

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Pós-Graduação em Matemática
Segunda Avaliação – Medida e Integração
Professor: Bruno Santiago

Data de entrega: 12 de novembro

Problema 1 (O suporte da medida - 2,5pt). *Seja μ uma medida de probabilidade Borel regular, definida num espaço métrico compacto X . Prove que existe um subconjunto compacto $K \subset X$ tal que $\mu(K) = 1$ e se $H \subset K$ é um subconjunto compacto próprio então $\mu(H) < 1$. Prove que $X \setminus K$ é o maior conjunto aberto com medida nula.*

Problema 2 (Medidas justas - 4pt). *Seja (M, d) um espaço métrico e considere $\mathcal{B}$ a σ -álgebra de Borel de M . Uma medida μ em M é dita justa se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\mu(B(x, \varepsilon)) \geq \delta$, para todo $x \in M$. Suponha que M é compacto. Prove que μ é justa se, e somente se, μ tem suporte total, i.e se $\text{supp}(\mu) = M$. Exiba um contra-exemplo quando a hipótese de compacidade é retirada.*

Problema 3 (Teorema de Lusin 2,5pt). *Enuncie e demonstre o Teorema de Lusin.*

Problema 4 (Dimensão de Hausdorff - 3pt). *(a) Sejam $a < b$ números reais e $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a < x < b, y = 0\}$. Prove que $H_2(A) = 0$ e $H_1(A) = b - a$. Conclua que a dimensão de Hausdorff de A é igual a 1.*

(b) Calcule a dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor.