UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Pós-Graduação em Matemática
Terceira Avaliação – Medida e Integração
Professor: Bruno Santiago

Data de entrega: 28 de novembro

Problema 1 (A topologia fraca $\star$ no espaço das medidas - 3pt)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico compacto. Denote por $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das probabilidades borelianas.*

(a) Use o Teorema de Stone-Weirstrass e prove que $C(X)$, com a norma do máximo, é separável. Conclua que a bola unitária desse espaço também é separável.

(b) Tome $\{f_n\} \subset C(X)$ um subconjunto enumerável denso da bola unitárias. Considere a função $\Delta : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to [0, \infty)$ definida por

$$\Delta(\mu, \nu) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\ell=1}^{+\infty} 2^{-\ell} \left| \int f_\ell d\mu \int f_\ell d\nu \right|.$$

Prove que Δ é uma métrica.

(c) Use a métrica definida acima para dar uma prova direta do Teorema de Banach-Alaouglu nesse caso: prove que $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ é compacto.

Problema 2 (Fórmula de Liouville - 3pt)**.** *Seja $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ um campo de vetores de classe C^1 e limitado, i.e, existe $c > 0$ tal que $\|F(x)\| < c$. Em particular, o fluxo de F é completo: para todo $x_0 \in \mathbb{R}^d$, existe uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ tal que $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma'(t) = F(\gamma(t))$, para todo $t \in \mathbb{R}$. O* fluxo *de F é a aplicação $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ definida por $\varphi_t(x_0) = \gamma(t)$. O fluxo é o mesmo que uma representação C^1 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^d)$. Nessas condições, demonstre a fórmula de Liouville.*

$$\det(D\varphi_t(x)) = e^{\int_0^t \operatorname{div} F(\varphi_s(x)) ds}.$$

Conclua que o fluxo de F preserva a medida de Lebesgue se, e somente se, a divergência do campo F é identicamente nula.

Problema 3 (O shift de dois símbolos - 4pt)**.** *Seja $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ o conjunto das sequências bilaterais $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ com apenas os símbolos 0 e 1. Prove que Σ dotado da métrica*

$$d((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-|n|} |x_n - y_n|$$

é um espaço métrico compacto. Considere $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ o mapa de deslocamento:

$$\sigma(x_n) = (x_{n+1}).$$

Prove que o conjunto $\mathcal{P}_\sigma(\Sigma)$ das medidas de Borel que são invariantes por σ é não-enumerável. Exiba um subconjunto enumerável denso de $\mathcal{P}_\sigma(\Sigma)$.