UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Análise
Lista de Problemas II – Álgebra I
Professor: Bruno Santiago

Problema 1 (Órbitas de um sistema dinâmico). *Seja X um conjunto e $f : X \to X$ uma função. Dado $x_0 \in X$, defina indutivamente $x_n = f(x_{n-1})$, i.e $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$ e assim por diante. O conjunto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ assim obtido é chamado a* ***órbita*** *do ponto x_0, e é denotado por $O(x_0)$.*

(a) Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{se } n \text{ é par} \\ (n+1)/2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a órbita $O(n)$ é um conjunto finito.

(b) Seja agora $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = 2n$. Prove que $O(n)$ é um conjunto infinito para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Exiba um exemplo de uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que ambos os conjuntos

$$\{n \in \mathbb{N}; O(n) \text{ é finito}\}$$

e

$$\{n \in \mathbb{N}; O(n) \text{ é infinito}\}$$

sejam infinitos.

(d) Pode existir uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ com a propriedade descrita no item (c) que seja bijetiva?

Problema 2. *Considere a função*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n(n^2-1)(3n+2) \end{aligned}$$

Prove que $\mathrm{Im}(f) \subset 24\mathbb{N}$, i.e todo elemento na imagem de f é múltiplo de 24.

Problema 3. *Sejam α e β números reais positivos. Dado $k \in \mathbb{N}$ prove que existem inteiros m e n tais que*

$$|m\alpha - n\beta| < \frac{1}{n}.$$

Problema 4. *Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função monótona não-crescente (i.e $n \leq m \implies f(n) \geq f(m)$) é constante a partir de um certo número natural.*

Problema 5. *Definimos a sequência $\{a_n\}$ por $a_1 = 2$ e para $n \geq 2$ o termo a_n é definido como sendo produto de todos os termos anteriores mais um. Prove que*

$$\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{a_\ell} = 1 - \frac{1}{\prod_{\ell=1}^{n} a_\ell}.$$

Problema 6 (O Teorema de Sylvester-Gallai)**.** *Use o princípio da boa ordenação e demonstre o seguinte resultado: Seja $\mathcal{C}$ um conjunto finito de pontos não-alinhados no plano. Então, existe uma reta que passa por exatamente dois pontos de $\mathcal{C}$.*

Problema 7. *Prove que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \implies n! > 2^n$. Qual o menor n_0 com essa propriedade?*

Problema 8 (A desigualdade das médias)**.** *Sejam x_1, x_2,..., x_n números reais positivos. Este exercício dá um roteiro para demonstrar, usando o princípio da indução finita, a famosa desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica:*

$$\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell \leq \sqrt[n]{\prod_{\ell=1}^{n} x_\ell}.$$

(a) Utilize o princípio da indução finita para mostrar a desigualdade das médias para todo inteiro da forma $n = 2^k$.

(b) Dados x_1, x_2,..., x_n números reais positivos e denote por $M = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell$ a sua média aritmética. Agora, seja $n \in \mathbb{N}$. Suponha que a desigualdade das médias seja verdadeira para todo conjunto de $n+1$ números reais positivos e seja $\{x_1, ..., x_n\}$ um conjunto qualquer com n números reais positivos. Considerando $x_1, ..., x_n, M$ prove que a desigualdade também vai ser verdadeira para todo conjunto de n números positivos.

(c) Combinando os dois itens anteriores prove que a desigualdade das médias vale para todo conjunto com n números reais positivos.

Problema 9. *Seja $S \subset \mathbb{Z}$ um conjunto com n elementos. Prove que existe $A \subset S$ tal que*

$$\sum_{a \in A} a \text{ divide } n.$$

Problema 10. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Prove que existe $0 < k < n$ tal que o valor absoluto da diferença entre $k\alpha$ o inteiro mais próximo de $k\alpha$ é menor do que $1/n$.*

Problema 11. *Seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Prove que o conjunto*

$$\left\{\beta = p/q,\ p, q \in \mathbb{Z}; \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}\right\}$$

é infinito.

Problema 12. *Seja $\{x_1, x_2, ..., x_n, ..., x_{n^2+1}\}$ uma sequência de números reais com n^2+1 termos. Prove que ou existe uma subsequência crescente com $n+1$ termos ou existe uma subsequência decrescente com $n+1$ termos.*

Problema 13 (Números primos e o 4)**.** *Prove que todo número primo $p > 2$ é da forma $4k-1$ ou $4k+1$. Prove que existem infinitos números primos da forma $4k-1$.*