5 - tab(2,0)] = 0,0456$$

(b)

$$\beta = \mathrm{P}\left[34 \leq \overline{X} \leq 46 \,|\, \overline{X} \sim N(36; 9)\right] = \mathrm{P}\left(\frac{34-36}{3} \leq Z \leq \frac{46-36}{3}\right)$$
$$= \mathrm{P}(-0,67 \leq Z \leq 3,33) = tab(0,67) + tab(3,33) = 0,2486 + 0,4996 = 0,7482$$

4. $\left.\begin{array}{r} X \sim N(\mu; 64) \\ n = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(\mu; \frac{64}{16}\right)$ ou $\overline{X} \sim N\left(\mu; 4\right)$

(a)

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{P}(\overline{X} > 25,5 \,|\, \overline{X} \sim N(23;4)) = \text{P}\left(Z > \frac{25,5-23}{2}\right) \\ &= \text{P}(Z > 1,25) = 0,5 - tab(1,25) = 0,1056 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \text{P}\left(\overline{X} \leq 25,5 \,|\, \overline{X} \sim N(28;4)\right) = \text{P}\left(Z \leq \frac{25,5-28}{2}\right) \\ &= \text{P}(Z \leq -1,25) = \text{P}(Z > 1,25) = 0,1056 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} &\alpha = 0,05 \Leftrightarrow \text{P}(\overline{X} > k \,|\, \overline{X} \sim N(23;4)) = 0,05 \Leftrightarrow \\ &\text{P}\left(Z > \frac{k-23}{2}\right) = 0,05 \Leftrightarrow tab\left(\frac{k-23}{2}\right) = 0,45 \Leftrightarrow \frac{k-23}{2} = 1,64 \Leftrightarrow k = 26,28 \end{aligned}$$

5. $\left.\begin{array}{r} X \sim N(\mu; 36) \\ n = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{X} \sim N\left(\mu; \frac{36}{16}\right)$ ou $\overline{X} \sim N\left(\mu; 1,5^2\right)$

(a)

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{P}(\overline{X} < 41,25, \,|\, \overline{X} \sim N(45;1,5^2)) = \text{P}\left(Z < \frac{41,25-45}{1,5}\right) \\ &= \text{P}(Z < -2,5) = \text{P}(Z > 2,5) = 0,5 - tab(2,5) = 0,0062 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \beta &= \text{P}\left(\overline{X} \geq 41,25 \,|\, \overline{X} \sim N(43;1,5^2)\right) = \text{P}\left(Z \geq \frac{41,25-43}{1,5}\right) \\ &= \text{P}(Z \geq -1,17) = 0,5 + tab(1,17) = 0,8790 \end{aligned}$$

Capítulo 8

Testes de Hipóteses sobre a Média

Neste capítulo, estudaremos testes de hipóteses sobre a média de uma população. Assim como fizemos nos intervalos de confiança, abordaremos inicialmente o caso específico de uma população normal com variância conhecida e depois aplicaremos o Teorema Limite Central à média de uma população qualquer da qual se extrai uma grande amostra.

Entendendo bem a construção de um teste de hipótese para esse caso particular, a apresentação para as outras situações é bastante semelhante, mudando apenas a distribuição amostral.

Exemplos

Vamos apresentar, inicialmente, três exemplos que ilustrarão as diversas possibilidades que podem surgir na prática.

Exemplo 8.1 ***Tempo de processamento - parte 1***
Depois de uma pane geral no sistema de informação de uma empresa, o gerente administrativo deseja saber se houve alteração no tempo de processamento de determinada atividade. Antes da pane, o tempo de processamento podia ser aproximado por uma variável aleatória normal com média de 100 minutos e desvio padrão de 10 minutos. O gerente acredita que a pane não tenha alterado a variabilidade do processo. Uma amostra de 16 tempos de processamento após a pane revela uma média de 105,5 minutos. Ao nível de significância de 5%, qual é a conclusão sobre a alteração do tempo médio de processamento?

Solução:
Seja T a variável aleatória que representa o tempo de processamento. Do enunciado, sabemos que

$T \sim N(\mu, 10^2)$ e sabemos, também, que antes da pane, $\mu = 10$.

- Hipóteses Nula e Alternativa

  O interesse do gerente é comparar os tempos antes e depois da pane. Antes da pane, o tempo médio de processamento era de 100 minutos. Como ele não sabe o tipo de alteração que pode ter ocorrido, precisa saber se o tempo médio depois da pane é diferente do tempo anterior. Temos, assim, as seguintes afirmativas $\mu = 100$ e $\mu \neq 100$, que nos levam às seguintes hipóteses nula e alternativa:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 100 \\ H_1 &: \mu \neq 100 \end{aligned}$$

- Estatística de teste

  Como a população é normal, sabemos que a distribuição da média amostral também é normal, e como não deve ter havido alteração na variabilidade do processo, resulta que o desvio padrão é de 10 minutos em qualquer situação.

  Logo,

$$\overline{X} \sim N\left(\mu; \frac{100}{16}\right) \Leftrightarrow \frac{\overline{X} - \mu}{2,5} \sim N(0;1)$$

  e nossa estatística de teste será

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{2,5} \sim N(0;1)$$

- Nível de significância e região crítica

  Pelo enunciado do problema, o nível de significância é de 5%. Isso significa que a probabilidade de erro tipo I é 0,05. Como visto, o erro tipo I consiste em rejeitar a hipótese nula quando ela é verdadeira. Logo,

$$\alpha = \mathrm{P}(\text{rejeitar } H_0 \,|\, H_0 \text{ verdadeira}) = 0,05$$

  Quando H_0 é verdadeira, $\mu = 100$ e, portanto,

$$H_0 \text{ verdadeira} \Longrightarrow Z_0 = \frac{\overline{X} - 100}{2,5} \sim N(0;1)$$

  Z_0 é a nossa *estatística de teste padronizada*. O subscrito 0 indica que estamos supondo H_0 verdadeira.

  A lógica do processo de decisão em um teste de hipótese é a seguinte: temos a distribuição da estatística de teste, supondo H_0 verdadeira. Nesse caso, nossa estatística de teste é Z_0 e a distribuição sob H_0 é a normal padrão. Valores observados de Z_0 com pequena probabilidade de ocorrência sob essa hipótese são indicativos de que a hipótese não é verdadeira. Assim, a região crítica consiste nos valores de Z_0 nas caudas da distribuição $N(0,1)$, que são as regiões de pequena probabilidade. Para delimitar essas regiões de pequena probabilidade, usamos o nível de significância e a hipótese alternativa. Como nesse exemplo a hipótese alternativa é bilateral, temos que tomar valores nas duas caudas da distribuição, distribuindo igualmente a probabilidade de erro, que é 5%. Veja a Figura 8.1:

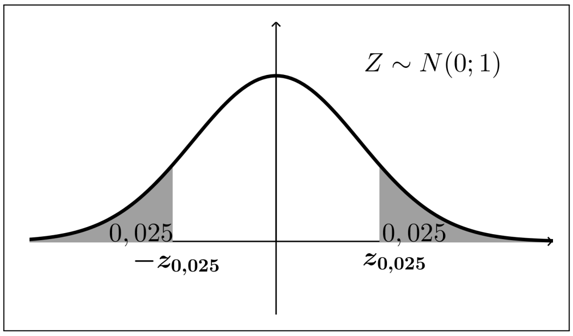


Figura 8.1 – Região crítica para o Exemplo 8.1

Então, nossa região crítica consiste em valores observados da estatística de teste Z_0 que caem na área sombreada da Figura 8.1. Essa área sombreada é delimitada pelo valor crítico da $N(0,1)$ que deixa 2,5% acima dele, ou seja,

$$RC: \qquad Z_0 > z_{0,025} \qquad \text{ou} \qquad Z_0 < -z_{0,025}$$

Olhando na tabela da distribuição normal, resulta

$$RC: \qquad Z_0 > 1,96 \qquad \text{ou} \qquad Z_0 < -1,96$$

ou equivalentemente,

$$RC: \qquad |Z_0| > 1,96$$

- Decisão e conclusão

  Os dados observados fornecem o valor $\overline{x} = 105,5$ minutos, que resulta no seguinte valor da estatística de teste:

$$z_0 = \frac{105,5 - 100}{2,5} = 2,2 > 1,96$$

  Como o valor da estatística de teste para a amostra observada está na região crítica, devemos rejeitar a hipótese nula, ou seja, as evidências amostrais indicam uma alteração do tempo de processamento da tarefa após a pane.

- Observação sobre a região crítica

  Vimos que a região crítica é $|Z_0| > 1,96$, ou seja

$$\left|\frac{\overline{X} - 100}{2,5}\right| > 1,96 \Leftrightarrow \overline{X} > 100 + 1,96 \cdot 2,5 \quad \text{ou} \quad \overline{X} < 100 - 1,96 \cdot 2,5$$

  Assim, rejeitamos H_0 para valores de $\overline{X}$ distantes do valor 100 especificado em H_0. Como o teste é bilateral, “distante” pode ser acima ou abaixo de 100. No contexto atual, iremos denotar a estatística $\overline{X}$ como a *estatística de teste não padronizada*.

♦♦

Exemplo 8.2 ***Tempo de processamento - parte 2***
Na mesma situação do exemplo anterior, é bastante razoável supor que o gerente esteja interessado apenas no caso de aumento do tempo de processamento. Afinal, se o tempo diminuir, isso significa que a tarefa vai ser executada mais rapidamente, o que representa um ganho.

Solução:

- Hipóteses Nula e Alternativa

  As duas possibilidades são:

$$\begin{array}{lll} \mu & \leq & 100 \qquad \text{OK!} \\ \mu & > & 100 \qquad \text{Problema!} \end{array}$$

  Seguindo nosso procedimento, temos a seguinte situação:

$$\begin{array}{lll} H_0 & : & \mu = 100 \\ H_1 & : & \mu > 100 \end{array}$$

- Estatística de teste

  A estatística de teste padronizada continua sendo

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - 100}{2,5} \sim N(0;1)$$

- Nível de significância e região crítica

  O nível de significância é, ainda, 5%. Como antes, valores observados de Z_0 com pequena probabilidade de ocorrência sob H_0 são indicativos de que a hipótese não é verdadeira. Assim, a região crítica consiste nos valores de Z_0 na cauda da distribuição $N(0,1)$, na direção da hipótese alternativa. Agora, a hipótese alternativa é *unilateral à direita* e, portanto, a região crítica consiste nos valores na cauda superior que respondem pela probabilidade de 5% do erro tipo I. Veja a Figura 8.2:

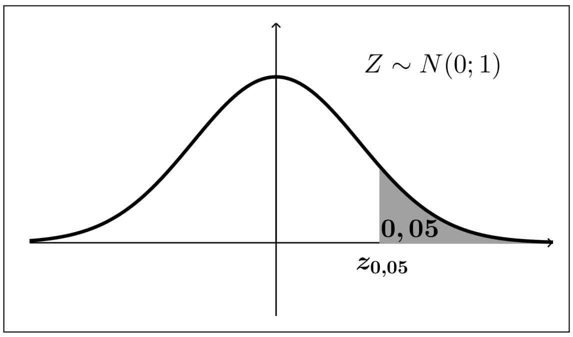


Figura 8.2 – Região crítica para o Exemplo 8.2

  Então, nossa região crítica consiste em valores observados da estatística de teste Z_0 que caem na área sombreada da Figura 8.2. Essa área sombreada é delimitada pelo valor crítico da

$N(0,1)$ que deixa 5% acima dele, ou seja,

$$RC: \qquad Z_0 > z_{0,05}$$

Olhando na tabela da distribuição normal, resulta

$$RC: \qquad Z_0 > 1,64$$

que é equivalente, em termos da estatística de teste não padronizada, a $\overline{X} > 100 + 1,64 \cdot 2,5$, ou seja, valores de $\overline{X}$ "distantes" do valor 100 na direção da hipótese alternativa.

- Decisão e conclusão

  O valor da estatística de teste não se altera:

$$z_0 = \frac{105,5 - 100}{2,5} = 2,2 > 1,64$$

  e como antes, devemos rejeitar a hipótese nula, ou seja, as evidências amostrais indicam um aumento do tempo de processamento da tarefa após a pane.

♦♦

Exemplo 8.3
O dono de uma pequena empresa decide investigar a alegação de seus empregados de que o salário médio na sua empresa é menor que o salário médio nacional. Para isso, ele analisa uma amostra de 25 salários, obtendo uma média de 894,53 reais. De informações obtidas junto ao sindicato patronal, ele sabe que, em nível nacional, o salário médio é de 900 reais, com desvio padrão de 32 reais. Supondo que seja razoável aproximar a distribuição dos salários por uma distribuição normal com o mesmo desvio padrão nacional, construa o teste de hipótese apropriado, com um nível de significância de 10%.

Solução:

- Hipóteses nula e alternativa

  O problema aqui consiste em decidir se os salários são menores ou não do que a média nacional de 900 reais, ou seja, as situações de interesse são:

$$\mu < 900$$
$$\mu \geq 900$$

  e nossas hipóteses são:

$$H_0: \mu = 900$$
$$H_1: \mu < 900$$

- Estatística de teste

Pelos dados do problema, podemos adotar a estatística de teste padronizada

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - 900}{\frac{32}{\sqrt{25}}} \sim N(0;1) \quad \text{ou} \quad Z_0 = \frac{\overline{X} - 900}{6,4} \sim N(0;1)$$

- Região crítica e nível de significância

Valores observados da estatística de teste com pequena probabilidade de ocorrência sob H_0 indicam que H_0 não é verdadeira. Como a hipótese alternativa é unilateral à esquerda, valores com pequena probabilidade de ocorrência estão na cauda inferior da distribuição normal padrão. Como o nível de significância é de 10%, probabilidade pequena significa probabilidade menor que 10% e, portanto, a região crítica, em termos da estatística de teste padronizada é

$$RC: \qquad Z_0 < -1,28.$$

Veja a Figura 8.3.

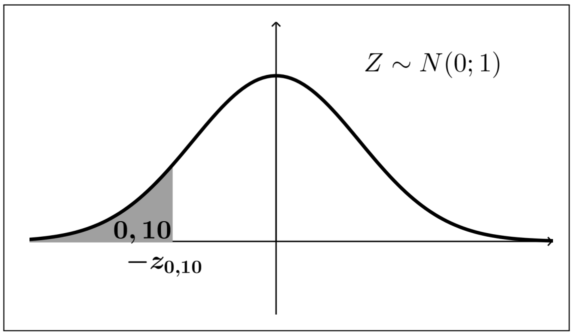


Figura 8.3 – Região crítica para o Exemplo 8.3

Em termos da estatística de teste não padronizada, a região crítica é

$$RC: \overline{X} < 900 - 6,4 \cdot 1,28 \quad \text{ou} \quad \overline{X} < 801,908$$

- Decisão e conclusão

O valor da estatística de teste padronizada é

$$z_0 = \frac{894,53 - 900}{6,4} = -0,855$$

e esse valor não pertence à região crítica. Logo, não se rejeita a hipótese nula, ou seja, não há evidência de que o salário médio seja menor que o salário médio nacional. Essa conclusão pode ser tirada também do fato de que $894,53 > 801,908$.

♦♦

Teste de hipótese sobre a média de uma $N(\mu; \sigma^2)$ – σ^2 conhecida

Os dois primeiros exemplos anteriores ilustram o procedimento para construção de um teste de hipótese sobre a média de uma população normal com variância conhecida. De posse de uma amostra aleatória simples $X_1, X_2, \dots, X_n$ extraída de uma população $X \sim N(\mu; \sigma^2)$, nosso interesse está em testar a hipótese nula

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

a um nível de significância α.

Dependendo do conhecimento sobre o problema, a hipótese alternativa pode tomar uma das três formas:

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \qquad H_1 : \mu > \mu_0 \qquad H_1 : \mu < \mu_0$$

Em qualquer dos casos, a estatística de teste baseia-se na média amostral; se a variância σ^2 é conhecida, sabemos que

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0, 1)$$

A região crítica é estabelecida em função do nível de significância, que é a probabilidade α do erro tipo I:

$$\alpha = \mathrm{P}(\text{rejeitar } H_0 \,|\, H_0 \text{ verdadeira})$$

Quando H_0 é verdadeira, $\mu = \mu_0$ e, portanto, nossa estatística de teste é

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0, 1)$$

Valores observados de Z_0 com pequena probabilidade de ocorrência são indicativos de que a hipótese não é verdadeira. Assim, a região crítica consiste nos valores de Z_0 na(s) cauda(s) da distribuição $N(0, 1)$, na direção da hipótese alternativa.

A seguir apresentamos os resultados para cada uma das possíveis hipóteses alternativas.

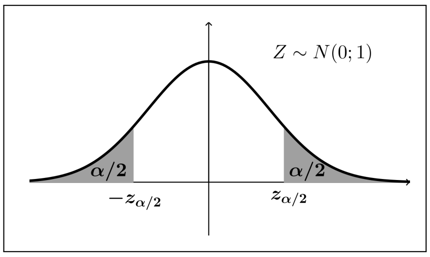
- Hipótese nula e estatística de teste

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$Z_0 = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \underbrace{\sim}_{\text{sob } H_0} N(0, 1)$$

- Teste bilateral

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$



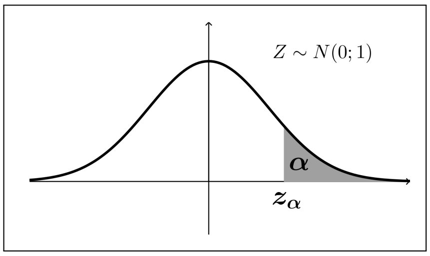
Região crítica:

$$Z_0 < -z_{\alpha/2} \quad \text{ou} \quad Z_0 > z_{\alpha/2}$$

$$\overline{X} < \mu_0 - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{ou} \quad \overline{X} > \mu_0 + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Teste unilateral à direita

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

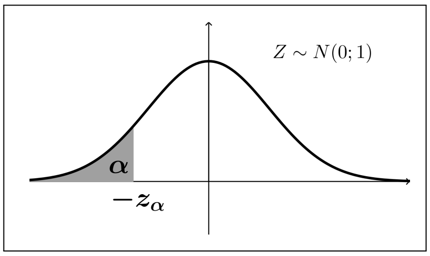


Região crítica:

$$Z_0 > z_\alpha \quad \text{ou} \quad \overline{X} > \mu_0 + z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Teste unilateral à esquerda

$$H_1 : \mu < \mu_0$$



Região crítica:

$$Z_0 > z_\alpha \quad \text{ou} \quad \overline{X} < \mu_0 - z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Valor P

Nos exemplos anteriores, a determinação da região crítica foi feita com base no nível de significância, isto é, fixado o nível de significância, encontramos o valor crítico que define os limites entre valores prováveis (aqueles que *não levam* à rejeição de H_0) e pouco prováveis (aqueles que *levam* à rejeição de H_0) sob a hipótese de veracidade de H_0.

Um outro procedimento bastante usual, especialmente quando são utilizados programas computacionais, consiste em calcular a probabilidade de se obter um valor da estatística de teste tão ou mais extremo que o valor observado, se H_0 for verdadeira. Um valor pequeno para tal probabilidade é indício de que H_0 não seja verdadeira. "Tão ou mais extremo" é sempre no sentido da hipótese alternativa, ou seja, no sentido de se rejeitar a hipótese nula. Temos, assim, a seguinte definição.

Definição 8.1 ***Valor P ou probabilidade de significância*** *O **valor** P é a probabilidade de se obter um valor da estatística de teste tão ou mais extremo que o valor observado, supondo-se H_0 verdadeira.*

Vamos ilustrar esse conceito considerando novamente os três exemplos anteriores.

Exemplo 8.4
Vamos calcular o valor P para o Exemplo 8.1.

Solução:
O valor observado da estatística de teste é $z_0 = 2,2$ e a hipótese alternativa é bilateral. Então, consideramos igualmente extremo o valor simétrico $-2,2$, ou seja, tão ou mais extremo significa ser maior que $2,2$, ou menor que $-2,2$ e o valor P é

$$P = \mathrm{P}(Z > 2,2) + \mathrm{P}(Z < -2,2) = 2 \times \mathrm{P}(Z > 2,2) = 2 \times [0,5 - tab(2,2)] = 0,0278$$

Na Figura 8.4 ilustra-se esse valor. O que esse resultado está nos dizendo é o seguinte: se H_0 for verdadeira, a probabilidade de obtermos um valor tão extremo quanto 2,2 na direção da hipótese alternativa, ou seja, em qualquer direção, já que H_1 é bilateral, é $0,0278$. Essa é uma probabilidade pequena, o que significa que é pouco provável obtermos um valor tão extremo quando H_0 é verdadeira. Logo, é razoável supormos que a hipótese nula não seja verdadeira, a mesma conclusão obtida ao trabalharmos com o nível de significância de 5%.

Na verdade, rejeitaríamos a hipótese nula para qualquer nível de significância maior que 0,0278. Note que tais níveis de significância implicariam em valores críticos menores do que o valor observado z_0 e, portanto, levariam à rejeição de H_0. Assim, o valor P é o menor nível de significância que leva à rejeição de H_0.

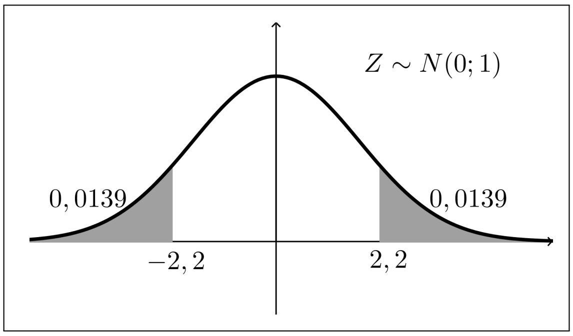


Figura 8.4 – Valor P para o Exemplo 8.1

♦♦

Exemplo 8.5
Vamos calcular o valor P para o Exemplo 8.2.

Solução:
Como antes, o valor observado da estatística de teste é $z_0 = 2,2$, mas agora a hipótese alternativa é unilateral à direita. Então, valores tão ou mais extremos são aqueles maiores que $2,2$ e o valor P é

$$P = \mathrm{P}(Z > 2,2) = 0,5 - tab(2,2) = 0,0139$$

Na Figura 8.5 ilustra-se esse valor. O que esse resultado está nos dizendo é o seguinte: se H_0 for verdadeira, a probabilidade de obtermos um valor tão ou mais extremo que 2,2 é $0,0139$.

Novamente, essa é uma probabilidade pequena, o que significa que é pouco provável obtermos um valor tão extremo quando H_0 é verdadeira. Logo, é razoável supormos que a hipótese nula não seja verdadeira, a mesma conclusão obtida ao trabalharmos com o nível de significância de 5%. Como antes, rejeitaríamos a hipótese nula para qualquer nível de significância maior que 0,0139.

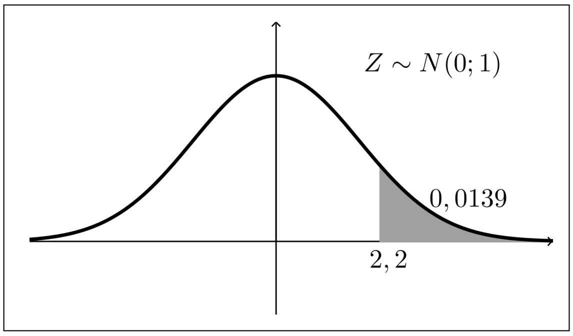


Figura 8.5 – Valor P para o Exemplo 8.2

♦♦

Exemplo 8.6
Vamos calcular o valor P para o Exemplo 8.3.

Solução:
O valor observado da estatística de teste é $z_0 = -0,855$, e a hipótese alternativa é unilateral à esquerda. Então, valores tão ou mais extremos são aqueles menores que $-0,855$ e o valor P é

$$P = \mathrm{P}(Z < -0,855) = \mathrm{P}(Z > 0,855) = 0,5 - tab(0,86) = 0,5 - 0,3051 = 0,1949$$

Na Figura 8.6 ilustra-se esse valor. O que esse resultado está nos dizendo é o seguinte: se H_0 for verdadeira, há uma probabilidade alta de obtermos um valor tão ou mais extremo que $-0,855$. Assim, não se rejeita H_0.

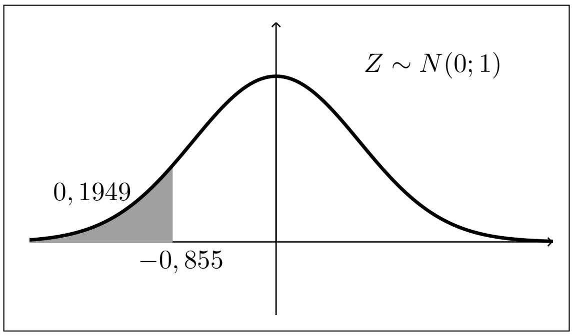


Figura 8.6 – Valor P para o Exemplo 8.3

♦♦

Procedimento geral para obtenção do valor P

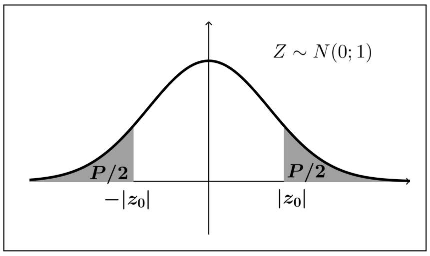
Os exemplos acima ilustram o procedimento para obtenção do valor P quando a estatística de teste tem distribuição normal. Como essa é uma distribuição simétrica, podemos sempre calcular o valor P trabalhando na cauda superior da distribuição normal padrão; para isso, basta usar o valor absoluto $|z_0|$ do valor observado da estatística de teste.

- Teste bilateral

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$P = \mathrm{P}(Z < -|z_0|) + \mathrm{P}(Z > |z_0|)$$

$$P = 2 \times \mathrm{P}(Z > |z_0|)$$



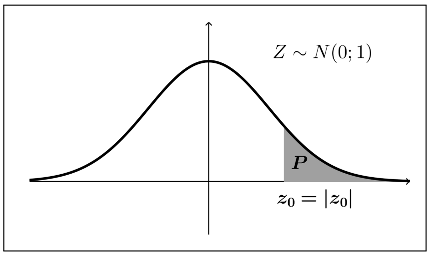
- Teste unilateral à direita

  Podemos supor que $z_0 > 0$. Caso contrário, o valor P será maior que $0,5$, o que leva à não rejeição de H_0 para qualquer nível de significância razoável.

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0$$

$$P = \mathrm{P}(Z > z_0)$$

$$P = \mathrm{P}(Z > |z_0|)$$



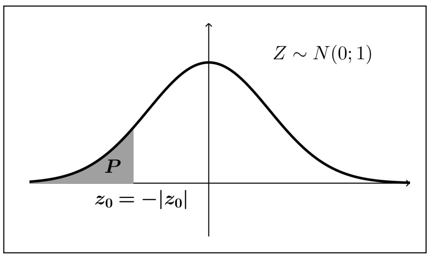
- Teste unilateral à esquerda

  Podemos supor que $z_0 < 0$. Caso contrário, o valor P será maior que $0,5$, o que leva à não rejeição de H_0 para qualquer nível de significância razoável.

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu < \mu_0$$

$$P = \mathrm{P}(Z < z_0) = \mathrm{P}(Z < -|z_0|)$$

$$P = \mathrm{P}(Z > |z_0|)$$



Valor P e nível de significância

Vimos que o nível de significância α é a probabilidade do erro tipo I e o valor crítico correspondente delimita a região de rejeição, ou seja, valores da estatística de teste que caem na região crítica levam à rejeição de H_0. O valor P, por sua vez, é a probabilidade de se obter valores tão extremos quanto o observado e essa probabilidade, sendo pequena, leva à rejeição da hipótese nula.

Como podemos, então, relacionar o valor P e o nível de significância α em termos do processo decisório? Veja a Figura 8.7, onde ilustramos a situação para um teste unilateral à direita. Qualquer valor z_0 maior que z_α leva à rejeição de H_0. Mas tais valores correspondem a probabilidades menores na cauda da distribuição, ou seja, correspondem a valores P menores que α. Isso nos leva à seguinte observação:

! Valor P *versus* nível de significância

O valor P é o menor nível de significância para o qual a hipótese nula H_0 é rejeitada, ou seja,

$$\text{rejeitamos } H_0 \Leftrightarrow P \leq \alpha$$

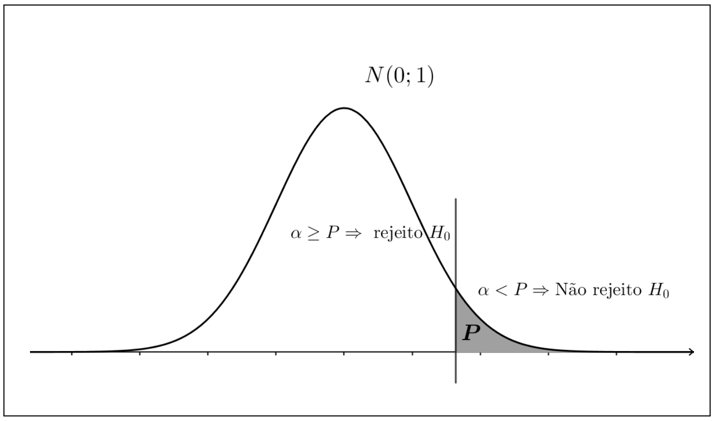


Figura 8.7 – Valor P *versus* nível de significância

Exemplo 8.7 ***Peso de bala***

Uma empresa fabricante de balas afirma que o peso médio de suas balas é de pelo menos 2 gramas. Pela descrição do processo de produção, sabe-se que o peso das balas distribui-se normalmente com desvio padrão de 0,5 grama. Uma amostra de 25 balas apresenta peso médio de 1,81 gramas. O que se pode concluir sobre a afirmação do fabricante? Estabeleça sua conclusão usando um nível de significância de 5% e também o valor P.

Solução:

Seja X a variável aleatória que representa o peso das balas. Então, $X \sim N(\mu; 0,25)$. Como $n = 25$, resulta que

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{0,25}{25}}} \sim N(0,1)$$

A afirmativa do fabricante é $\mu \geq 2$. Logo, a negação de tal afirmação é $\mu < 2$. Como essa última expressão não contém o sinal de igualdade, ela se torna a hipótese alternativa. Então, nossas hipóteses são:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 2 \\ H_1 &: \mu < 2 \end{aligned}$$

Para $\alpha = 0,05$, a região crítica é

$$RC : Z_0 < -z_{0,05} = -1,64$$

O valor observado da estatística de teste é

$$z_0 = \frac{1,81 - 2,00}{\sqrt{\frac{0,25}{25}}} = -1,9 < -1,64$$

Como o valor observado da estatística de teste está na região crítica, rejeita-se a hipótese nula, ou seja, há evidência de que o peso médio seja menor que 2 gramas.

Temos também que

$$P = \mathrm{P}(Z > |-1,9|) = 0,5 - tab(1,9) = 0,0287$$

Assim, rejeitaríamos H_0 para qualquer nível de significância maior que 2,87%, o que inclui 5%.

♦♦

Teste de hipótese sobre a média com base em grandes amostras

No caso de se ter uma amostra grande de uma população qualquer, o Teorema 5.1 pode ser usado na construção de testes de hipótese sobre a média da população. Segundo esse teorema,

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \approx N(0;1)$$

e, assim, os procedimentos são como já vistos antes. Assim como o nível de confiança era apenas aproximadamente $1 - \alpha$, nos testes de hipóteses, o nível de significância será aproximadamente α.

Exemplo 8.8

Uma amostra de tamanho $n = 196$ é extraída de uma população com o objetivo de se testar

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 10 \\ H_0 &: \mu < 10 \end{aligned}$$

resultando em $\overline{x} = 9,3$ e $s = 2,54$. Construa o teste de hipótese com nível de significância de 5%, estabelecendo a conclusão. Calcule também o valor P.

Solução:
$\alpha = 0,05 \Rightarrow z_{0,05} = 1,64$

A estatística de teste é

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - 10}{\frac{2,54}{\sqrt{196}}} \approx N(0;1)$$

ou seja

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - 10}{0,1814} \approx N(0;1)$$

A região crítica é $Z_0 < -1,64$ e o valor observado da estatística de teste padronizada é

$$z_0 = \frac{9,3 - 10}{0,1814} = -3,86 < -1,64.$$

Rejeita-se, então a hipótese nula e o valor P é

$$P = \mathrm{P}(Z < -3,86) = \mathrm{P}(Z > 3,86) = 0,5 - tab(3,86) = 0,5 - 0,4999 = 0,0001$$

Note que a hipótese nula seria rejeitada para qualquer nível de significância $\alpha > 0,0001$.

♦♦

Exercícios

1. Uma amostra aleatória simples de tamanho $n = 9$, extraída de uma população normal com desvio padrão 3,03 apresentou média igual a $\overline{x} = 13,35$. Deseja-se testar

$$H_0 : \mu = 12,8$$
$$H_1 : \mu \neq 12,8$$

   (a) Use o nível de significância $\alpha = 0,02$ para determinar a região crítica, tanto em termos da estatística de teste padronizada quanto em termos da estatística de teste não padronizada.

   (b) Com base no resultado anterior, estabeleça a conclusão, tendo o cuidado de usar um vocabulário que não seja puramente técnico.

   (c) Calcule o valor P e interprete o resultado obtido.

2. Em uma linha de produção, peças são produzidas de modo que o comprimento seja normalmente distribuído com desvio padrão de 0,6cm. Ajustes periódicos são feitos na máquina para garantir que as peças tenham comprimento apropriado de 15cm, pois as peças muito curtas não podem ser aproveitadas (as peças longas podem ser cortadas). A cada hora são extraídas 9 peças da produção, medindo-se seu comprimento.

Estabeleça uma regra de decisão para definir se o processo está operando adequadamente. Use o nível de significância de 0,1%.

3. Depois de desenvolver um algoritmo para acelerar a execução de determinada tarefa rotineira em um escritório de contabilidade, o analista de sistema analisa uma amostra de 64 tempos, obtendo uma média 46,5 segundos e desvio padrão de 6,3 segundos. Antes de implementar o algoritmo, o tempo de execução era de 48,5 segundos.

   Desenvolva o teste de hipótese apropriado para verificar se o algoritmo do analista realmente melhorou o desempenho do sistema. Utilize $\alpha = 0,02$ e certifique-se de especificar todas as etapas e calcular o valor P.

4. Uma propaganda afirma que o consumo médio de gasolina de determinada marca de automóvel é de 12 litros por 100 quilômetros rodados. Um teste com 49 automóveis desta marca acusa um consumo médio de 12,4 litros por 100 quilômetros rodados, com desvio padrão de 1,26 litros.

   O que se pode concluir sobre a propaganda? Responda fazendo o teste de hipótese com nível de significância de 10%.

Solução dos exercícios

1. Teste bilateral; $n = 9$; $\sigma = 3,03$; $\overline{x} = 13,35$

   (a) $\alpha = 0,02 \Rightarrow z_{0,01} = 2,33$

   A estatística de teste é

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - 12,8}{\frac{3,03}{3}} = \frac{\overline{X} - 12,8}{1,01}$$

   A região crítica é

$$|Z_0| > 2,33$$

   ou

$$\overline{X} < 12,8 - 2,33 \cdot 1,01 = 10,4467 \qquad \text{ou} \qquad \overline{X} > 12,8 + 2,33 \cdot 1,01 = 15,1533$$

   O valor observado de Z_0 é

$$z_0 = \frac{13,35 - 12,8}{1,01} = 0,54$$

   Como $|z_0| < 2,33$ e também $10,4465 < 13,35 < 15,1533$, não se rejeita H_0. O valor P é

$$P = 2 \times \mathrm{P}(Z > 0,54) = 2 \times (0,5 - 0,2054) = 0,5892.$$

   O valor P é bastante alto; logo a hipótese nula só seria rejeitada para níveis de significância maiores que 0,59. Isso é evidência de que não se pode rejeitar a hipótese nula em qualquer nível de significância razoável.

2. Seja X o comprimento (cm) das peças. Então, $X \sim N(\mu; 0,6^2)$.

   O problema na produção surge quando $\mu < 15$. Logo, nossas hipóteses são:

$$H_0 : \mu = 15$$
$$H_1 : \mu < 15$$

   $\alpha = 0,001 \Rightarrow z_{0,001} = 3,08$

   A estatística de teste é
$$Z_0 = \frac{\overline{X} - 15}{\frac{0,6}{3}} = \frac{\overline{X} - 15}{0,2}$$

   A região crítica é $Z_0 < -3,08$ ou $\overline{X} < 15 - 3,08 \cdot 0,2 = 14,384$.

   A regra de decisão a ser implementada é $\overline{X} < 14,384 \Rightarrow$ sistema está fora de controle. Note que na implementação, a regra de decisão tem que ser dada em termos da média amostral, que é o que se mede na amostra. Não faz sentido ter uma tabela da normal no chão de fábrica!

3. Amostra grande de uma população qualquer.

   Seja X o tempo de execução. O analista pretende reduzir o tempo médio. Logo, nossas hipóteses são:

$$H_0 : \mu = 48,5$$
$$H_1 : \mu < 48,5$$

   $\alpha = 0,02 \Rightarrow z_{0,02} = 2,05$

   A estatística de teste é

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - 48,5}{\frac{6,3}{8}} = \frac{\overline{X} - 48,5}{0,7875} \qquad Z_0 \approx N(0;1)$$

   A região crítica é $Z_0 < -2,05$ ou $\overline{X} < 48,5 - 2,05 \cdot 0,7875 = 46,885625$.

   O valor observado de Z_0 é
$$z_0 = \frac{46,5 - 48,5}{0,7875} = -2,54$$

   e o valor P é

$$P = \mathrm{P}(Z < -2,54) = \mathrm{P}(Z > 2,54) = 0,5 - tab(2,54) = 0,0055$$

   Rejeita-se a hipótese nula, pois $-2,54 < -2,05$ ou também $46,5 < 46,8856$. Note que o valor p é menor que o nível de significância. Assim, há evidências de que houve redução no tempo médio de execução da tarefa.

4. Amostra grande de uma população qualquer.

Seja X o consumo de gasolina desses carros. Se o consumo for menor ou igual a 12 litros por 100 quilômetros, não há problema com a propaganda. O problema surge se o consumo for superior. Logo, nossas hipóteses são:

$$H_0 : \mu = 12$$
$$H_1 : \mu > 12$$

$\alpha = 0,10 \Rightarrow z_{0,10} = 1,28$

A estatística de teste é

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - 12}{\frac{1,26}{7}} = \frac{\overline{X} - 12}{0,18} \qquad Z_0 \approx N(0;1)$$

A região crítica é $Z_0 > 1,28$ ou $\overline{X} > 12 + 1,28 * 0,18 = 12,2304$.

O valor observado de Z_0 é

$$z_0 = \frac{12,4 - 12}{0,18} = 2,22$$

e o valor P é

$$P = \mathrm{P}(Z > 2,22) = 0,5 - tab(2,22) = 0,0132$$

Rejeita-se a hipótese nula pois $2,22 > 1,28$ ou ainda $12,4 > 12,2304$. Note também que $P < \alpha$.

Assim, há evidências de que a propaganda seja enganosa; os dados indicam que o consumo médio é maior que 12 litros por 100 quilômetros rodados.

.

Capítulo 9

Teste de Hipótese sobre Proporções – Amostras Grandes

No capítulo anterior, vimos como construir testes de hipótese sobre a média de uma população qualquer, com auxílio do Teorema 5.1, visto no Capítulo 4. Agora, usaremos o Teorema Limite Central para construir teste de hipótese sobre uma proporção populacional.

Teste de Hipótese sobre a Proporção Populacional

O contexto de interesse é o seguinte: temos uma população em que cada elemento é classificado de acordo com a presença ou ausência de determinada característica. O objetivo é testar alguma hipótese sobre a proporção populacional p dos elementos que possuem tal característica. Vimos que a proporção amostral $\widehat{P}$ é um bom estimador para p e, também que, para grandes amostras,

$$\widehat{P} \approx N\left(p; \frac{p(1-p)}{n}\right).$$

ou equivalentemente

$$\frac{\widehat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \approx N(0;1) \tag{9.1}$$

Como a distribuição amostral de $\widehat{P}$ é aproximadamente normal, o procedimento de construção do teste de hipótese sobre a proporção populacional é totalmente análogo ao procedimento visto para a média populacional.

De posse de uma *grande* amostra aleatória simples $X_1, X_2, \ldots, X_n$ extraída de uma população $X \sim Bern(p)$, nosso interesse está em testar a hipótese nula

$$H_0 : p = p_0$$

a um nível de significância α.

Dependendo do conhecimento sobre o problema, a hipótese alternativa pode tomar uma das três formas:

$$H_1 : p \neq p_0 \qquad H_1 : p > p_0 \qquad H_1 : p < p_0$$

A região crítica e o valor P são calculados supondo-se H_0 verdadeira, $p = p_0$ e, portanto, nossa estatística de teste padronizada é

$$Z_0 = \frac{\widehat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \approx N(0,1)$$

Valores observados de Z_0 com pequena probabilidade de ocorrência são indicativos de que a hipótese não é verdadeira. Assim, a região crítica consiste nos valores de Z_0 na(s) cauda(s) da distribuição $N(0,1)$, na direção da hipótese alternativa.

A seguir apresentamos os resultados para cada uma das possíveis hipóteses alternativas.

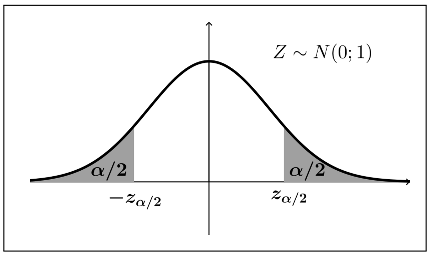
- Hipótese nula e estatística de teste

$$H_0 : p = p_0$$

$$Z_0 = \sqrt{n}\frac{\widehat{P} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \underbrace{\approx}_{\text{sob } H_0} N(0,1)$$

- Teste bilateral

$$H_1 : p \neq p_0$$



Região crítica:

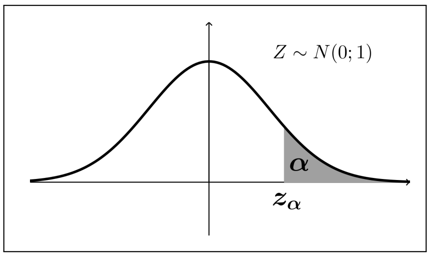
$$Z_0 < -z_{\alpha/2} \qquad \text{ou} \qquad Z_0 > z_{\alpha/2}$$

$$\widehat{P} < p_0 - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \quad \text{ou} \quad \widehat{P} > p_0 + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

- Teste unilateral à direita

$$H_1 : p > p_0$$

Região crítica:

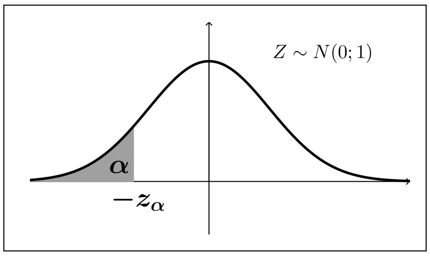


$$Z_0 > z_\alpha \quad \text{ou} \quad \widehat{P} > p_0 + z_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

- Teste unilateral à esquerda

$$H_1 : p < p_0$$

Região crítica:



$$Z_0 < -z_\alpha \quad \text{ou} \quad \widehat{P} < p_0 - z_\alpha \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$$

O valor P, como antes, é calculado como

$$\begin{aligned} \text{Teste bilateral:} \quad & P = 2 \times \mathrm{P}(Z > |z_0|) \\ \text{Teste unilateral:} \quad & P = \mathrm{P}(Z > |z_0|) \end{aligned}$$

Exemplo 9.1 ***Proporção de alunos***

Uma pesquisa foi realizada com alunos da UFF visando, entre outras coisas, estimar a proporção dos alunos que têm conhecimento do Regulamento dos Cursos de Graduação dessa universidade (dados fictícios). Foram entrevistados 952 alunos, selecionados aleatoriamente, dos quais 132 afirmaram ter lido o Regulamento dos Cursos de Graduação. Suponha que a universidade decida lançar uma campanha de esclarecimento se a verdadeira proporção de alunos que conhecem o regulamento for inferior a 15%. Há razão para se lançar essa campanha? Justifique sua resposta através de um teste de hipótese com nível de significância de 5%.

Solução:

Vamos seguir os mesmos passos vistos no capítulo anterior.

- Hipóteses nula e alternativa

  Afirmativa dada: $p < 0,15$

  Complementar: $p \geq 0,15$

  Isso nos leva às seguintes hipóteses:

$$\begin{aligned} H_0 &: p = 0,15 \\ H_1 &: p < 0,15 \end{aligned}$$

- Estatística de teste

  Sob a hipótese de que H_0 é verdadeira,

$$Z_0 = \frac{\widehat{P} - 0,15}{\sqrt{\frac{0,15 \times (1-0,15)}{952}}} = \frac{\widehat{P} - 0,15}{0,011573} \approx N(0,1)$$

- Nível de significância e região crítica

  O nível de significância é 5% e o teste é unilateral à esquerda; logo, a região crítica em termos da estatística padronizada é

$$RC : Z_0 < -z_{0,05} \Longrightarrow RC : Z_0 < -1,64$$

  que é equivalente a

$$\widehat{P} < 0,15 - 1,64 \cdot 0,011573 \qquad \text{ou} \qquad \widehat{P} < 0,131$$

- Decisão e conclusão

  O valor da estatística de teste padronizada é

$$z_0 = \frac{\frac{132}{952} - 0,15}{\sqrt{\frac{0,15 \times (1-0,15)}{952}}} = -0,9803 \not< -1,64.$$

  Temos também que

$$\widehat{p}_0 = \frac{132}{952} = 0,139 \not< 0,131$$

  O valor observado da estatística de teste (padronizada ou não) não está na região crítica; logo, não rejeitamos a hipótese nula, ou seja, não há razão para se lançar a campanha de esclarecimento.

♦♦

Exemplo 9.2

Um fabricante afirma que no máximo 10% dos seus produtos são defeituosos. Um órgão de defesa do consumidor testa uma amostra de 81 desses itens, detectando 13,8% de defeituosos.

(a) Encontre a região crítica para construção de um teste de hipótese apropriado ao nível de significância de 10%.

(b) Calcule o valor P.

Solução:

(a) • Hipóteses nula e alternativa

A afirmativa de interesse para o fabricante é $p \leq 0,10$. A negação de tal afirmativa (questionamento do órgão de defesa do consumidor) é $p > 0,10$. Logo, nossas hipóteses são:

$$H_0 : p = 0,10$$
$$H_1 : p > 0,10$$

Note que todas as proporções estão na forma decimal. Não trabalhe com porcentagens!

• Estatística de teste

Sob a hipótese de que H_0 é verdadeira,

$$Z_0 = \frac{\widehat{P} - 0,10}{\sqrt{\frac{0,10\times(1-0,10)}{81}}} = \frac{\widehat{P} - 0,10}{0,0333} \approx N(0,1)$$

• Nível de significância e região crítica

O teste é unilateral à direita e $\alpha = 0,10$. Logo, a região crítica em termos da estatística de teste padronizada é

$$RC : Z_0 > z_{0,10} \Longrightarrow RC : Z_0 > 1,28$$

ou

$$\widehat{P} > 0,10 + 1,28 * 0,0333 = 0,1426$$

• Decisão e conclusão

O valor da estatística de teste padronizada é

$$z_0 = \frac{0,138 - 0,10}{0,0333} = 1,14 \not> 1,28.$$

Temos também que

$$\widehat{p}_0 = 0,138 \not> 0,1426$$

O valor crítico da estatística de teste (padronizada ou não) não está na região crítica; logo, não podemos rejeitar a hipótese nula. Ou seja, nossos dados não fornecem evidência contra o fabricante.

(b)

$$P = \mathrm{P}(Z > 1,14) = 0,5 - tab(1,14) = 0,5 - 0,3729 = 0,1271$$

Logo, rejeitamos H_0 apenas para níveis de significância maiores que 12,7%. Assim, aos níveis de significância usuais, não devemos rejeitar H_0, o que é uma evidência de que o fabricante está dizendo a verdade.

♦♦

Exercícios

1. Em uma pesquisa com 800 estudantes de uma universidade, 385 afirmaram possuir computador. Teste a hipótese de que pelo menos 50% dos estudantes dessa universidade possuem computador. Use $\alpha = 0,10$.

2. Uma pesquisa entre 700 trabalhadores revela que 15,8% obtiveram seus empregos por meio de indicações de amigos ou parentes. Teste a hipótese de que mais de 10% dos trabalhadores conseguem seus empregos por indicação de amigos ou parentes, utilizando 5% como nível de significância.

3. O nível de aprovação da qualidade das refeições servidas em um restaurante universitário era 20%, quando houve uma movimentação geral dos estudantes que forçou a direção do restaurante a fazer mudanças. Feitas as mudanças, sorteou-se uma amostra de 64 estudantes usuários do restaurante e 25 aprovaram a qualidade da comida. Você diria, ao nível de significância de 2%, que as mudanças surtiram efeito?

4. Deseja-se testar a honestidade de uma moeda. Para isso, lança-se a moeda 200 vezes, obtendo-se 115 caras. Qual é a sua conclusão sobre a honestidade da moeda? Para responder a essa questão, calcule e interprete o valor P.

5. A direção de um grande jornal nacional afirma que 25% dos seus leitores são da classe A. Se, em uma amostra de 740 leitores, encontramos 156 da classe A, qual é a conclusão que tiraríamos sobre a afirmativa da direção do jornal?

Solução dos Exercícios

1. $\widehat{p} = \dfrac{385}{800} = 0,48125$

   A afirmativa de interesse é "pelo menos 50% dos estudantes possuem computador", ou seja, $p \geq 0,5$. Logo, as hipóteses são

   $$H_0 : p = 0,50$$
   $$H_1 : p < 0,50$$

   A estatística de teste é

   $$Z_0 = \frac{\widehat{P} - 0,5}{\sqrt{\frac{0,5\times 0,5}{800}}} = \frac{\widehat{P} - 0,5}{0,017678}$$

   $$\alpha = 0,10 \Longrightarrow z_{0,1} = 1,28 \Longrightarrow RC : Z_0 < -1,28$$

   ou

   $$\widehat{P} < 0,50 - 1,28 \times 0,017678 \text{ ou } \widehat{P} < 0,4774$$

O valor observado da estatística de teste padronizada é

$$z_0 = \frac{\frac{385}{800} - 0,5}{0,017678} = -1,06 \not< -1,28.$$

Temos também que

$$\widehat{p} = \frac{385}{800} = 0,48125 \not< 0,4774.$$

Como o valor observado da estatística de teste (padronizada ou não) não pertence à região crítica, não podemos rejeitar a hipótese nula. Ou seja, os dados trazem evidência de que a proporção de estudantes que possuem computador é de pelo menos 50%.

2. As hipóteses são

$$H_0 : p = 0,10$$
$$H_1 : p > 0,10$$

A estatística de teste padronizada é

$$Z_0 = \frac{\widehat{P} - 0,1}{\sqrt{\frac{0,1 \times 0,9}{700}}} = \frac{\widehat{P} - 0,1}{0,011339}$$

$$\alpha = 5\% \Longrightarrow z_{0,05} = 1,64. \Longrightarrow RC : Z_0 > 1,64$$

ou

$$RC : \widehat{P} > 0,1 + 1,64 \times 0,011339 \text{ ou } \widehat{P} > 0,1186$$

O valor observado da estatística de teste padronizada é

$$z_0 = \frac{0,158 - 0,10}{0,011339} = 5,115 > 1,64$$

e temos também que

$$\widehat{p} = 0,158 > 0,1186.$$

Rejeita-se, assim, a hipótese nula, ou seja, os dados trazem evidência de que mais de 10% dos trabalhadores conseguem seus empregos por indicação de parentes ou amigos.

3. O interesse é verificar se $p > 0,20$. Logo,

$$H_0 : p = 0,20$$
$$H_1 : p > 0,20$$

A estatística de teste padronizada é

$$Z_0 = \frac{\widehat{P} - 0,2}{\sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{64}}} = \frac{\widehat{P} - 0,2}{0,05}$$

$$\alpha = 0,05 \Longrightarrow z_{0,05} = 1,64$$

Como o teste é unilateral à direita, a região crítica é

$$RC : Z_0 > 1,64$$

ou ainda

$$\widehat{P} > 0,20 + 1,64 \times 0,05 \text{ ou } \widehat{P} > 0,282$$

O valor observado da estatística de teste padronizada é

$$z_0 = \frac{\frac{25}{64} - 0,20}{0,05} = 3,8124 > 1,64$$

ou ainda

$$\widehat{p} = \frac{25}{64} = 0,390625 > 0,282.$$

Como valor observado da estatística de teste (padronizada ou não) está na região crítica, rejeita-se a hipótese nula, ou seja, as evidências amostrais indicam que houve melhora com as mudanças.

4. As hipóteses são

$$H_0 : p = 0,5$$
$$H_1 : p \neq 0,5$$

A estatística de teste padronizada é

$$Z_0 = \frac{\widehat{P} - 0,5}{\sqrt{\frac{0,5 \times 0,5}{200}}} = \frac{\widehat{P} - 0,5}{0,035355}$$

O valor observado da estatística de teste

$$z_0 = \frac{\frac{115}{200} - 0,5}{0,035355} = 2,12$$

$$P = 2 \times \text{P}(Z > |2,12|) = 2 \times (0,5 - tab(2,12)) = 2 \times (0,5 - 0,4830) = 0,034$$

Como o valor P é relativamente pequeno, a probabilidade de obtermos 115 caras em 200 lançamentos de uma moeda honesta é pequena, o que nos leva a suspeitar da honestidade da moeda.

5. Com as informações disponíveis, nossas hipóteses são:

$$H_0 : p = 0,25$$
$$H_1 : p \neq 0,25$$

A estatística de teste padronizada é

$$Z_0 = \frac{\widehat{P} - 0,25}{\sqrt{\frac{0,25\times 0,75}{740}}} = \frac{\widehat{P} - 0,25}{0,015918}$$

O valor observado da estatística de teste padronizada é

$$\frac{\frac{156}{740} - 0,25}{0,015918} = -2,46$$

$$P = 2 \times \mathrm{P}(Z > |-2,46|) = 2 \times (0,5 - tab(2,46)) = 2 \times (0,5 - 0,4931) = 0,0138$$

Como o valor P é bastante pequeno, devemos rejeitar a hipótese nula de que a proporção de leitores da classe A é igual a 25%.