UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Lista de Exercícios – Matemática para Economia III

Exercício 1. *Dados os vetores* $u = (1, 2, 1)$, $v = (3, 4, -9)$, $w = (0, 1, -7\pi)$ *e* $y = (0, -87, -e^{-\pi})$ *determine o vetor* $x = u + 8v - 47w + 5y$.

Exercício 2. *Determine os vetores* $u, v \in \mathbb{R}^4$ *sabendo que as coordenadas de* u *são todas iguais, a última coordenada de* v *é igual a* 3 *e* $u + v = (1, 2, 3, 4)$.

Exercício 3. *Mostre que* $v = (9, 46) \in \mathbb{R}^2$ *é combinação linear dos vetores* $a = (1, 7)$ *e* $b = (3, 4)$.

Exercício 4. *Considere* $u = (1, 2, 3)$, $v = (3, 2, 0)$ *e* $w = (2, 0, 0)$, *vetores em* $\mathbb{R}^3$ *e decida se o vetor* $x = (1, 1, 1)$ *pode ser escrito como combinação linear dos vetores* u, v *e* w. *Em caso afirmativo, determine os números reais* α, β *e* γ *tais que*

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = x.$$

Exercício 5. *Sejam* $\alpha_1, ..., \alpha_d$ *números reais. Mostre que*

$$H = \{(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d; \sum_{j=1}^{d} \alpha_j x_j = 0\}$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^d$.

Exercício 6. *Considere* $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *o espaço vetorial das funções reais contínuas. Seja*

$$F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f \text{ é diferenciável}\} \subset C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Prove que F *é um subespaço.*

Exercício 7. *Decida se as frases a são seguir são verdadeiras ou falsas:*

1. *o vetor* $(1, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ *pertence ao subespaço gerado por* $(1, 1, 0)$ *e* $(\pi^3, 0, 0)$.
2. *os vetores* $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ *e* $(2, 4, 6)$ *são linearmente independentes*
3. *os vetores* $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$ *e* $(2, 4, 6)$ *geram* $\mathbb{R}^3$.

*Justifique suas respostas (*Dica: *utilize argumentos geométricos e não faça cálculos).*

Exercício 8. *Mostre que o vetor* $x = (4, 1, 5)$ *pertence ao subespaço gerado pelos vetores* $u = (1, 1, 1)$, $v = (3, 0, 4)$ *e* $w = (7, 7, 7)$.

Exercício 9. *Mostre que* $X = \{(1, 2), (-1, 2)\} \subset \mathbb{R}^2$ *é um conjunto de geradores de* $\mathbb{R}^2$.

Exercício 10. *Sejam* $u = (1, 2, 3), v = (4, 5, 6), w = (7, 8, 9) \in \mathbb{R}^3$. *Prove que* $\{u, v, w\}$ *é um conjunto LD.*

Exercício 11. *Considere* $a = (37, 0, 0, 0, 0)$*,* $b = (0, 47, 0, 0, 0)$*,* $c = (0, 0, \pi^2, 0, 0)$*,* $d = (0, 0, 0, \sin\frac{37}{45}, 0)$ *e* $e = (0, 0, 0, 0, \frac{7}{8})$ *vetores em* $\mathbb{R}^5$*. Prove que* $\{a, b, c, d, e\}$ *é uma base de* $\mathbb{R}^5$*.*

Exercício 12. *Sem fazer cálculos, mostre que os vetores* $u = (1, 1)$ *e* $v = (-1, 1)$ *formam uma base de* $\mathbb{R}^2$*.*

Exercício 13. *Seja* $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *o operador linear definido por*

$$A(x, y) = (5x + 4y, -3x - 2y).$$

Encontre vetores não-nulos $u = (x, y)$ *e* $v = (a, b)$ *tais que* $Au = u$ *e* $Av = 2v$*.*

Exercício 14. *Seja* $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ *tal que* $A(1, 1, 1, 1) = (9, 8, 0, 7, -2)$*,* $A(1, 2, 1, -3) = (9, 9, 9, 9, 9)$*. Determine* $A(9, 9, 9, 9)$ *e* $A(2, 3, 2, -2)$*.*

Exercício 15. *Seja* $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *uma transformação linear tal que* $A(-1, 1) = (1, 2, 3)$ *e* $A(2, 3) = (1, 1, 1)$*. Determine* $A(25, -37)$*.*

Exercício 16. *Prove que as transformações lineares a seguir são invertíveis (*Sugestão: em cada caso, analise o núcleo da transformação*).*

1. $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; $A(x) = (x, 2x, ..., nx)$
2. $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $A(x, y) = (x + 2y, x + y, x - y)$
3. $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$; $A(x, y, z) = (2x, 3y, 5z, x + y + z)$

Exercício 17. *Seja* $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear cuja matriz na base canônica é*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prove que se

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

é a matriz de A *relativamente a uma base qualquer de* $\mathbb{R}^2$ *então* $b \neq 0$*, ou* $c \neq 0$*. Em outras palavras: nenhuma matriz de* A *é diagonal.*

Exercício 18. *Sabendo-se que a matriz da transformação linear* $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *relativamente à base* $\{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^3$*, onde* $u = (1, 1, 1)$*,* $v = (1, 2, 1)$ *e* $w = (1, 1, 3)$ *é*

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

determine a matriz de A *relativamente à base canônica* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *de* $\mathbb{R}^3$*.*

Exercício 19. *Calcule o posto das matrizes abaixo*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 17 \end{bmatrix}.$$

Exercício 20. *Exprima cada um dos vetores da base canônica* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *como combinação linear dos vetores* $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (-1, 0, 2)$ *e* $v_3 = (4, 2, -5)$. *Determine a inversa da matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Exercício 21. *Calcule o determinante das matrizes abaixo*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix},$$

Quais destas matrizes são invertíveis? Para aquelas que o forem, calcule a matriz inversa.

Exercício 22. *Calcule a dimensão do subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^5$ *gerado pelos vetores* $v_1 = (2, 4, 8, -4, 7)$, $v_2 = (4, -2, -1, 3, 1)$, $v_3 = (3, 5, 2, -2, 4)$ *e* $v_4 = (-5, 1, 7, -6, 2)$. *Decida se o vetor* $b = (6, 18, 1, -9, 8)$ *pertence ou não a este subespaço.*

Exercício 23. *Calcule o determinante da matriz*

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -9 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 24. *Calcule* $\|u+8w-40v\|$, *onde* $u = (9, 0, 1)$, $v = (3, 4, 1)$ *e* $w = (1/8, 1/8, 1/8)$.

Exercício 25. *Encontre o ângulo entre a diagonal de um cubo e qualquer uma de suas arestas. (*Dica: *use o produto interno.)*

Exercício 26. *Seja* $v = (1, 2, 3, 4, 5, 6) \in \mathbb{R}^6$. *Encontre* $k \in \mathbb{R}$ *tal que* $\|kv\| = \pi$. *Qual a quinta coordenada do vetor unitário que possui a mesma direção de* v*?*

Exercício 27. *Encontre a distância entre o ponto* $P = (1, -4, 3)$ *e o plano* Π *de equação* $2x - 3y + 6z = -1$

Exercício 28. *Decida se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas, justificando sua resposta:*

1. *Se* $u, v \in \mathbb{R}^d$ *são tais que* $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ *então* u *e* v *são ortogonais.*
2. *Se* $u \in \mathbb{R}^d$ *é ortogonal a* $v + w$ *então* u *é ortogonal a* v *e a* w.

Exercício 29. *Encontre as coordenadas de* $w = (9, 78) \in \mathbb{R}^2$ *relativamente à base* $\{(1, 2), (-2, 1)\}$.

Exercício 30. *Calcule os autovalores da matriz* $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$. *Mostre que* $\mathbb{R}^2$ *admite uma base de autovetores de* A. *Encontre esta base e determine as matrizes* P *e* Q *tais que* PAQ *seja uma matriz diagonal.*

Exercício 31. *Calcule* $A^{666}(v)$*, onde* $v = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$ *e*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & 1/2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 32. *Seja* A *uma matriz* 2×2*. Mostre que o polinômio característico de* A *é*

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A) + \det(A).$$

Exercício 33. *Encontre os autovalores e autovetores de* A^{-1} *onde*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Exercício 34. *Calcule os autovalores das matrizes abaixo*

(a) $A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}.$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$

(a) Uma matriz A *é dita* nilpotente *se existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $A^n = 0$*. Calcule os autovalores de* A*, assumindo que* A *é nilpotente.*

Exercício 35. *Resolva o sistema (ache funções* $x(t)$ *e* $y(t)$ *que satisfaçam às equações)*

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + 4y(t) \qquad (1) \\ y'(t) &= 2x(t) + 3y(t) \qquad (2) \end{aligned}$$