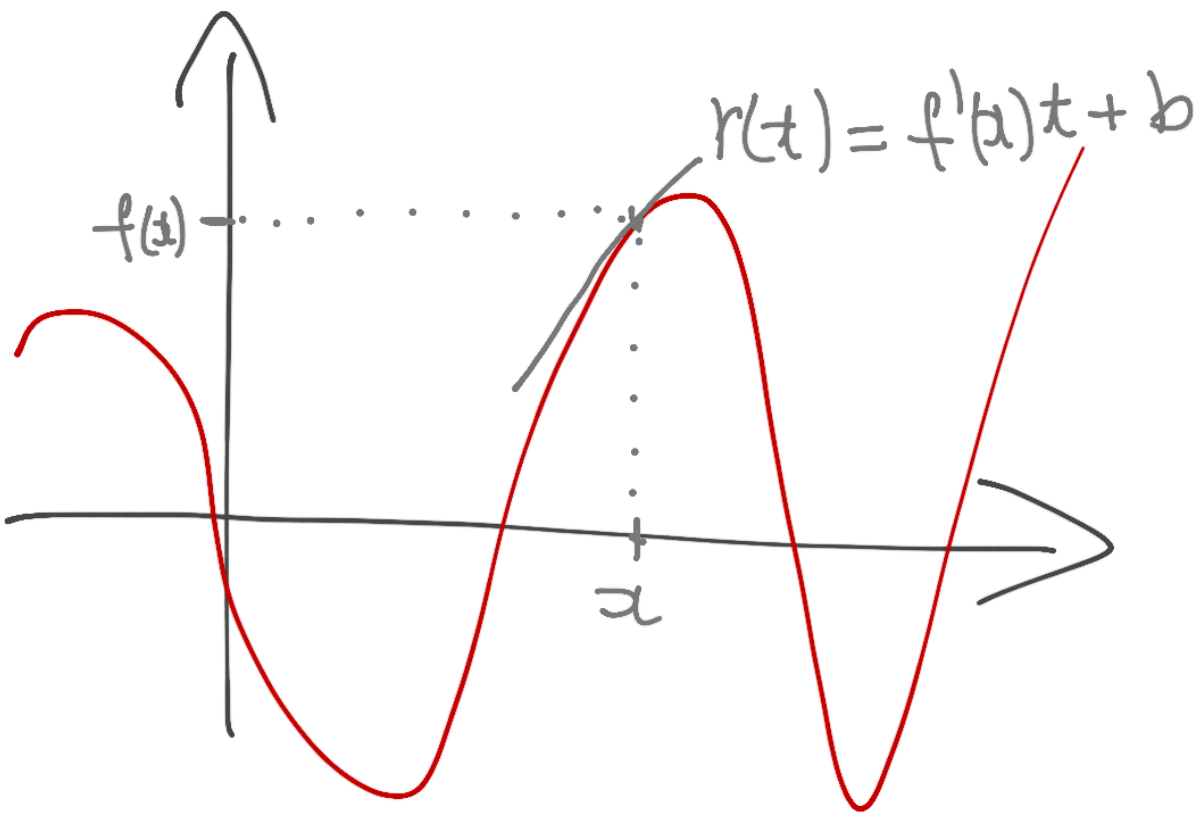
A reta tangente ao gráfico

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$f'(x)$ é o coeficiente angular da reta r tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$. Logo, a equação dessa reta:

$$\boxed{r(t) = f'(x) \cdot t + b}$$

Exemplo: (1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = 3x^3 + 7$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = 3(3x^2) + 0 = 9x^2}$$

Pergunta: Qual a equação da reta tangente ao gráfico de f quando $x = 1$?

Sol: $f(1) = 3 \cdot 1^3 + 7 = 10$

$f'(1) = 9 \times 1^2 = \boxed{9}$

Logo, a reta tg ao gr(f) qd $x = 1$ tem uma equação do tipo

$r(x) = 9x + \boxed{b}$

Para calcular o coeficiente linear (b) da equação da reta usamos a informação de que a reta passa pelo ponto de tangência $(1, f(1)) = (1, 10)$.

Logo, $r(1) = 10$

$\Leftrightarrow 9 \cdot 1 + b = 10 \therefore \boxed{b = 1}$

Logo $r(t) = 9t + 1$.

(2) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada

por $g(x) = x^7 + 3x$

$\boxed{x = 2}$

- $g(2) = 2^7 + 6 = 134$

- $g'(x) = 7x^6 + 3$

- $g'(2) = 7 \cdot 2^6 + 3 = 451$

Reta Tangente:

$$\boxed{r(t) = 451t + b}$$

$$\boxed{r(2) = 134} \Rightarrow t = 2$$

$$\Rightarrow r(t) = 134$$

$$\Rightarrow 451 \times 2 + b = 134$$

$$\boxed{b = -768}$$

Portanto:

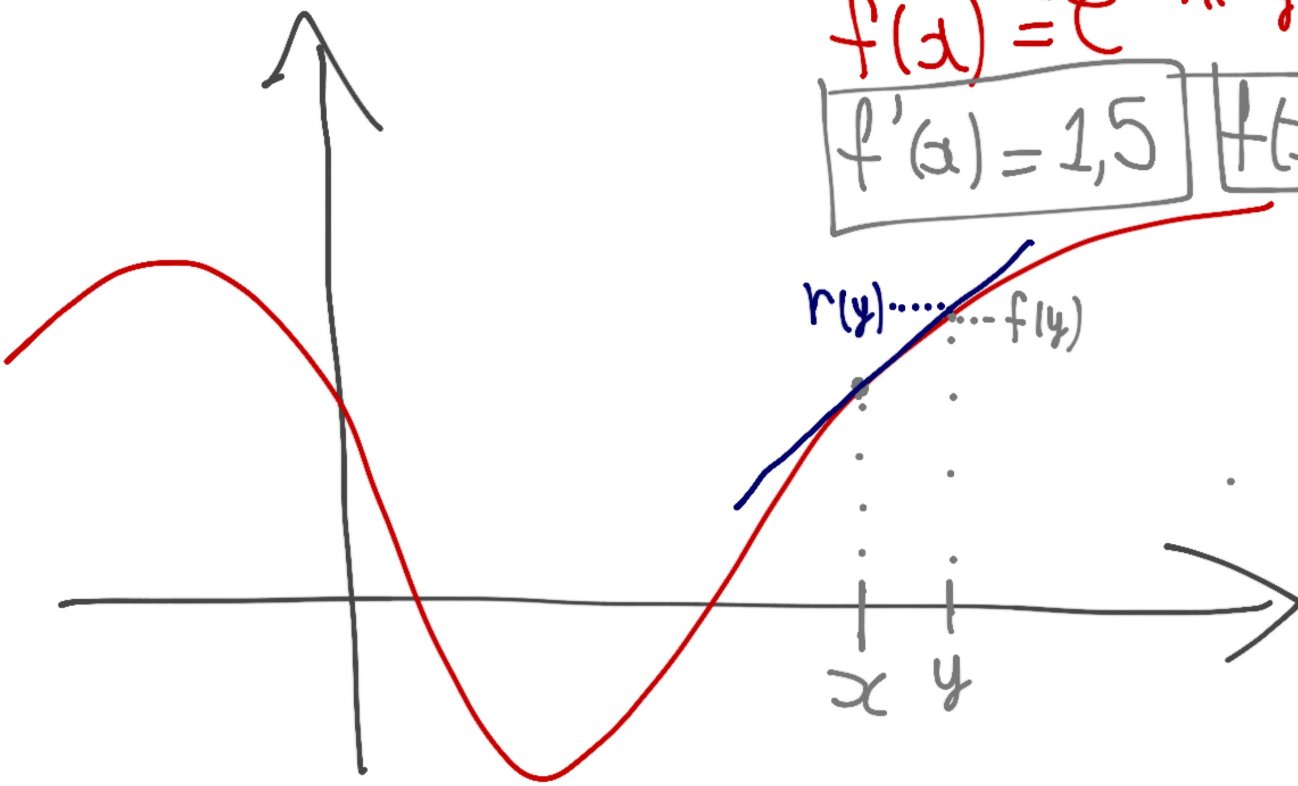
$$r(t) = 451t - 768$$

Aplicações:

1ª Aproximação linear:

" $\boxed{x = 1}$ $f(x) = e^{sen(log(x)^{27})}$ "

$\boxed{f'(x) = 1,5}$ $\boxed{f(x) = 2,3}$



Eq da reta tangente:

$r(t) = 1,5t + b$

$\boxed{r(x) = f(x)}$

$\boxed{r(1) = 2.3} \Rightarrow 1.5 \times 1 + b = 2.3$

$\therefore b = 0.8$

$\Rightarrow r(t) = 1.5t + 0.8$

$$\boxed{r(y) = 1.5y + 0.8}$$

$$\boxed{r(y) \approx f(y)}$$

Porém $r(y)$ é muito mais fácil de calcular.

2ª Aplicação: Método de Newton.

Recapitulação sobre solução de equações:

Equações de grau 1:

$$f(x) = ax + b$$

$$\boxed{f(x) = 0} \iff ax + b = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -b/a}$$

Equações do grau 2:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\boxed{f(x) = 0} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Equações de graus 3 e 4:

Fórmula de Cardano-Tartaglia,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

$$\boxed{f(x) = 0}$$

Equações de grau 5?

$$p(x) = \sum_{l=0}^{5} a_l x^l$$

$$\boxed{p(x) = 0}$$

E. Galois

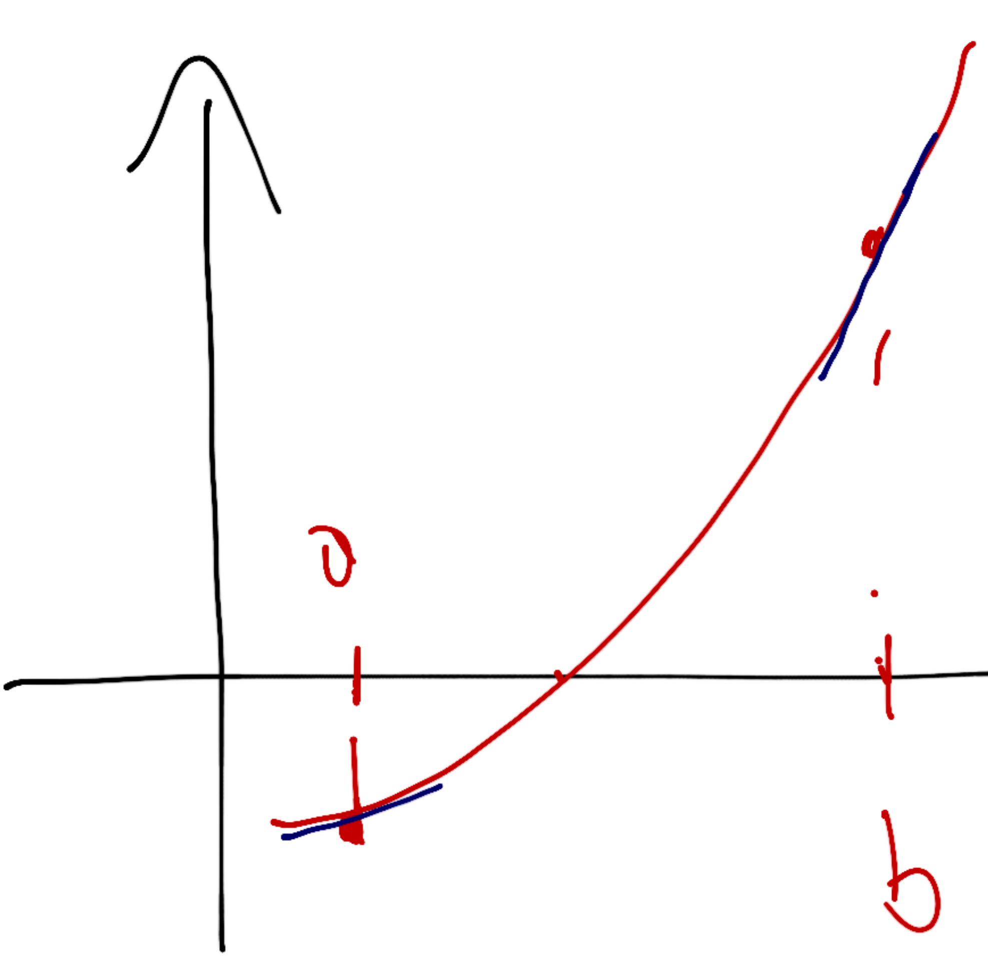
N. Abel

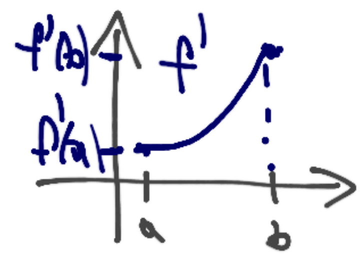
Equações Transcendentes?

$f(x) = \log(1 + \operatorname{sen} x)$?

$$\boxed{f(x) = 0}$$

· <u>Método de Newton</u>:





· $f'(x) \geq \delta > 0$

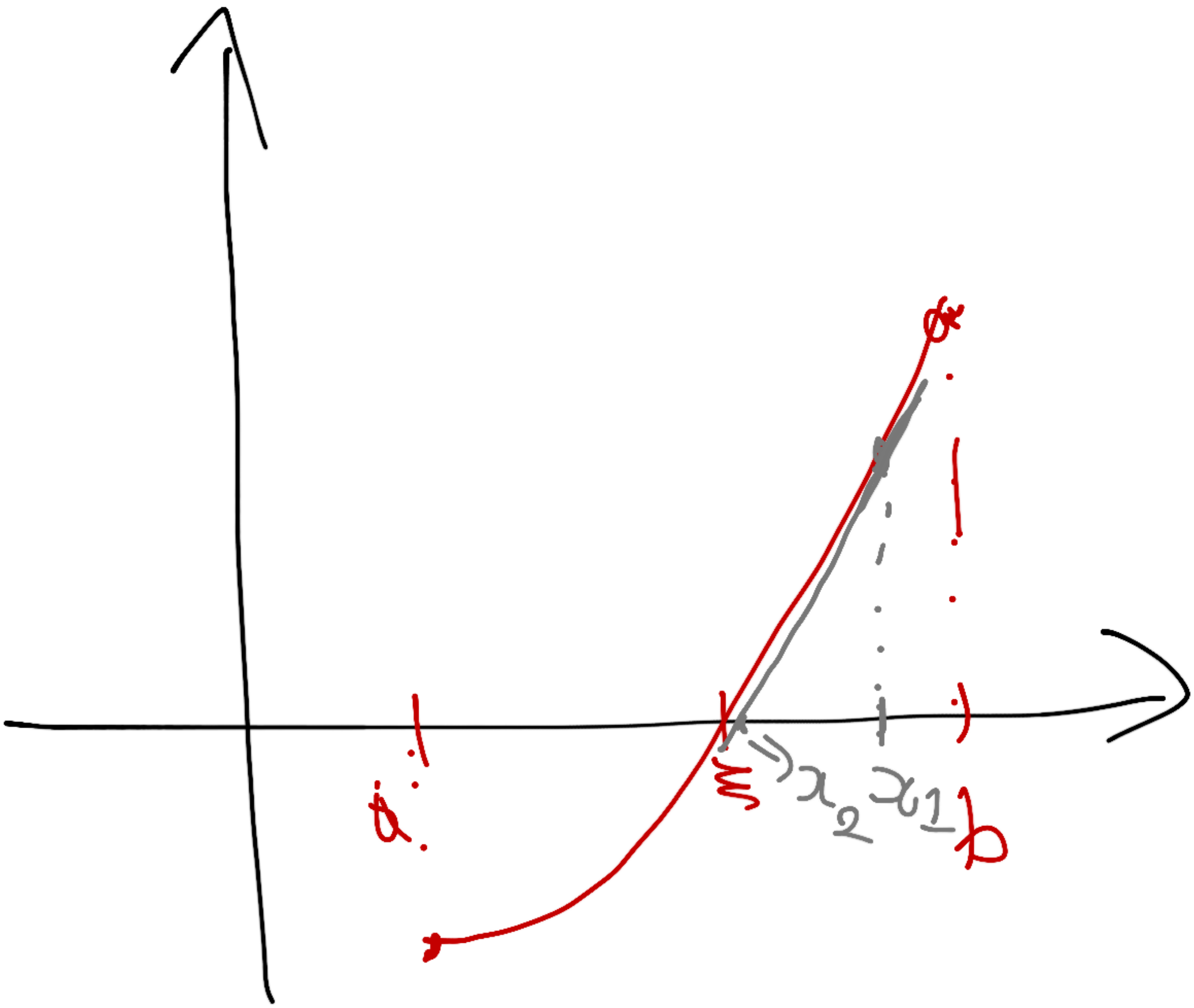
· f é "suave"

$\boxed{\cdot\ f' \text{ é crescente}} \Longleftrightarrow$

$\boxed{f'' \geq 0}$ (em $[a,b]$)

- $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$

Nessas condições existe um único ponto $\xi \in (a,b)$ satisfazendo $f(\xi) = 0$



. Chute inicial para a solução da equação:

$x_1 \in (\xi, b)$ $(x_2 \approx b)$

⇒ Eq da reta tg em x_1:

$$\boxed{r(x) = f'(x_1)\,x + b}$$

$$r(x_1) = f(x_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x_1)\,x_1 + b} = f(x_1)$$

$$\therefore \boxed{b = f(x_1) - f'(x_1) \cdot x_1}$$

$$\boxed{r(t) = f'(x_1)\,t + b}$$

$$r(x_2) = 0$$

$$\Rightarrow x_2 f'(x_1) + b = 0$$

$$x_2 f'(x_1) = f'(x_1) \cdot x_1 - f(x_1)$$

$$\boxed{x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}}$$

· Continuamos esse processo produzindo pontos x_{n+1} a partir do ponto anterior x_n seguindo a fórmula

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

- <u>Mágica</u>: $x_n \longrightarrow \xi$

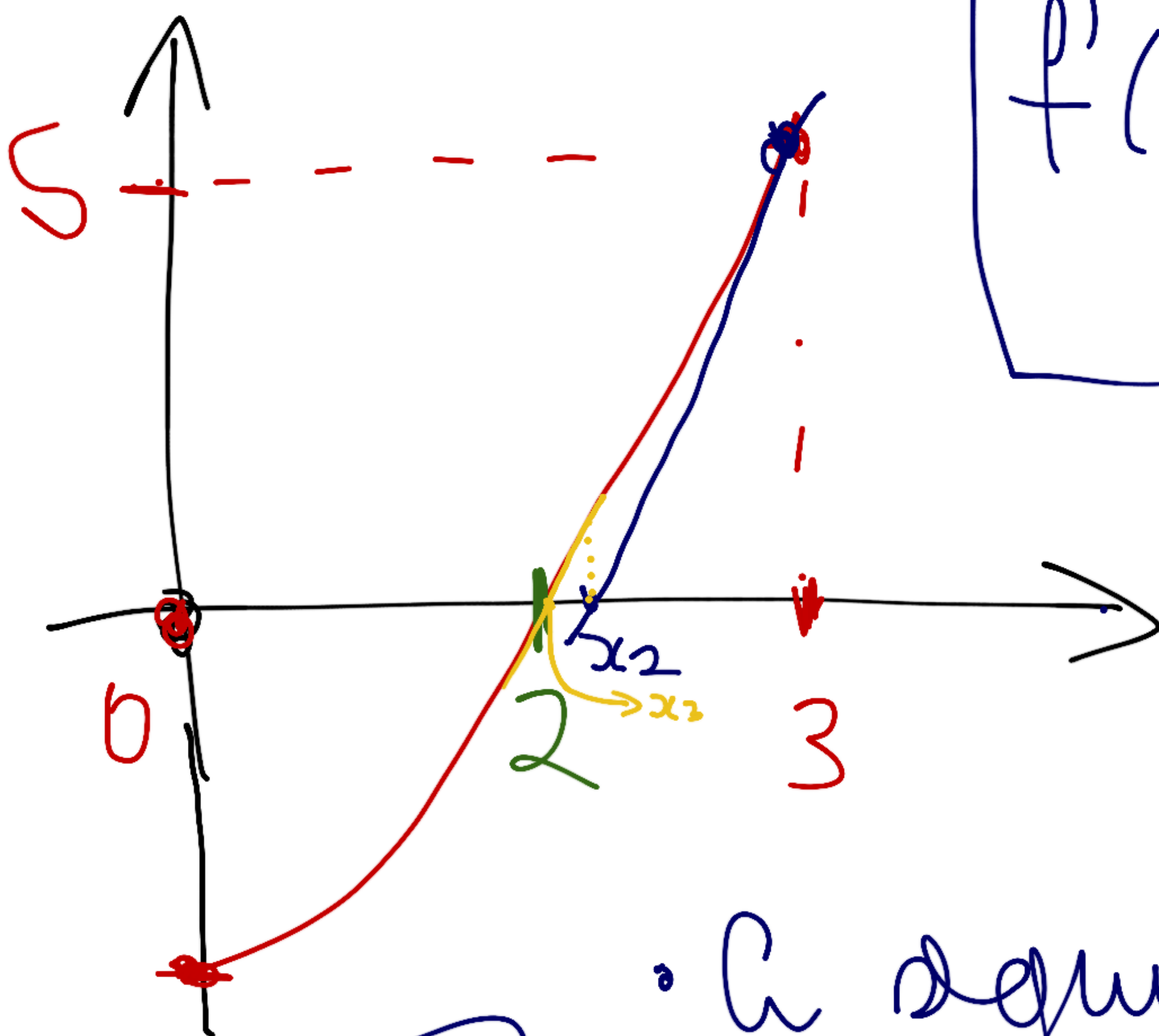
Muito rápido!!

<u>Exemplo</u> <u>Concreto</u>:

$$f(x) = x^2 - 4 \quad f(3) = 5$$

$$a = 0, \ b = 3$$

$$f'(x) = 2x$$



$$\boxed{f'(3) = 2 \times 3 = 6}$$

$$\boxed{x_1 = 3}$$

- A segunda approx. é o x_2 que é a raiz da equação da eq da reta tg ao gráfico.

no ponto $x = 3$.

• 1º Passo: calcular a eq da reta tangente:

$$r(t) = 6t + b$$

- Para calcular o coeficiente livre, usamos que a reta passa pelo ponto de tang:

$$f(3)=5$$

$$\iff 6 \cdot 3+b=5$$

$$\therefore b=-13$$

$$f(x_2)=0 \iff$$

$$6x_2-13=0$$

$$\therefore x_2=\frac{13}{6}=2{,}16$$

$$\boxed{x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}}$$

$$f(x_2) = x_2^2 - 4$$

$$= \left(\frac{13}{6}\right)^2 - 4 = 0.6944$$

$$f'(x_2) = 2x_2 = 4{,}33\ldots$$

$$x_3 = 2{,}16 - \frac{0.69444}{4.333\ldots}$$

$$\simeq 2{,}0064$$