UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Pós-Graduação em Matemática
Primeira Avaliação – Medida e Integração
Professor: Bruno Santiago

Problema 1 (Construção de medidas 1pt). *Seja $(X, \mathcal{M})$ um espaço mensurável. Seja $\{\mu_n\} \subset \mathcal{M}(X)$ uma sequência de medidas tal que existe $c > 0$ de forma que $\mu_n(X) \leq c$ para todo $n > 0$. Defina $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ pondo*

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{2^n}.$$

Prove que $\mu \in \mathcal{M}(X)$ (ou seja, μ é uma medida) e $\mu_n \ll \mu$ para todo n . Considere o caso particular onde $X = \mathbb{R}$, e $\mu_n = \delta_{1/n}$. Calcule as derivadas de Radon-Nikodym $\frac{d\mu_n}{d\mu}$, ou seja, determine, para cada n funções f_n tais que $\mu_n = \int f_n d\mu$.

Problema 2 (Teorema da convergência dominada - 1pt). *Calcule*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx.$$

Problema 3 (O poder de Vitali - 1pt). *Prove o Teorema da Convergência Dominada a partir do Teorema da Convergência de Vitali.*

Problema 4 (Convergência em Medida - 2pt). *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que uma sequência $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ de funções mensuráveis converge em medida a uma função mensurável $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se para todo $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

Dizemos que f_n é Cauchy em medida se para cada $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon, \delta)$ tal que

$$m, n \geq n_0 \implies \mu(\{x \in X; |f_n(x) - f_m(x)| > \delta\}) < \varepsilon.$$

- (a) **Convergência q.t.p $\implies$ convergência em medida:** *Prove que se $\mu(X) < \infty$ f_n converge pontualmente q.t.p para f então f_n converge para f em medida. **Dica:** use o Teorema de Egoroff*
- (b) **Convergência em medida $\implies$ convergência q.t.p módulo subsequência:** *Prove que se f_n converge para f em medida então existe uma subsequência f_{n_k} que converge q.t.p para f . **Dica:** use o Lema de Borel-Cantelli*
- (c) **Cauchy $\implies$ converge:** *Prove que se f_n é Cauchy em medida então existe f tal que f_n converge para f em medida.*

Problema 5 (Exemplos de convergência - 1pt). *Seja $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ a medida de Lebesgue da reta. Construa exemplos de sequências de funções mensuráveis $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (a) $\{f_n\}$ converge em $L^1(m)$ mas não converge q.t.p
- (b) $\{f_n\}$ converge a 0 em $L^1(m)$ e em q.t.p mas $\sup_n f_n \notin L^1(m)$.
- (c) $\{f_n\}$ é um contra-exemplo para a conclusão do Teorema de Egoroff: ou seja, f_n converge pontualmente e existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo conjunto $X \in \mathcal{M}$ com $m(\mathbb{R} \setminus X) < \varepsilon$ f_n não converge uniformemente em X .
- (d) $\{f_n\}$ converge em medida mas não converge q.t.p.

Problema 6 (Estimativas - 3pt). (a) Encontre a menor constante positiva c tal que $\log(1 + e^t) < c + t$, para todo $t > 0$.

(b) Seja $f \in L^1$. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \log(1 + e^{nf(x)}).$$

Problema 7 (Decaimento x Integrabilidade - 1pt). Sejam $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ a medida de Lebesgue da reta e $f : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ uma função mensurável. Considere a sequência de números não-negativos dada por $x_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{f(t); t \geq n\}$. Prove ou dê um contra-exemplo:

$$f \in L^1(m) \iff \sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$$

Problema 8 (Argumento de enumerabilidade - 3pt). Seja (X, d) um espaço métrico compacto e $\mathcal{B} \subset 2^X$ a σ -álgebra de Borel de X . Seja $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ uma medida de probabilidade mão-atômica (i.e. $\mu(\{x\}) = 0$, para todo $x \in X$ e $\mu(X) = 1$). Você pode imaginar que μ é a medida de Lebesgue em no intervalo se quiser.

- (a) Prove que existe $x \in X$ tal que $\mu(B(x, \varepsilon)) > 0$ para todo $\varepsilon > 0$.
- (b) Seja $x \in X$ como no item anterior. Prove que existe uma sequência $\varepsilon_n \rightarrow 0$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B(x, \varepsilon_n)) = 0$ e $\mu(\partial B(x, \varepsilon_n)) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. *Dica: use cardinalidade.*