UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE

Lista de Exercícios II– Álgebra Linear

Professor: Bruno Santiago

Exercício 1 (Comparação entre as normas). *Prove que existem constantes positivas c, C tais que a norma euclideana é comparável a norma do máximo:*

$$c\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq C\|x\|_\infty.$$

Prove um também um resultado análogo entre a norma euclideana e a norma da soma.

Exercício 2 (Caminhos impossíveis). *Considere o grafo G da figura a seguir. Prove que*

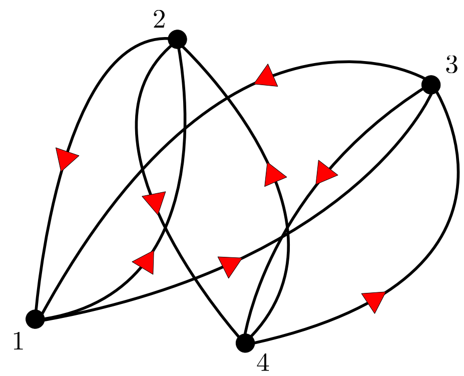

Figura 1: Grafo com 4 vértices e 8 arestas.

não existe um caminho que ligue o vértice 4 até o vértice 3 fazendo um número par de travessias.

Exercício 3 (Fluxo de mercadoria). *Uma grande rede varejista possui n lojas espalhadas pelo país. Cada loja recebe em uma dada semana uma quantidade de mercadoria, e denotamos por x_j a quantidade de mercadoria recebida pela loja j. O gerente geral de logística decide redistribuir de forma que para cada loja j, uma fração a_{ij} da quantidade de mercadorias que ela recebe será enviada à loja i. Em particular, a_{jj} representa a fração da quantidade de mercadorias recebidas que permanecerá na loja j. Seja y_j a quantidade de mercadoria final da loja j (após a redistribuição). Expresse y_j em função de x_j e dos números a_{ij}.*

Exercício 4 (Baby Gram-Schimidt). *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^d$. Prove que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x - \lambda y$ é ortogonal a y.*

Exercício 5 (Matrizes anti-simétricas). *Seja $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ uma função linear e considere $f^T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ a sua transposta. Dizemos que f é anti-simétrica se $f = -f^T$.*

- *Prove que f é anti-simétrica se, e somente se, $f(x)$ é ortogonal a x para todo $x \in \mathbb{R}^d$.*

- *Determine todas as matrizes 2×2 anti-simétricas*

Bonus track *Considerando que o espaço das matrizes $d \times d$ tem dimensão d^2, calcule que o conjunto das matrizes anti-simétricas é um subespaço e calcule sua dimensão.*

Exercício 6 (Distância entre as matrizes de adjacência)**.** *Sejam G_1 e G_2 dois grafos diferentes com o mesmo número n de vértices. Considere A_1 a matriz de adjacência de G_1 e A_2 a matriz de adjacência de G_2. Considere matrizes $n \times n$ como vetores em $\mathbb{R}^{n^2}$ e demonstre que a distância euclideana quadrática $\|A_1 - A_2\|$ fornece o número total de arestas que estão em um grafo mas não estão no outro. Dessa forma, a distância entre matrizes de adjacência serve para medir o quão distintos são dois grafos com o mesmo número de vértices.*

Exercício 7 (Fibonacci matrix)**.** *A sequência de Fibonacci é definida recursivamente começando-se com $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$ e cada termo a partir do terceiro é a soma dos dois termos anteriores. Assim, por exemplo, $x_2 = x_1 + x_0 = 1$, $x_3 = x_2 + x_1 = 2$, $x_4 = x_3 + x_2 = 3$, $x_5 = 5$ e assim por diante. Encontre uma matriz $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ tal que*

$$A^n(x_0, x_1) = (x_n, x_{n-1}).$$

Calcule os autovalores e autovetores da matriz A e obtenha uma fórmula para o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci.

Exercício 8 (Ajude o analista)**.** *Suponha que o histórico de compras de n produtos por um conjunto de d consumidores seja modelado por uma matriz $Q = [q_{ij}]_{n\times d}$ de tla forma que q_{ij} seja a quantidade do produto i comprada pelo consumidor j. Nesse contexto, podemos interpretar também os preços desses n produtos como sendo um vetor $p \in \mathbb{R}^n$. Um* ***analista de dados*** *procura a matriz $C = [c_{ij}]_{n\times d}$ tal que a entrada c_{ij} forneça a quantidade de dinheiro gasta pelo consumidor j no produto i. Expresse a matriz C em função (das entradas) de Q e do vetor p.*

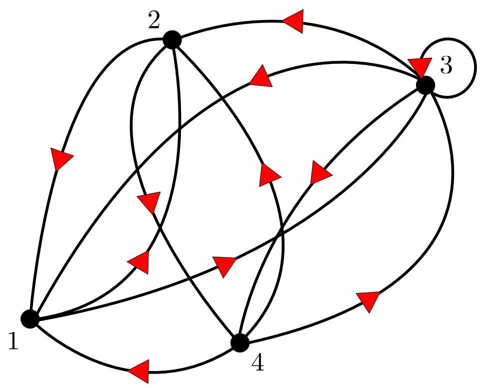

Figura 2: Grafo para o exercício 10.

Exercício 9 (Matriz de deslocamento circular)**.** *Considere a matriz* 7×7 *abaixo*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule A^7*.*Dica: analise o que cada potência de A faz com cada vetor da base canônica. Você nem precisa de **Julia** para resolver esse exercício.

Exercício 10 (Ciclos num grafo)**.** *Seja* G *um grafo. Um ciclo num grafo consiste é caminho no grafo que começa e termina no mesmo vértice. Considere o grafo da Figura 2. Determine a quantidade total de ciclos de comprimento 17.*Dica: O mais importante desse exercício é entender o método de solução. Para o cáclculo em si, vai ser muito difícil você fazer sem **Julia**...