UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Pós-Graduação em Matemática
Lista de Problemas I – Álgebra I
Professor: Bruno Santiago

Problema 1. *Sejam E e F conjuntos finitos com a mesma cardinalidade. Seja $f : E \to F$ uma função. Prove que f é injetiva se, e somente se, f é sobrejetiva. Exiba um contra-exemplo se a hipótese de E e F serem infinitos, ou seja, exiba dois conjuntos infinitos com a mesma cardinalidade e uma função entre eles que é injetiva mas não é sobrejetiva.*Dica: aplique o princípio da casa dos pombos e use pré-imagens.

Problema 2. *Prove que o conjunto $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas $d \times d$ com coeficientes reais é um anel não-comutativo.*

Problema 3 (Grupo de Heisenberg)**.** *Considere o subconjunto de matrizes $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ definido por*

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) *Prove que a restrição da multiplicação matricial à $\mathcal{H}$ lhe coloca uma estrutura de grupo não abeliano. Esse grupo é conhecido como o* grupo de Heisenberg.

(b) *Use a operação definida no grupo de heisenberg para mostrar que é possível munir $\mathbb{R}^3$ de uma estrutura de grupo* ***não-abeliano*** *(lembre que $(\mathbb{R}^d, +)$ é um grupo abeliano).*

Problema 4 (Funções aritméticas)**.** *Neste problema, denotamos por $m|n$ o fato de que m é um divisor de n e denotamos por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ o conjunto dos números naturais excluso 0. Seja*

$$\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}; f \text{ é uma função}\}$$

o conjunto de todas as funções definidas em $\mathbb{N}$ tomando valores nos números complexos. Considere as operações de soma *e* convolução *definidas em $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, respectivamente por*

$$(f + g)(n) \stackrel{\text{def}}{=} f(n) + g(n), \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

e

$$(f \star g) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{d|n} f(d)g(n/d).$$

Prove que $(\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}), +, \star)$ é um anel comutativo. Esse anel é conhecido como o anel das funções aritméticas.

Problema 5. *Prove que o conjunto das isometrias de $\mathbb{R}^d$ é um grupo. Esse grupo é abeliano?*

Problema 6. *Seja $\mathbb{S}^1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ o círculo unitário no plano. Para cada $\theta \in \mathbb{R}$ considere a função $R_\theta : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ obtida pela restrição da rotação de ângulo θ no plano ao círculo unitário. Prove que o conjunto $\{R_\theta\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ pode ser munido naturalmente, através da composição de funções, de uma estrutura de grupo abeliano.*