UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE

Lista de Problemas I – Matemática III para Economia

Professor: Bruno Santiago

Apresente suas soluções de forma clara e completa, justificando cada etapa do raciocínio.

Problema 1 (Benefícios de Doações *0.2pt*)**.** *Uma empresa possui um lucro de R\$100.000,00, antes de serem contados os impostos. Suponha que seja permitido a empresa doar uma porcentagem de seu lucro líquido (já descontados os impostos) e que o valor doado não seja computado no cálculo dos impostos. Suponha que a empresa decida doar então 10% de seu lucro líquido, e que o imposto estadual seja de 5% do lucro descontado o valor doado, e que o imposto federal seja de 40% do lucro descontados o imposto estadual e o valor da doação. Determine o custo efetivo da doação, ou seja, o valor doado descontado da dedução fiscal.*

Problema 2 (O problema das medalhas *0.2pt*)**.** *Três equipes participam de um torneio esportivo amador em que provas de diversas modalidades foram disputadas. Como nos jogos olímpicos, aos vencedores de cada prova foram atribuídas medalhas de ouro, prata e bronze para o 1º, o 2º e o 3º lugar, respectivamente. A quantidade de medalhas de cada equipe bem como sua pontuação final são apresentadas na tabela a seguir.*

Equipes	Medalhas			Pontuação Final
	Ouro	Prata	Bronze	
A	4	2	2	**46**
B	5	3	1	**57**
C	4	3	3	**53**

Figura 1: Quadro de medalhas para equipes A, B e C.

Quantos pontos valem cada medalha de ouro, prata e bronze?

Problema 3 (O problema do fluxo de tráfego *0.2pt*)**.** *Suponhamos a seguinte situação, inspirada em fatos reais: com o intuito de melhor planejar as ações do* Programa Niterói de Bicicleta*, a prefeitura de Niterói decidiu fazer uma contagem de ciclistas nas principais vias da cidade. Para realizar esta tarefa, dedicou agentes da* Nitrans *para realizar a contagem de ciclistas que passam por cada via, em cada intervalo de 60 minutos. Como o número de agentes é limitado, a prefeitura decide contratar uma consultoria matemática que usará Álgebra Linear para melhor alocar os agentes. Na figura a seguir estão indicados quatro cruzamentos e a quantidade de ciclistas que passam por cada via, antes e depois de cada cruzamento. Observe que quatro destas quantidades não estão indicadas na figura, pois não é preciso dedicar agentes para fazer estas contagens, já que usando-se Álgebra Linear podemos determinar estas quantidades. Ajude a prefeitura de Niterói e mostre como é possível fazer isso.*

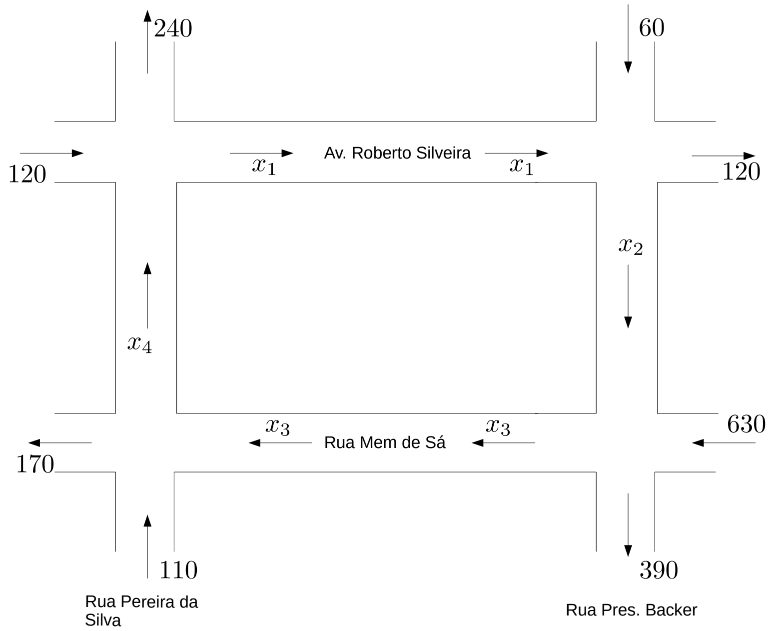

Figura 2: As quantidades de ciclistas x_1, x_2, x_3 e x_4 podem ser facilmente determinadas usando-se um pouco de Álgebra Linear.

Problema 4 (Quadrados Mágicos *0.4pt*)**.** *Uma matriz quadrada $d \times d$ é dita um quadrado mágico quando a soma das entradas em cada linha, em cada coluna e nas diagonais é uma constante.*

(a) Mostre que o conjunto dos quadrados mágicos forma um subespaço de dimensão $d^2 - 2d$ do espaço $\mathcal{M}(d \times d)$ das matrizes $d \times d$.

(b) Determine os valores a serem colocados nas entradas com asterisco na matriz abaixo de modo à torná-la um quadrado mágico.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & * \\ 4 & 5 & 6 & * \\ 7 & 8 & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Problema 5 (O problema das compras *0.2pt*)**.** *Um empresário do ramo da gastronomia possui 4 restaurantes (R1,R2,R3 e R4) e precisa decidir os fornecedores de tomates, cebolas, coentro, morangos e laranjas, para cada um deles. As demandas (em Kg) de cada* *produto por parte de cada restaurante estão especificadas na tabela abaixo.*

	tomates	*cebola*	*coentro*	*morango*	*laranja*
R1	60	50	35	41	76
R2	40	43	32	70	35
R3	23	27	29	41	32
R4	31	32	30	28	44

Dois pequenos produtores (P1 e P2) ofertam esses produtos por preços (para cada Kg, em reais) designados na tabela abaixo

	$P1$	$P2$
tomates	$0,98$	$1,33$
cebola	$1,78$	$1,23$
coentro	17	$16,89$
morango	$4,89$	$5,45$
laranjas	$5,76$	$4,99$

Suponha que estes preços só sejam garantidos se todos os produtos forem comprados juntos. Determine, para cada restaurante, em qual produtor é mais vantajoso comprar, de modo que o custo de aquisição seja o menor possível.

Problema 6 (O problema dos hiperlinks *0.4pt*). *Suponha que* A_1, A_2, A_3 *e* A_4 *sejam páginas da* Internet. *Considere a matriz quadrada* A *na qual a entrada* a_{ij} *é* 1 *se a página* A_i *faz um* link *para a página* A_j, *e* 0 *caso contrário. Suponha que*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para cada $i, j = 1, 2, 3, 4$ *determine de quantas formas diferentes é possível ir da página* A_i *para a página* A_j *com, no máximo, 4 cliques.*

Problema 7 (O modelo *input-output* de Leontief *0.4pt*). *Suponha uma economia constituída por* n *setores* $S_1, ..., S_n$. *Cada setor* S_i *consome uma porcentagem* p_{ij} *da produção do setor* S_j. *Suponhamos o "modelo fechado"para esta economia: nenhuma outra commoditie entra nessa economia. Denotamos por* x_i *a quantidade produzida pelo setor* S_i. *Assumimos que* $x_i \geq 0$, *para toto* $i = 1, ..., n$.

(a) *Considere o caso em que a economia é constituída por três setores* S_1, S_2 *e* S_3 *e que a matriz* $[p_{ij}]$ *que determina que fração da produção do setor* S_i *é consumida pelo setor* S_j *seja dada por*

$$P = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Observe que a soma das entradas em cada coluna dessa matriz é igual a 1. Explique este fato. Para que esta economia esteja em equilíbrio, deve existir um vetor de produção $x = (x_1, x_2, x_3)$ *de modo que o consumo de cada setor* S_i *seja igual a produção* x_i *deste setor. Supondo que ao menos um destes vetores existe, determine todos eles.*

(b) ***Bonus: 0.4pt*** *No caso geral de uma economia com* 3 *setores, mostre que sempre existe um vetor de produção que equilibra a economia, ou seja, de modo que o consumo de cada setor S_i seja igual a produção x_i deste setor.*