UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Pós-Graduação em Matemática

Lista de Problemas II – Medida e Integração

Professor: Bruno Santiago

Problema 1 (Ergodicidade das rotações). *Considere $\mathbb{S}^1$ o círculo unitário no plano. Observe que $\mathbb{S}^1$ é um grupo topológico compacto e que a medida de Haar do círculo coincide com a medida de Lebesgue m induzida pelo quociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Seja $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ a rotação de ângulo α . Prove que se α é um número irracional então m é ergódica com respeito a R_α : ou seja, se $A \subset \mathbb{S}^1$ é um conjunto Boreliano invariante, ou seja $R_\alpha(A) = A$ então $m(A) \in \{0, 1\}$ (A possui medida zero ou total).*

Problema 2 (Unicidade ergódica das rotações). *Seja $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ como no exercício anterior. Seja $\varphi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Use o problema anterior e o Teorema de Arzelá-Ascoli para mostrar que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \varphi(R_\alpha^\ell(x)) = \int \varphi dm, \quad \forall x \in \mathbb{S}^1.$$

Observação: Usando o Teorema Ergódico de Birkhoff é possível provar que esse resultado implica que o conjunto das medidas de probabilidades μ que satisfazem $\mu(R_\alpha(A)) = \mu(A)$ para todo conjunto Boreliano A contém somente a medida de Lebesgue m .

Problema 3 (O shift de dois símbolos). *Seja $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ o conjunto das seqüências bilaterais $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ com apenas os símbolos 0 e 1. Prove que Σ dotado da métrica*

$$d((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{-|n|} |x_n - y_n|$$

é um espaço métrico compacto. Considere $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ o mapa de deslocamento:

$$\sigma(x_n) = (x_{n+1}).$$

Prove que o conjunto $\mathcal{P}_\sigma(\Sigma)$ das medidas de Borel que são invariantes por σ é não-enumerável. Exiba um subconjunto enumerável denso de $\mathcal{P}_\sigma(\Sigma)$.