UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Pós-Graduação em Matemática
Lista de Problemas I – Medida e Integração
Professor: Bruno Santiago

Problema 1 (Medidas justas)**.** *Seja (M,d) um espaço métrico e considere $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel de M. Uma medida μ em M é dita* justa *se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\mu\left(B(x,\varepsilon)\right) \geq \delta$, para todo $x \in M$. Suponha que M é compacto. Prove que μ é justa se, e somente se, μ tem suporte total. Exiba um contra-exemplo quando a hipótese de compacidade é retirada.*

Problema 2 (Sobre o lema de Fatou)**.** *Seja $(X,\mathcal{B},\mu)$ um espaço de medida. Seja $0 < \xi < \infty$ e considere $f : X \to [0,\infty]$ mensurável tal que $\int_X f d\mu = \xi$. Prove que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n\log\left(1 + (f/n)^{\alpha}\right) = \begin{cases} \infty, & se\ 0 < \alpha < 1 \\ \xi, & se\ \alpha = 1 \\ 0, & se\ \alpha > 1 \end{cases}$$

Problema 3. *Seja m a medida de Lebesgue na reta. Construa um conjunto de Borel $B \subset \mathbb{R}$ tal que*

$$0 < m(B \cap I) < m(B),$$

para todo intervalo aberto I. É possível que $m(B) < \infty$?

Problema 4 (Conjunto de Cantor Gordo)**.** *Seja $0 < \varepsilon < 1$. Construa um subconjunto $A \subset [0,1]$, aberto e denso com $m(A) = \varepsilon$.*

Problema 5 (O suporte da medida)**.** *Seja μ uma medida de probabilidade Borel regular, definida num espaço métrico compacto X. Prove que existe um subconjunto compacto $K \subset X$ tal que $\mu(K) = 1$ e se $H \subset K$ é um subconjunto compacto próprio então $\mu(H) < 1$. Prove que $X \setminus K$ é o maior conjunto aberto com medida nula.*

Problema 6 (Teorema da convergência dominada)**.** *Calcule*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx.$$

Problema 7. *Prove que todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ é o suporte de uma medida de Borel.*

Problema 8. *Encontre uma sequência de funções contínuas $f_n : [0,1] \to [0,\infty)$ tal que $f_n(x) \to 0$ para todo $x \in [0,1]$, $\int_0^1 f_n(x)dx \to 0$ porém $\sup_n f_n \notin L^1$.*

Problema 9. *Encontre a menor constante positiva c tal que $\log(1+e^t) < c + t$, para todo $t > 0$.*

Problema 10. *Seja $f \in L^1$. Calcule*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \log(1 + e^{nf(x)}).$$