UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE

Lista de Exercícios – Álgebra Linear

Professor: Bruno Santiago

Exercício 1 (Nota do curso)**.** *A nota de cada estudante em um turma de Álgebra Linear é dada por um vetor $x \in \mathbb{R}^{10}$, onde $x_1, ..., x_8$ são as notas das 8 listas de exercícios para entregar, cada uma valendo nota em uma escala 0-10, x_9 é nota da primeira avaliação (em escala 0-120) e x_{10} é a nota da avaliação final (numa escala de 0-160). A nota final, numa escala de 0-100, é baseada 25% nas listas de exercícios, 35% na primeira avaliação e 40% na segunda avaliação. Determine o vetor $y \in \mathbb{R}^{10}$ tal que a nota final do estudante seja dada pelo produto interno $\langle x, y \rangle$.* ***Dica****:* teste sua solução em Julia. Você pode, por exemplo, simular um aluno que gabaritou todas as listas (portanto tirou 10 em todas) e avaliações (portanto 120 e 160). Se você acertou o vetor y, o produto interno tem que retornar 100. Similarmente, se o vetor de notas for $x = (5, ..., 5, 60, 80)$ (ou seja, ou aluno acertou metade em tudo) então sua nota final tem que ser 50.

Exercício 2 (Sistemas lineares de baixa dimensão)**.** *Para cada um dos problemas abaixo, monte um sistema de equações lineares que o traduza e resolva o problema.*

1. *Determine os vetores $u, v \in \mathbb{R}^4$ sabendo que as coordenadas de u são todas iguais, a última coordenada de v é igual a 3 e $u + v = (1, 2, 3, 4)$.*
2. *Mostre que $v = (9, 46) \in \mathbb{R}^2$ é combinação linear dos vetores $a = (1, 7)$ e $b = (3, 4)$.*
3. *Considere $u = (1, 2, 3)$, $v = (3, 2, 0)$ e $w = (2, 0, 0)$, vetores em $\mathbb{R}^3$ e decida se o vetor $x = (1, 1, 1)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores u, v e w. Em caso afirmativo, determine os números reais α, β e γ tais que*

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = x.$$

Exercício 3 (Contadores de palavras)**.** *Suponha que $x \in \mathbb{R}^n$ represente o vetor de contagem de palavras de um documento, dentro de um dicionário de n palavras. Vamos supor que todas as palavras do documento estão no dicionário.*

(a) Qual o significado do número $\beta = \langle \mathbb{I}, x \rangle$, onde $\mathbb{I} = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$?

(b) O que significa $x_{666} = 0$?

(c) Seja $y \in \mathbb{R}^n$ o vetor que dá o histograma de contagem de palavras, ou seja, y_i é a fração de palavras no documento iguais a i-ésima palavra no dicionário. Expresse y em função de x e β.

Exercício 4 (O escopo de uma combinação linear I)**.** *Mostre que $v = (9, 46) \in \mathbb{R}^2$ é combinação linear dos vetores $a = (1, 7)$ e $b = (3, 4)$.*

Exercício 5 (Verdadeiro ou falso)**.** *Decida se as frases a são seguir são verdadeiras ou falsas:*

1. *o vetor* $(1,3,1) \in \mathbb{R}^3$ *pertence ao subespaço gerado por* $(1,1,0)$ *e* $(\pi^3,0,0)$.

2. *os vetores* $(1,2,3)$, $(4,5,6)$ *e* $(2,4,6)$ *são linearmente independentes*

3. *os vetores* $(1,2,3)$, $(4,5,6)$ *e* $(2,4,6)$ *geram* $\mathbb{R}^3$.

*Justifique suas respostas (*Dica: *utilize argumentos geométricos e não faça cálculos).*

Exercício 6 (Geradores do plano)**.** *Mostre que* $X = \{(1,2),(-1,2)\} \subset \mathbb{R}^2$ *é um conjunto de geradores de* $\mathbb{R}^2$*. Mais geralmente, mostre que se* $u, v \in \mathbb{R}^2$ *não pertencem à mesma reta então* $\mathcal{S}(u,v) = \mathbb{R}^2$*; em outras palavras, se* $u \in \mathbb{R}^2$ *não é múltiplo de* $v \in \mathbb{R}^2$ *então* $\{u,v\}$ *é um conjunto de geradores de* $\mathbb{R}^2$.

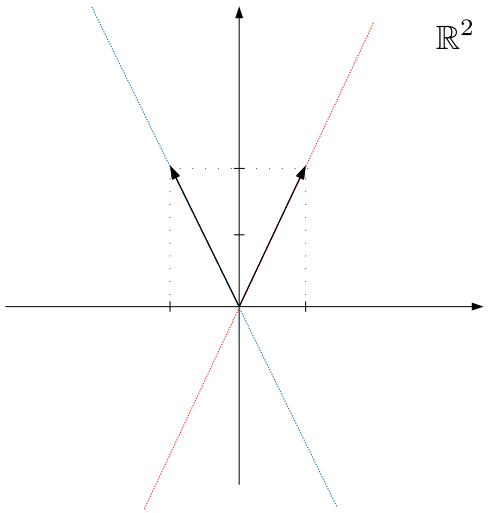

Figura 1: Dica para o exercício 6: os dois vetores não estão sobre a mesma reta, por isso devem formar um conjunto de geradores do espaço $\mathbb{R}^2$.

Exercício 7 (Idade média numa população)**.** *Suponha que o vetor* $x \in \mathbb{R}^{100}$ *represente a distribuição de idades em uma determinada população, de modo que* x_i *seja o número de pessoas com idade* $i-1$*. Suponha, por simplicidade que* $x \neq 0$ *e que ninguém tem idade superior a 99 nessa população. Usando notação vetorial, encontre fórmulas que deem, em função de* x *e de suas entradas,*

(a) A quantidade de pessoas na população.

(b) A quantidade de pessoas com 65 anos ou mais.

(c) A idade média da população

Exercício 8 (Combinações lineares de combinações lineares)**.** *Suponha que cada um dos vetores* $b^1, ..., b^k$ *seja combinação linear dos vetores* $a^1, ..., a^m$*, e que* c *seja combinação linear dos vetores* $b^1, ..., b^k$*. Prove que* c *é combinação linear dos vetores* $a^1, ..., a^m$.Dica: tente fazer primeiro o caso $m = k = 2$ para você entender como o problema funciona

Exercício 9 (Usando os axiomas)**.** *Sejam E um espaço vetorial, $v \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Suponha que $\lambda v = 0$.*

(a) A partir dos axiomas de espaço vetorial demonstre que ou $\lambda = 0$ ou $v = 0$.

(b) Prove que $-(-v) = v$.

Exercício 10 (Produto interno euclideano com pesos)**.** *Dados números reais não-negativos $p_1, ..., p_d$, considere a função $P : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida por*

$$P(x, y) = \sum_{j=1}^{d} p_j x_j y_j, \ \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Prove que P define um produto interno em $\mathbb{R}^d$. Observe que o produto interno euclideano é um caso particular dessa função quando $p_1 = p_2 = ... = p_d = 1$

Exercício 11 (A norma ℓ^1 em $\mathbb{R}^d$)**.** *Prove que a função $\|.\|_1 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{d} |x_j|$$

é uma norma.

Exercício 12 (O teorema de Pitágoras em espaços de Hilbert)**.** *Esse exercício é conceitualmente sofisticado e tecnicamente simples (até mesmo fácil, a parte difícil é conceitual mesmo). Ele visa apenas familiarizar você com nomes rebuscados do mundo da matemática que você já aprendeu e nem se deu conta. Um espaço vetorial munido de um produto interno é o que chamamos um* espaço de Hilbert*. Assim, quando você ler "*seja H um espaço de Hilbert*"você deve ler "*seja H um espaço vetorial e seja $P : H \times H \to \mathbb{R}$ um produto interno em H*".*

Então, seja H um espaço de Hilbert. Por um motivo meramente estético, vamos denotar $P(x, y) = \langle x, y \rangle$[1]. Seja $\|x\| = \langle x, x \rangle$ a norma advinda do produto interno de H. Prove que

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2, \ \ \forall \ x, y \in H.$$

Em particular, se $x \perp y$ então

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Se você parar e analisar as fórmulas, vai notar que a primeira generaliza a lei dos cossenos e a segunda o teorema de Pitágoras, em espaços de Hilbert (veja a Figura 2).

Exercício 13 (Erro de previsão de temperatura)**.** *Suponha que $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^d$ sejam, respectivamente, a temperatura medida a cada hora em d intervalos e a previsão para esta medição, fornecida pela meteorologia. Vamos supor que a previsão acerte em cheio 87% das medições, e que os erros cometidos são de pelo menos 1^oC, e no máximo 8^oC. Mostre que a distância* rms *entre x e $\hat{x}$ é limitada independentemente da quantidade de medições, enquanto que a distância euclideana entre x e $\hat{x}$ aumenta arbitrariamente quando o número d de medições cresce.* Esse exercício ilustra como a escolha de qual distância utilizar depende completamente da aplicação que se tem em mente.

[1]Isso tem um pouco mais do que apenas estética para falar a verdade: os espaços de Hilbert de dimensão infinita são os espaços de dimensão infinita que mais se parecem com os espaços euclideanos.

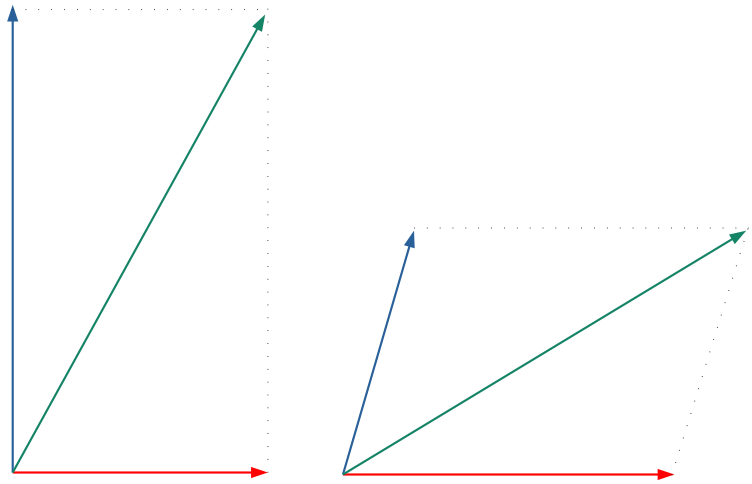

Figura 2: A lei dos cossenos e o teorema de Pitágoras em espaços de Hilbert.

Exercício 14 (Explorando Chebyshev)**.** *Seja $x \in \mathbb{R}^{100}$ tal que* rms$(x) = 1$*. Qual o número máximo de entradas de x que podem satisfazer $|x_\ell| \geq 3$. Se a sua resposta for k explique porque nenhum vetor com valor* rms *igual a 1 pode ter $k+1$ entradas com valor absoluto pelo menos 3, e dê um exemplo específico de um vetor de $\mathbb{R}^{100}$ com exatamente k entradas com valor absoluto pelo menos 3.*

Exercício 15 (A recíproca de Chebyshev)**.** *Seja $x \in \mathbb{R}^d$. Prove ao menos uma entrada de x possui valor absoluto maior do que ou igual a* rms(x)*.*

Exercício 16 (A lei do paralelogramo)**.** *Seja E um espaço vetorial com produto interno (ou seja, um espaço de Hilbert!). Considere a norma induzida pelo produto interno. Prove a seguinte identidade:*

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2).$$

Informação: *a lei do paralelogramo só vale para normas induzidas por algum produto interno. Por exemplo, considere a norma ℓ^1 em $\mathbb{R}^2$ (veja o exercício 11). Verifique que existem vetores $a, b \in \mathbb{R}^2$ para os quais a lei do paralelogramo (com a norma ℓ^1) não vale.*

Exercício 17 (Mais verdadeiro ou falso)**.** *Decida se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas, justificando sua resposta:*

1. *Se $u, v \in \mathbb{R}^d$ são tais que $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ então u e v são ortogonais.*
2. *Se $u \in \mathbb{R}^d$ é ortogonal a $v+w$ então u é ortogonal a v e a w.*

Exercício 18 (Triângulos em grafos)**.** *Um arquipélago é composto por n ilhas e k pontes conectando algumas dessas ilhas. Demonstre que se $k > \frac{n^2}{4}$ então existem ilhas A, B e C nesse arquipélago e pontes AB, AC e BC. Dê um exemplo com $k = \frac{n^2}{4}$ e tal que a conclusão seja falsa. (*Dica: *esse é o Teorema de Mantel da teoria de Grafos. Veja por exemplo* Bela Bollobas, Modern Graph Theory*, Cap. 01. A ideia é que se um grafo possui um número suficientemente grande de arestas, em comparação com a quantidade vértices, então o grafo contém um triângulo, obrigatoriamente.)*

Exercício 19 (Linearidade da média)**.** *Considere a função* $\mu : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *que calcula a média das entradas de* x

$$\mu(x) = \frac{1}{d}\sum_{\ell=1}^{d} x_\ell.$$

Prove que μ *é linear e use isso para mostrar que* $\mu(x^c) = 0$*.*

Exercício 20 (Versão padronizada)**.** *Dado* $x \in \mathbb{R}^d$ *a* versão padronizada *de* x *é o vetor*

$$x^p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x^c}{\sigma(x)},$$

onde x^c *é a versão centrada de* x*. Prove que a versão padronizada tem média zero e desvio padrão unitário, i.e.* $\mu(x^p) = 0$ *e* $\sigma(x^p) = 1$*.*

Exercício 21 (Energia de Dirichlet de um sinal)**.** *Suponha que* $x \in \mathbb{R}^d$ *represente uma série temporal ou um sinal discreto. A quantidade*

$$\mathcal{D}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\ell=1}^{d-1}(x_\ell - x_{\ell+1})^2 = (x_1 - x_2)^2 + ... + (x_{d-1} - x_d)^2,$$

que dá a soma dos quadrados das diferenças entre entradas adjacentes, é chamada a energia de Dirichlet *do sinal* x*. Ela fornece uma medida da oscilação absoluta do sinal.*

(a) Descreva $\mathcal{D}(x)$ *em notação vetorial (usando coordenadas, produto interno, etc...)*

(b) Qual o menor valor possível da energia de Dirichlet? Que vetores assumem esse menor valor de $\mathcal{D}(x)$*?*

(c) Encontre $x \in \mathbb{R}^d$ *com todas as entradas menores ou iguais do que 1 em valor absoluto e tal que* $\mathcal{D}(x)$ *seja o mair possível. Expresse esse maior valor possível em função de* d*.*

Exercício 22 (Funções lineares preservam combinações lineares)**.** *Seja* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ *uma função linear tal que* $f(1,1,1,1) = (9,8,0,7,-2)$*,* $f(1,2,1,-3) = (9,9,9,9,9)$*. Determine* $f(9,9,9,9)$ *e* $f(2,3,2,-2)$*.*

Exercício 23 (Investindo em moeda)**.** *Considere* $x \in \mathbb{R}^d$ *como uma série temporal na qual a entrada* x_j *dá o retorno (percentual) de um investimento, no mês* j *após o início do investimento. Sejam* $\mu = \mu(x)$ *e* $\sigma = \sigma(x)$ *o retorno (a média das entradas de* x*) e o risco (o desvio padrão das entradas) do investimento* x*. Vamos considerar o investimento em moeda como um investimento que dá sempre o mesmo retorno. Assim,* $m \in \mathbb{R}^d$ *dado por* $m = \lambda\mathbb{I}$ *é a série temporal de um investimento em moeda e* $\lambda \in (0,1)$ *é a taxa de retorno constante. Claramente, o risco desse investimento é zero, ou seja* $\sigma(m) = 0$*. Vamos criar um portfólio simples que consiste em investir uma fração* $\xi \in (0,1)$ *do capital em* x *e a outra* $(1-\xi)$ *em* m*. Nesse caso, a série temporal de retornos é o vetor* z *dado por*

$$z = \xi x + (1-\xi)m,$$

a combinação convexa entre os vetores x *e* m*. Nesse caso estamos fazendo um tipo de* blending*, investindo uma parte em moeda e outra parte em* x*.*

(a) *Deduza uma fórmula para o retorno $\mu(z)$ e o risco $\sigma(z)$ do investimento z, em função de μ, σ, ξ e λ.*

(b) *Assuma $\xi \in \mathbb{R}$. Por exemplo, quando $\xi > 1$ estamos emprestando dinheiro e usando o pagamento para investir mais em x. Dado $r > 0$ explique como escolhemos ξ de modo que o risco do investimento z seja precisamente r.*

(c) *Usando sua resposta ao item interior, explique quando é interessante usar $\xi > 1$ ou $\xi < 1$.*

Exercício 24. *Seja $\delta : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ o operador diferenciação agindo no espaço dos polinômios. Prove que δ é linear.*

Exercício 25 (O funcional de integração no espaço dos polinômios)**.** *Seja $\mathrm{I} : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dado por $\mathrm{I}(p) = \int_0^1 p(x)dx$. Prove que I é linear.*

Exercício 26 (Hiperplanos são subespaços)**.** *Sejam $\alpha_1, ..., \alpha_d$ números reais. Mostre que*

$$H = \{(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d; \sum_{j=1}^{d} \alpha_j x_j = 0\}$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^d$.

Exercício 27 (Soma de subespaços)**.** *Sejam X e Y subespaços vetoriais de um espaço vetorial E. Prove que $X + Y$ é um subespaço. Prove que $X \cap Y$ também é um subespaço.*

Exercício 28 (Se é LI ninguém é zero)**.** *Mostre que se $X = \{x_1, ..., x_k\} \subset E$ é LI então nenhum vetor $x_i \in X$ é o vetor nulo.*

Exercício 29 (Quadrados mágicos)**.** *Uma matriz quadrada $d \times d$ é dita um quadrado mágico quando a soma das entradas em cada linha, em cada coluna e nas diagonais é uma constante.*

(a) *Mostre que o conjunto dos quadrados mágicos forma um subespaço de dimensão $d^2 - 2d$ do espaço $\mathcal{M}(d \times d)$ das matrizes $d \times d$.*

(b) *Determine os valores a serem colocados nas entradas com asterisco na matriz abaixo de modo à torná-la um quadrado mágico.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & * \\ 4 & 5 & 6 & * \\ 7 & 8 & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Exercício 30 (Base do $\mathbb{R}^5$)**.** *Considere $a = (37, 0, 0, 0, 0)$, $b = (0, 47, 0, 0, 0)$, $c = (0, 0, \pi^2, 0, 0)$, $d = (0, 0, 0, \sin\frac{37}{45}, 0)$ e $e = (0, 0, 0, 0, \frac{7}{8})$ vetores em $\mathbb{R}^5$. Prove que $\{a, b, c, d, e\}$ é uma base de $\mathbb{R}^5$.*

Exercício 31 (A matriz de adjacência e o vetor de uns)**.** *Seja G um grafo com d arestas e $A = [a_{ij}]_{d \times d}$ a matriz de adjacência. Seja $\mathbb{I} = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^d$ o vetor de uns de $\mathbb{R}^d$. Qual o significado das entradas do vetor $A(\mathbb{I})$? Qual o significado das entradas do vetor $A^T(\mathbb{I})$?*

Exercício 32 (A matriz de adjacência e os hiperlinks da internet)**.** *Suponha que A_1, A_2, A_3 e A_4 sejam páginas da* Internet*. Considere a matriz quadrada A na qual a entrada a_{ij} é* 1 *se a página A_i faz um* link *para a página A_j, e* 0 *caso contrário. Suponha que*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para cada $i, j = 1, 2, 3, 4$ determine de quantas formas diferentes é possível ir da página A_i para a página A_j com, no máximo, 4 cliques.

Exercício 33 (A matriz de adjacência e os caminhos em Malta)**.** *O arquipélago de Malta, no sul da Europa, é composto por três ilhas: Malta, Comino e Gozo. Existem barcos ligando Comino à Gozo e Comino à Malta. Determine de quantas formas diferentes é possível ir de Malta à Gozo fazendo-se exatamente* 666 *travessias.*

Exercício 34 (Casa da moeda)**.** *Considere n moedas diferentes, numeradas de 1 a n. Num determinado dia, a taxa de conversão da moeda j pela moeda i é a_{ij}. Ou seja, a_{ij} é quantas unidades da moeda i que você pode comprar com 1 unidade da moeda j. Essas informações podem ser encapsuladas na matriz A. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e $y = A(x)$. Qual o significado de y_i?*

Exercício 35 (Núcleo, imagem e invertibilidade)**.** *Prove que as transformações lineares a seguir são invertíveis (*Sugestão: em cada caso, analise o núcleo da transformação*).*

1. $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; $A(x) = (x, 2x, ..., nx)$
2. $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $A(x, y) = (x + 2y, x + y, x - y)$
3. $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$; $A(x, y, z) = (2x, 3y, 5z, x + y + z)$

Exercício 36 (O destino do Vasco)**.** *O Campeonato Brasileiro de Futebol é uma competição disputada em dois turnos por 20 equipes. Assim, cada equipe faz 38 jogos no campeonato. Cada vitória vale 3 pontos, cada empate 1 ponto, e derrotas não pontuam. A equipe campeã é aquela que soma mais pontos ao final da competição. As quatro equipes com menor pontuação são* rebaixadas *para a segunda divisão do campeonato. Os dados das edições anteriores mostram que com 48 pontos uma equipe consegue escapar do rebaixamento. Arthur torce pelo Vasco e gostaria de saber qual o número mínimo de vitórias que o Vasco precisa ter para escapar do rebaixamento. Qual é esse número?*

Exercício 37 (Risco versus segurança em investimento)**.** *Uma investidora possui uma capacidade de investir de no máximo R$10000. Seu gerente oferece duas opções de investimento: A e B. O investimento A é muito arriscado mas oferece um lucro de 10% ao ano, ao passo que o investimento B é muito seguro, mas oferece um lucro de 7% ao ano. Após alguma reflexão, ela decide investir no máximo R$ 6000 na opção A e pelo menos R$ 2000 na opção B. Como ela deve investir de modo a maximizar seus lucros, e qual o lucro máximo nesse caso?*

Exercício 38 (Fluxo de poupança)**.** *Considere uma conta bancária que rende juros a uma taxa mensal constante igual* $\xi \in (0,1)$*. Seja* $c \in \mathbb{R}^n$ *o vetor que representa o fluxo de dinheiro nessa conta (depósitos e saques) durante* n *meses. Por exemplo,* $c_4 < 0$ *significa que houve saque no* 4^o *mês, e* $c_7 > 0$ *indica que houve depósito no* 7^o *mês. Seja* $s \in \mathbb{R}^n$ *o vetor saldo, ou seja, a entrada* s_j *é o saldo na conta no mês* j*. Assim,* $s_1 = c_1$ *e*

$$s_{j+1} = (1+\xi)s_j + c_{j+1}.$$

Encontre uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ *tal que* $A(c) = s$*. Para se divertir um pouco mais, simule valores e faça as contas em* ***Julia****. Observe que a matriz* A *fornece uma maneira de se obter, com um único cálculo, dado o fluxo de dinheiro na conta, qual o saldo mensal durante um certo período.*

Exercício 39 (O problema das medalhas)**.** *Três equipes participam de um torneio esportivo amador em que provas de diversas modalidades foram disputadas. Como nos jogos olímpicos, aos vencedores de cada prova foram atribuídas medalhas de ouro, prata e bronze para o* 1^o*, o* 2^o *e o* 3^o *lugar, respectivamente. A quantidade de medalhas de cada equipe bem como sua pontuação final são apresentadas na tabela a seguir.*

Equipes	Medalhas			Pontuação Final
	Ouro	Prata	Bronze	
A	4	2	2	**46**
B	5	3	1	**57**
C	4	3	3	**53**

Figura 3: Quadro de medalhas para equipes A, B e C.

Quantos pontos valem cada medalha de ouro, prata e bronze?

Exercício 40 (Matrizes anti-simétricas)**.** *Uma matriz quadra* $A = [a_{ij}]_{d\times d}$ *é dita anti-simétrica quando* $A = -A^T$

(a) Encontre todas as matrizes anti-simétricas 2×2*.*

(b) Prove que se A *é anti-simétrica então* $a_{jj} = 0$ *para todo* $j = 1, ..., d$*.*

(c) Se A *é anti-simétrica, prove que* $\langle A(x), x\rangle = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^d$*. Ou seja, a imagem de* x *é ortogonal a* x*.*

(d) Prove a recíproca do item anterior: se $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *é uma transformação linear tal que* $\langle A(x), x\rangle = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^d$*. Prove que a matriz de* A *relativa a base canônica de* $\mathbb{R}^d$ *é anti-simétrica.*

Exercício 41 (Benefícios de doações)**.** *Uma empresa possui um lucro de R$100.000,00, antes de serem contados os impostos. Suponha que seja permitido a empresa doar uma porcentagem de seu lucro líquido (já descontados os impostos) e que o valor doado não seja computado no cálculo dos impostos. Suponha que a empresa decida doar então 10% de seu lucro líquido, e que o imposto estadual seja de 5% do lucro descontado o valor*

doado, e que o imposto federal seja de 40% do lucro descontados o imposto estadual e o valor da doação. Determine o custo efetivo da doação, ou seja, o valor doado descontado da dedução fiscal.

Exercício 42 (Matriz 2×2 não-diagonalizável)**.** *Seja $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear cuja matriz na base canônica é*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prove que se

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

é a matriz de A relativamente a uma base qualquer de $\mathbb{R}^2$ então $b \neq 0$, ou $c \neq 0$. Em outras palavras: nenhuma matriz de A é diagonal.

Exercício 43 (Contas à mão × contas em Julia)**.** *Em cada um dos problemas abaixo, faça as contas à mão e compare a resposta usando* Julia *para fazer as contas*

1. *Sabendo-se que a matriz da transformação linear $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ relativamente à base $\{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^3$, onde $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 1)$ e $w = (1, 1, 3)$ é*

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

   determine a matriz de A relativamente à base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

2. *Calcule o posto das matrizes abaixo*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 17 \end{bmatrix}.$$

3. *Exprima cada um dos vetores da base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (-1, 0, 2)$ e $v_3 = (4, 2, -5)$. Determine a inversa da matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

4. *Calcule a dimensão do subespaço vetorial de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores $v_1 = (2, 4, 8, -4, 7)$, $v_2 = (4, -2, -1, 3, 1)$, $v_3 = (3, 5, 2, -2, 4)$ e $v_4 = (-5, 1, 7, -6, 2)$. Decida se o vetor $b = (6, 18, 1, -9, 8)$ pertence ou não a este subespaço.*

5. *Calcule o determinante das matrizes abaixo*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix},$$

   Quais destas matrizes são invertíveis? Para aquelas que o forem, calcule a matriz inversa.

6. *Calcule o determinante da matriz*

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -9 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

7. *Calcule* $\|u + 8w - 40v\|$*, onde* $u = (9, 0, 1)$*,* $v = (3, 4, 1)$ *e* $w = (1/8, 1/8, 1/8)$*.*

8. *Seja* $v = (1, 2, 3, 4, 5, 6) \in \mathbb{R}^6$*. Encontre* $k \in \mathbb{R}$ *tal que* $\|kv\| = \pi$*. Qual a quinta coordenada do vetor unitário que possui a mesma direção de* v*?*

9. *Encontre a distância entre o ponto* $P = (1, -4, 3)$ *e o plano* Π *de equação* $2x - 3y + 6z = -1$

10. *Calcule* $A^{666}(v)$*, onde* $v = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$ *e*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & 1/2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

11. *Encontre os autovalores e autovetores de* A^{-1} *onde*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Exercício 44 (Produto de matrizes e as compras do mês)**.** *Um empresário do ramo da gastronomia possui 4 restaurantes (R1,R2,R3 e R4) e precisa decidir os fornecedores de tomates, cebolas, coentro, morangos e laranjas, para cada um deles. As demandas (em Kg) de cada produto por parte de cada restaurante estão especificadas na tabela abaixo.*

	tomates	*cebola*	*coentro*	*morango*	*laranja*
R1	60	50	35	41	76
R2	40	43	32	70	35
R3	23	27	29	41	32
R4	31	32	30	28	44

Dois pequenos produtores (P1 e P2) ofertam esses produtos por preços (para cada Kg, em reais) designados na tabela abaixo

	$P1$	$P2$
tomates	$0,98$	$1,33$
cebola	$1,78$	$1,23$
coentro	17	$16,89$
morango	$4,89$	$5,45$
laranjas	$5,76$	$4,99$

Suponha que estes preços só sejam garantidos se todos os produtos forem comprados juntos. Determine, para cada restaurante, em qual produtor é mais vantajoso comprar, de modo que o custo de aquisição seja o menor possível. Dica: verifique suas contas com *Julia.*

Exercício 45 (Seja mais rápido que o computador)**.** *Calcule os autovalores das matrizes abaixo*

(a) $A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

(c) Uma matriz A é dita nilpotente *se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$. Calcule os autovalores de A, assumindo que A é nilpotente.*

Exercício 46 (Modelo Markoviano de desemprego)**.** *Suponha que exista uma probabilidade p de uma pessoa empregada tornar-se desempregada no próximo mês (e portanto com probabilidade $1-p$ esta pessoa continua empregada no próximo mês), e uma probabilidade q de uma pessoa desempregada tornar-se empregada no próximo mês (e portanto com probabilidade $1-q$ esta pessoa continua desempregada no próximo mês). As constantes p e q são números reais entre 0 e 1, e são ajustadas de acordo com as configurações da economia. Assim, se x pessoas estão empregadas atualmente, e y pessoas estão desempregadas então*

$$px + (1-q)y$$

pessoas estarão desempregadas no próximo mês, ao passo que

$$(1-p)x + qy$$

*pessoas estarão empregadas no próximo mês. Mostre que existem números $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que se β pessoas estão desempregadas agora e α pessoas estão empregadas, então teremos as mesmas quantidades (α e β) de pessoas empregadas e desempregadas no próximo mês. Ou seja, prove que existe uma taxa de desemprego que permanece constante ao longo do tempo. (*Dica: *isto equivale a demonstrar o caso $n = 2$ do Teorema de Perron-Frobenius.)*

Exercício 47 (A matriz insumo-produto de uma economia)**.** *Suponha uma economia constituída por n setores $S_1, ..., S_n$. Cada setor S_i consome uma porcentagem p_{ij} da produção do setor S_j. Suponhamos o "modelo fechado"para esta economia: nenhuma outra commoditie entra nessa economia. Denotamos por x_i a quantidade produzida pelo setor S_i. Assumimos que $x_i \geq 0$, para todo $i = 1, ..., n$.*

(a) Considere o caso em que a economia é constituída por três setores S_1, S_2 e S_3 e que a matriz $[p_{ij}]$ que determina que fração da produção do setor S_i é consumida pelo setor S_j seja dada por

$$P = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Observe que a soma das entradas em cada coluna dessa matriz é igual a 1. Explique este fato. Para que esta economia esteja em equilíbrio, deve existir um vetor de produção $x = (x_1, x_2, x_3)$ *de modo que o consumo de cada setor* S_i *seja igual a produção* x_i *deste setor. Supondo que ao menos um destes vetores existe, determine todos eles.*

(b) *No caso geral de uma economia com* 3 *setores, mostre que sempre existe um vetor de produção que equilibra a economia, ou seja, de modo que o consumo de cada setor* S_i *seja igual a produção* x_i *deste setor.*