

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Pós-Graduação em Matemática
Segunda Avaliação Domiciliar – Álgebra I
Professor: Bruno Santiago

Cada um dos problemas abaixo vale 2pt.
Data de entrega: 28 de novembro.

Problema 1 (Demonstrações de Irracionalidade). *Sejam a, b números naturais maiores do que 1 que não são potências de 10.*

(a) *Prove que $\log_{10} a$ e $\log_{10} b$ são números irracionais.*

(b) *Prove que existem números racionais α e β tais que*

$$\alpha \log_{10} a + \beta \log_{10} b = 0$$

se, e somente se, a e b são potências de um mesmo número natural. Ou seja, se existem $m, n, p \in \mathbb{N}$ tais que $a = p^m$ e $b = p^n$.

Problema 2. *Considere a função $\nu : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por*

$$\nu(a) = \text{quantidade de divisores positivos de } a.$$

Prove que $a \in \mathbb{N}$ é um quadrado perfeito se, e somente se, $\nu(a)$ é ímpar.

Problema 3. *Sejam m e n número inteiros ímpares. Prove que $8 \mid (m^2 - n^2)$.*

Problema 4 (Teorema de Dirichlet). *Prove que existem infinitos números primos da forma $4k - 1$.*

Problema 5 (A função de Möbius). *A função de Möbius é um objeto muito importante na teoria dos números. É uma função $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida do seguinte modo:*

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ 0, & \text{se } \exists p \text{ primo; } p^2 \mid n, \\ (-1)^k, & \text{caso contrário, onde } k \text{ é a quantidade de divisores primos de } n. \end{cases}$$

Ou seja, a partir de 2, $\mu(n)$ é 0 se n é divisível pelo quadrado de um número primo. Se não for, $\mu(n)$ pode ser 1 ou -1, dependendo se a quantidade de divisores primos de n for par ou ímpar, respectivamente. A imagem da função de Möbius é a sequência

$$1, -1, -1, 0, -1, 1, -1, 0, 0, 1, \dots$$

Descobrir padrões nessa sequência é um tema de pesquisa ativo em Teoria dos Números. Por exemplo, prove que após três termos não nulos o termo seguinte tem que ser 0.