Aula 06 - Regras de derivação e esboço de gráficos.

Breve resumo:

- limites
- derivada → antiderivada
- integral

(1) Limite: $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

dado $x_0 \in I$, definimos

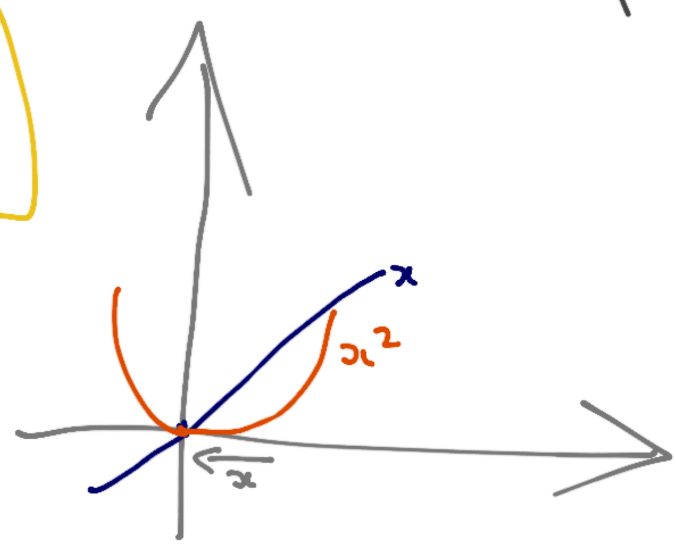
$\lim_{x \to x_0} f(x)$, se existe como

"a tendência de comportamento da função próximo de x_0"

Exemplo: (1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\boxed{f(x) = x^2 + 1}$$

$\lim_{x \to 0} f(x)$??



$- x = -0.1$

$\Rightarrow x^2 = 0.01$

$\Rightarrow f(x) = 1.01$

$- x = 0.1$

$\Rightarrow f(x) = 1.01$

$- x = 0.08$

$\Rightarrow f(x) = 1.000064$

" $f(x)$ se aproximă de 1

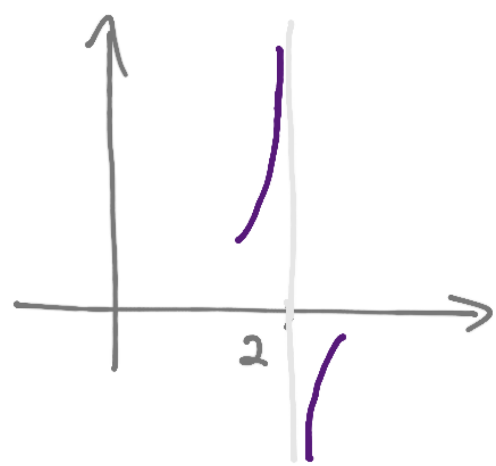
quando x se aproxima de 0"

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

(2) $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{5}{2-x}$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) \; ??$$



- $g(x) = 2 - x.$

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 2 - 2 = 0$$

- Funções contínuas:

Uma função é contínua quando $\forall x_0 \in \mathbb{R}$;

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Polinômios são funções contínuas:

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

é sempre contínua.

Em particular $g(x) = 2 - x$ é contínua.

Suponha $x < 2$ e x está muito próximo de 2.

$\Rightarrow 2-x$ é positivo e muito pequeno $\Rightarrow$

$\dfrac{5}{2-x}$ é muito grande

Ex: $x = 1.99$, $2-x = 0.01$

$\Rightarrow \dfrac{5}{2-x} = 500$

Expressamos isso escrevendo

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$$

$\Leftarrow$ O limite lateral a esquerda de f quando $x=2$ é $+\infty$.

* Se $x>2$ e está muito próximo de 2, $2-x$ é negativo porém muito próximo de zero, logo

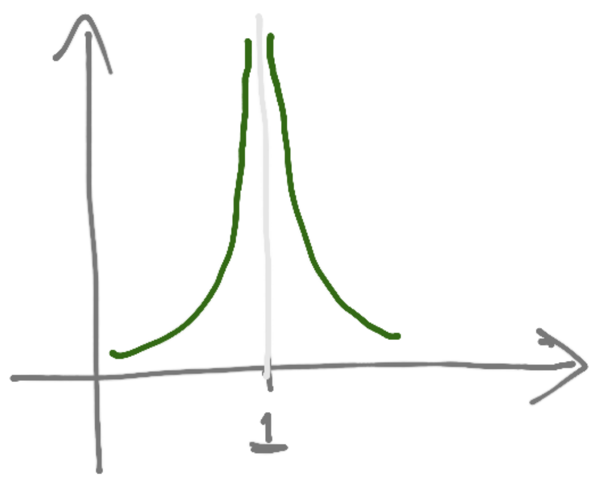
$$\frac{5}{2-x}<0$$

porém com valor absoluto muito grande

Ex $x = 2.01 \Rightarrow 2 - x = -0.01 \Rightarrow \dfrac{5}{2-x} = -500$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$$

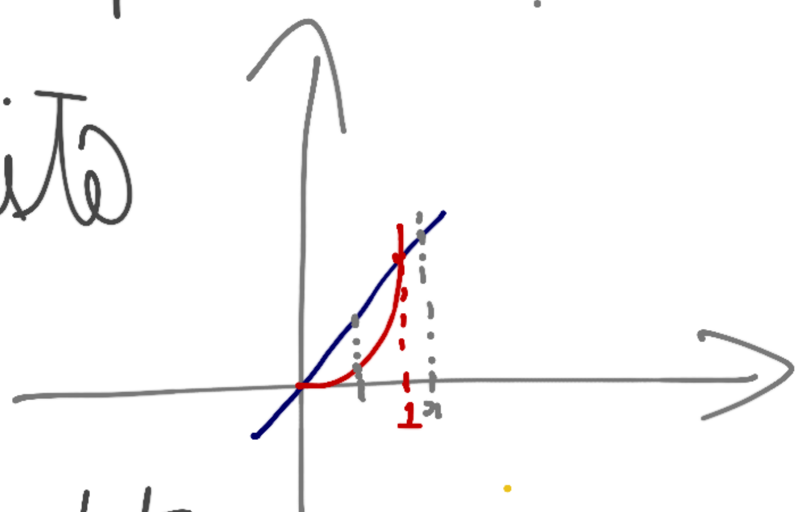
(3) $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$



$$\lim_{x \to 1} f(x) = ???$$

• Quando x está próximo de 1, $(1-x)^2$ é muito pequeno e positivo.

$\Rightarrow \dfrac{x}{(1-x)^2}$ é muito



grande e positivo

Ex $x = 1,001$

$\Rightarrow 1 - x = -0.001$

$\Rightarrow (1-x)^2 = 0.000001$

$\Rightarrow \dfrac{x}{(1-x)^2} = 1001000$

$\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$

Obs: Assíntotas verticais de funções racionais.

Quando uma função

$f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, com

p e q polinômios e

$\boxed{q(x_0) = 0}$, a

$$\lim_{x \to x_0^{-\text{ou}+}} f(x) = {+ \atop \text{ou} \atop -}\infty$$

dizemos que f tem

uma assíntota vertical em x_0.

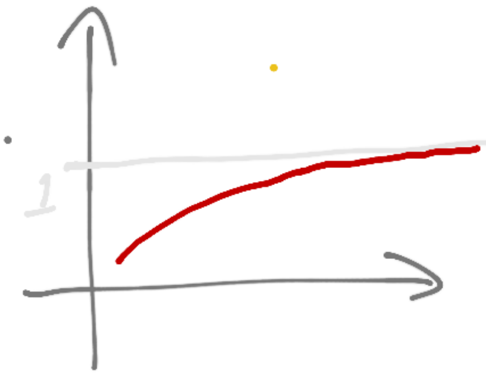
Obs2 Assíntotas horizontais

Quando $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$ dizemos

que f tem uma assíntota horizontal.

Ex: $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.



$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$??

Quando x é muito grande $x+1 \simeq x$, logo $\dfrac{x}{x+1} \simeq 1 \Rightarrow$

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$

Obs: $f(x) = x^2$ é um pol

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0^2 = 0$

$\Rightarrow$ f não tem assíntota vertical em $x = 0$.

$g(x) = 1/x \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} 1/x = +\infty$

$\Rightarrow$ g tem ~~tem~~ uma assíntota vertical em

$x = 0.$

• Derivada de funções racionais.

(I) Derivada de polinômios

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$\Rightarrow \boxed{p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}}$$

(2) Regra do produto:

$$\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\varphi'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Ex

$$\varphi(x) = \overbrace{x^2}^{f(x)} \overbrace{(x^3+1)}^{g(x)}$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = \overbrace{2x}^{f'(x)}(x^3+1) + x^2(\underbrace{3x^2}_{g'(x)})$$

$$= \underline{2x^4} + 2x + \underline{3x^4}$$

$$\varphi(x) = x^5 + x^2$$

$$\varphi'(x) = 5x^4 + 2x$$

<u>Obs</u>: $g(x) = x^3 + 1$

$$= h(x) + \psi(x)$$

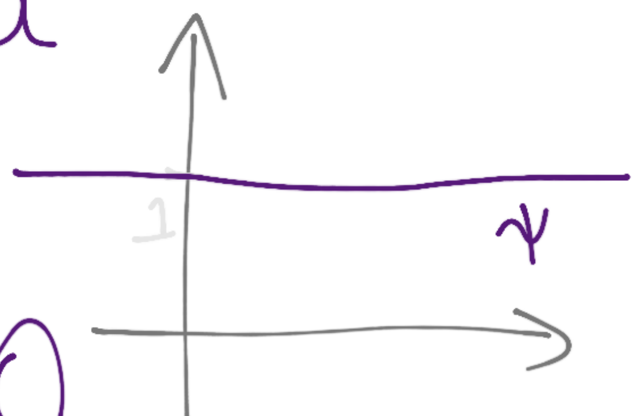
$$h(x) = x^3 \Rightarrow h'(x) = 3x^2$$

$$\boxed{\psi(x) = 1} \Rightarrow \psi'(x) = 0$$

$$\psi'(x) = \lim_{y \to x} \frac{\psi(y) - \psi(x)}{y - x}$$

$$= \lim_{y \to x} \frac{\overbrace{1 - 1}^{0}}{y - x} =$$

$$= \lim_{y \to x} 0 = 0$$



(3) Regra do quociente:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ e}$$

$q(x) \neq 0$ então

$$\boxed{f'(x) = \frac{p'(x)\,q(x) - p(x)\,q'(x)}{q(x)^2}}$$

Ex: $f(x) = \dfrac{\overbrace{x}^{p(x)}}{\underbrace{x+1}_{q(x)}} = \dfrac{p(x)}{q(x)}$

$\boxed{x \neq -1}$ $\quad \bullet \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\Rightarrow p'(x) = 1 \;\&\; q'(x) = 1$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{\overbrace{x+1}^{p'(x).q(x) = 1.q(x)} - \overbrace{x}^{p(x).q'(x)}}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

• $\boxed{f'(x) > 0} \Rightarrow f$ è sempre crescente.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{(x+1)^2} = 0$