**UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE**
**INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA**
**Pós-Graduação em Matemática**
Lista de Problemas I – Álgebra I
Professor: Bruno Santiago

**Problema 1** (Injetividade - 2pt). *Seja $f : X \to Y$ uma função injetiva. Prove que para todos $A, B$ subconjuntos de $X$ tem-se $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Prove que a conclusão é falsa sem a hipótese de injetividade exibindo um contra-exemplo.*

**Problema 2** (Crescimento fatorial vs Crescimento exponencial - 2pt). *Prove que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \implies n! > 2^n$. Qual o menor $n_0$ com essa propriedade?* Dica: Ache o $n_0$ fazendo contas e depois use indução.

**Problema 3** (Órbitas de um sistema dinâmico - 4pt). *Seja $X$ um conjunto e $f : X \to X$ uma função. Dado $x_0 \in X$, defina indutivamente $x_n = f(x_{n-1})$, i.e $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$ e assim por diante. O conjunto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ assim obtido é chamado a* ***órbita*** *do ponto $x_0$, e é denotado por $O(x_0)$.*

(a) *Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por*

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{se } n \text{ é par} \\ (n+1)/2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

*Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a órbita $O(n)$ é um conjunto finito.*

(b) *Seja agora $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = 2n$. Prove que $O(n)$ é um conjunto infinito para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(c) *Exiba um exemplo de uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que ambos os conjuntos*

$$\{n \in \mathbb{N}; O(n) \text{ é finito}\}$$

*e*

$$\{n \in \mathbb{N}; O(n) \text{ é infinito}\}$$

*sejam infinitos.*

(d) *Pode existir uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ com a propriedade descrita no item (c) que seja bijetiva?*

**Problema 4** (O jogo da Torre de Hanói - 3pt). *Dispõe-se de $n$ discos com diâmetros decrescentes enfiados numa haste $A$ e de duas outras hastes $B$ e $C$. O jogo consiste em deslocar todos os discos para a haste $C$, passando por qualquer uma das três hastes de forma que nunca um disco fique em cima de outro com diâmetro menor.*

(a) *Se $a_n$ é o número de jogadas que resolve o jogo com $n$ discos mostre que $a_1 = 1$ e se $n \geq 1$ então $a_{n+1} = 2a_n + 1$*

(b) *Use indução sobre $n$ e conclua que $a_n = 2^n - 1$*

**Problema 5** (Monotonicidade discreta - 3pt). *Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função monótona não-crescente (i.e $n \leq m \implies f(n) \geq f(m)$) é constante a partir de um certo número natural.*