

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE

Lista de Problemas II – Matemática para Economia III
Professor: Bruno Santiago

Apresente suas soluções de forma clara e completa, justificando cada etapa do raciocínio.

Soluções incompletas não serão pontuadas.

Problema 1 (O destino do Vasco 0.2pt). *O Campeonato Brasileiro de Futebol é uma competição disputada em dois turnos por 20 equipes. Assim, cada equipe faz 38 jogos no campeonato. Cada vitória vale 3 pontos, cada empate 1 ponto, e derrotas não pontuam. A equipe campeã é aquela que soma mais pontos ao final da competição. As quatro equipes com menor pontuação são rebaixadas para a segunda divisão do campeonato. Os dados das edições anteriores mostram que com 48 pontos uma equipe consegue escapar do rebaixamento. Arthur torce pelo Vasco e gostaria de saber qual o número mínimo de vitórias que o Vasco precisa ter para escapar do rebaixamento. Qual é esse número?*

Problema 2 (Triângulos em grafos 0.6pt). *Um arquipélago é composto por n ilhas e k pontes conectando algumas dessas ilhas. Demonstre que se $k > \frac{n^2}{4}$ então existem ilhas A , B e C nesse arquipélago e pontes AB , AC e BC . Dê um exemplo com $k = \frac{n^2}{4}$ e tal que a conclusão seja falsa. (Dica: esse é o Teorema de Mantel da teoria de Grafos. Veja por exemplo Bela Bollobas, Modern Graph Theory, Cap. 01. A ideia é que se um grafo possui um número suficientemente grande de arestas, em comparação com a quantidade vértices, então o grafo contém um triângulo, obrigatoriamente.)*

Problema 3 (Caminhos em Malta 0.2pt). *O arquipélago de Malta, no sul da Europa, é composto por três ilhas: Malta, Comino e Gozo. Existem barcos ligando Comino à Gozo e Comino à Malta. Determine de quantas formas diferentes é possível ir de Malta à Gozo fazendo-se exatamente 666 travessias.*

Problema 4 (Modelo Markoviano de Desemprego 0.6pt). *Suponha que exista uma probabilidade p de uma pessoa empregada tornar-se desempregada no próximo mês (e portanto com probabilidade $1-p$ esta pessoa continua empregada no próximo mês), e uma probabilidade q de uma pessoa desempregada tornar-se empregada no próximo mês (e portanto com probabilidade $1-q$ esta pessoa continua desempregada no próximo mês). As constantes p e q são números reais entre 0 e 1, e são ajustadas de acordo com as configurações da economia. Assim, se x pessoas estão empregadas atualmente, e y pessoas estão desempregadas então*

$$px + (1 - q)y$$

pessoas estarão desempregadas no próximo mês, ao passo que

$$(1 - p)x + qy$$

pessoas estarão empregadas no próximo mês. Mostre que existem números $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que se β pessoas estão desempregadas agora e α pessoas estão empregadas, então teremos as mesmas quantidades (α e β) de pessoas empregadas e desempregadas no próximo

mês. Ou seja, prove que existe uma taxa de desemprego que permanece constante ao longo do tempo. (Dica: isto equivale a demonstrar o caso $n = 2$ do Teorema de Perron-Frobenius.)

Problema 5 (Pagerank, ou quase 0.2pt). Um grupo de quatro adolescentes (Mario, João, José e Rodrigo) quer eleger qual dentre eles é o “Rei da rede social”. Para isso eles decidem que a importância de um perfil mede-se de acordo com as curtidas que ele recebe. No início, todos tem a mesma importância (digamos, $1/4$). Em seguida, cada perfil transfere uma fração de sua importância para cada perfil por ele curtido. Por exemplo, se Mário curtiu três perfis cada um deles receberá $1/3$ da importância do perfil de Mário. Podemos continuar esse procedimento, e com isso a importância de cada perfil modifica-se a cada etapa até atingir um valor limite. Nesse valor limite a soma dos ganhos de importância, vindos dos perfis que curtem um dado perfil, coincide com a importância desse perfil. Suponha que Mário curte todos os perfis, exceto o seu próprio; João curte apenas José e Rodrigo, José curte apenas Mario e Rodrigo curte Mário e José. Determine qual dos 4 adolescentes possui o perfil mais importante, seguindo esse critério, e quanto mede essa importância.

Problema 6 (Risco versus segurança em investimento 0.2pt). Uma investidora possui uma capacidade de investir de no máximo R\$10000. Seu gerente oferece duas opções de investimento: A e B. O investimento A é muito arriscado mas oferece um lucro de 10% ao ano, ao passo que o investimento B é muito seguro, mas oferece um lucro de 7% ao ano. Após alguma reflexão, ela decide investir no máximo R\$ 6000 na opção A e pelo menos R\$ 2000 na opção B. Como ela deve investir de modo a maximizar seus lucros, e qual o lucro máximo nesse caso?