CMA - aula 07

Derivada e esboço de gráficos

(1) Motivação: modelos matemáticos complexos

Ex: $f(x) = \log(\cos^2 x)$.

P: Como confiar na análise gráfica do computador?

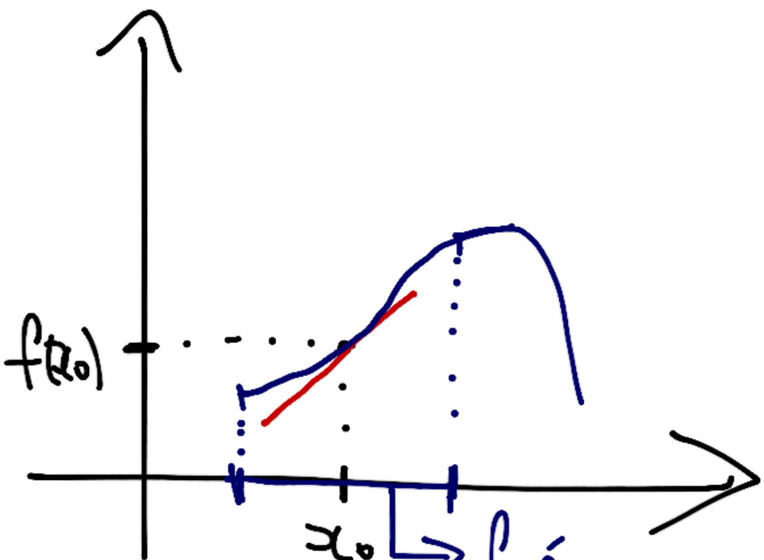
P2: Como esboçar qualitativamente um gráfico?

· Objetivo da aula: desenvolver técnicas que permitam traçar gráficos com boa aproximação qualitativa.

(2) Derivada e crescimento:

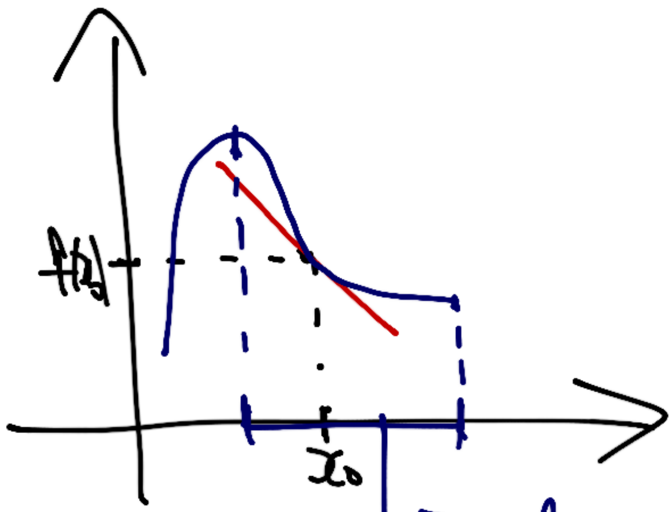
Proposição: Seja $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $I = [a, b]$. $x_0 \in I$

(a) Se $f'(x_0) > 0$ então f é crescente ao redor de x_0



$\Rightarrow$ f é crescente nesse intervalo $J \subseteq I$

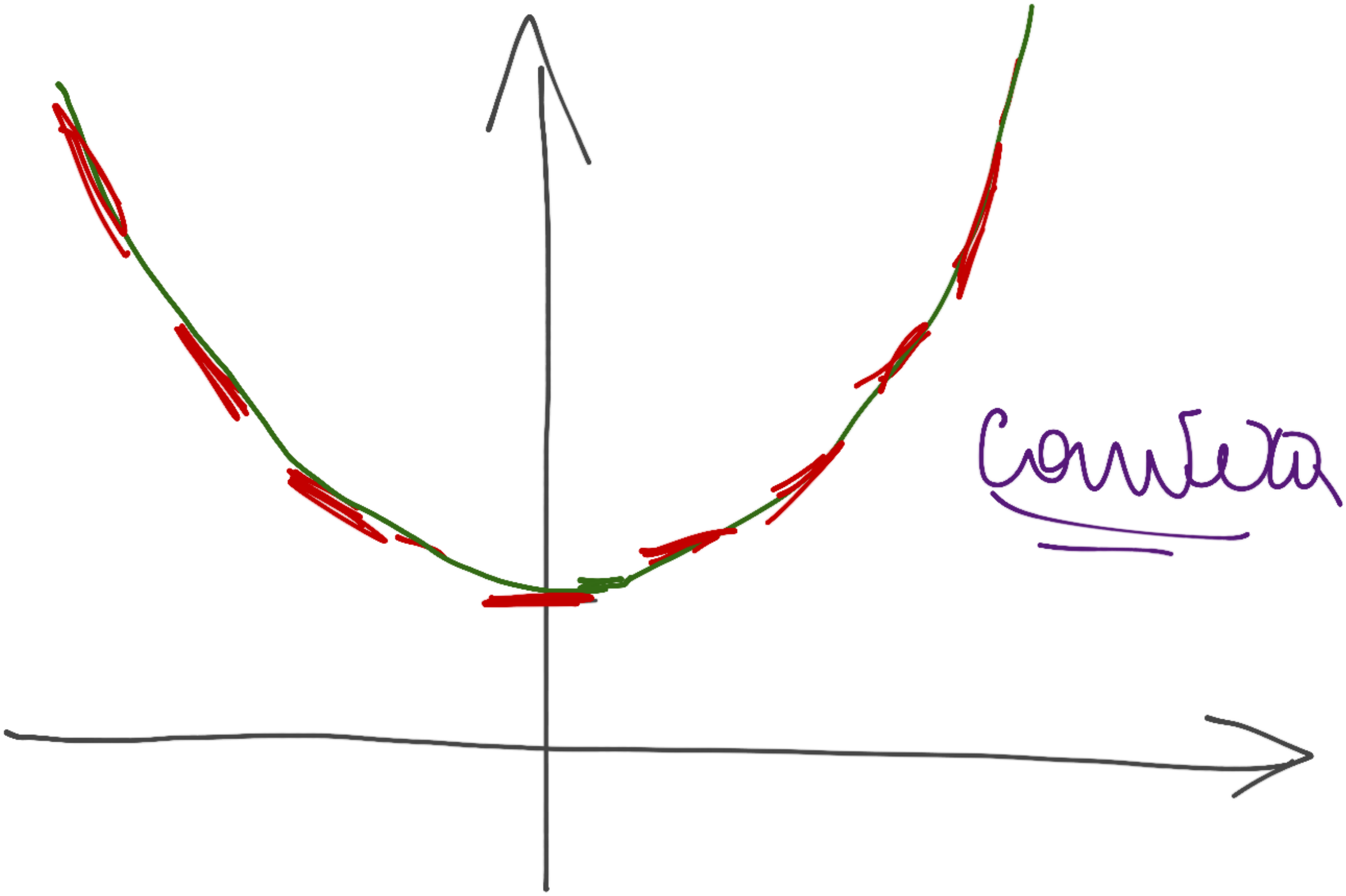
(b) Se $f'(x_0) < 0$ então f é decrescente ao redor de x_0



$\rightarrow$ f é decrescente em $J \subseteq I$

Ex! $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$

- $f'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Se $x < 0$ então $f'(x) < 0$
- Se $x > 0$ então $f'(x) > 0$



f' : $-$ $\quad 0 \quad$ $+$

f' é uma função crescente $\Rightarrow f'' > 0$

De fato, $f'(x) = 2x \Rightarrow$

$\boxed{f''(x) = 2 > 0}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(3) Derivada segunda:

Seja $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável. Se a sua função derivada

$$f': I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

também for diferenciával, dizemos que f é 2 vezes diferenciável e denotamos a derivada da sua derivada por

$$f'': I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Corolário: (a) $f''(x_0) > 0$ $\Rightarrow$ f' é crescente ao redor de x_0

(b) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f'$ é decres

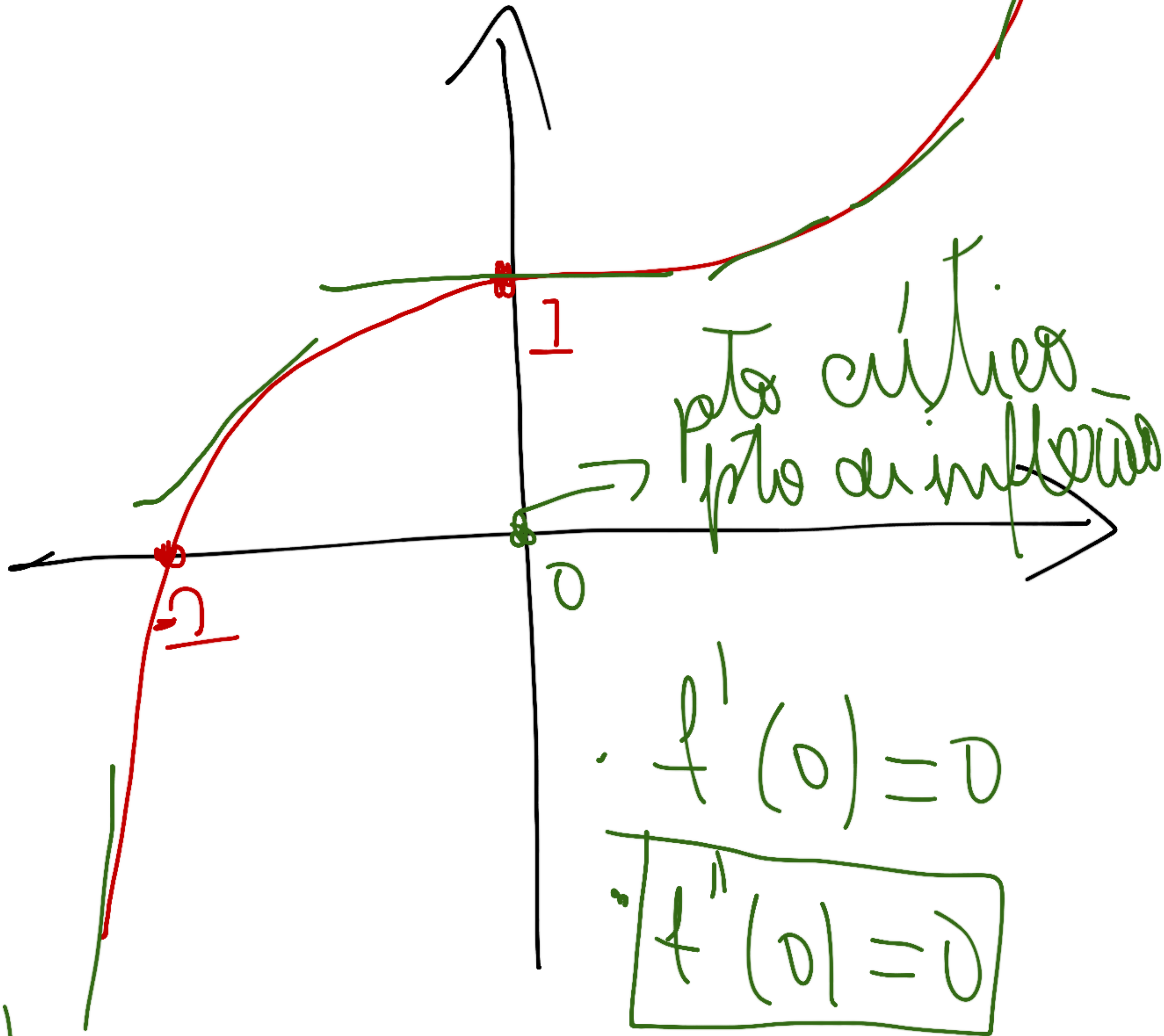
Então ao redor de x_0.

No caso (a) dizemos que f é convexa ao redor de x_0. No caso (b) dizemos que f é côncava ao redor de x_0.

Ex: $f(x) = x^3 + 1$

- $f'(x) = 3x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- $f''(x) = 6x < 0$ se $x < 0$ e

$> 0 \ \forall x > 0.$



$f'(0) = 0$

$\boxed{f''(0) = 0}$

f' + 0 +

decresce cresce

f'' $-$ 0 $+$

(4) Pontos de inflexão:

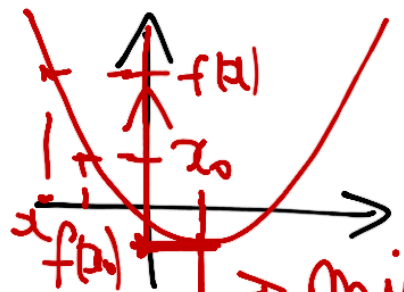
Definição: Seja $x_0 \in I$ tq $f'(x_0) = 0$. Dizemos que

$f''(x_0) = 0$.

x_0 é um ponto de inflexão.

(5) Otimização:

Definição: $x_0 \in I$ é um ponto de máximo mínimo global se



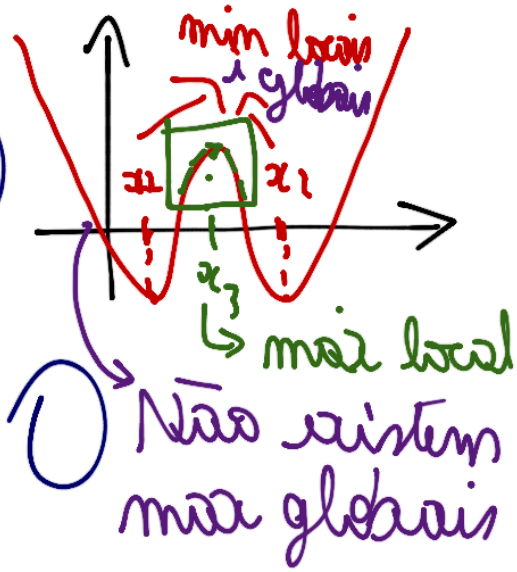
$$f(x_0) \geq f(x), \forall x \in I$$

$$f(x_0) \leq f(x), \forall x \in I$$

Definição: Dizemos que $x_0 \in I$ é um ponto de máximo local se

(1) $f'(x_0) = 0$

(2) $f''(x_0) < 0$



Dizemos que $x_0 \in I$ é

mínimo local se

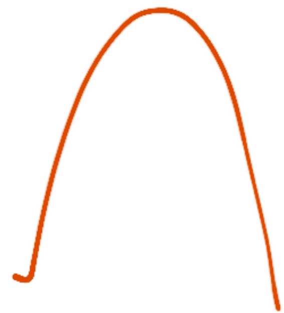
(1) $f'(x_0) = 0$

(2) $f''(x_0) > 0$

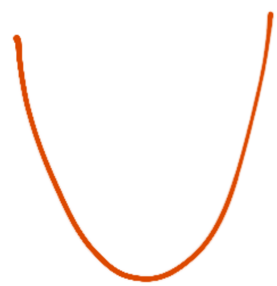
Definição: $x_0 \in I$ é um ponto crítico se $f'(x_0) = 0$.

- <u>Figuras</u>:

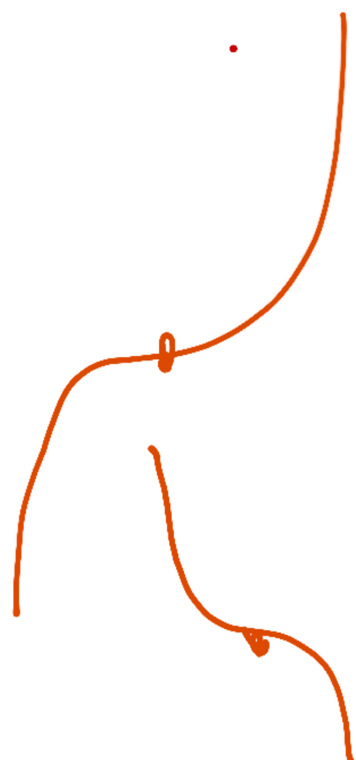
max local



min local



pt de inflexão



Exemplo: $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

- $f(x) > 0$

(a) Assíntotas verticais.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} x^2 + \lim_{x \to 0^-} 1/x^2$$

- Como $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$g(x) = x^2$ é contínua, sabemos que

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Logo,

$$\lim_{x \to 0} x^2 + \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

(b) Análise das derivadas:

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3},$$

pois $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ e a derivada da da função x^n é sempre $n x^{n-1}$. Assim a derivada de x^{-2} é

$$-2x^{-2-1} = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

· Pontos críticos:

$$f'(x) = 0 \iff 2x - \frac{2}{x^3} = 0$$

$$\iff 2x^4 - 2 = 0$$

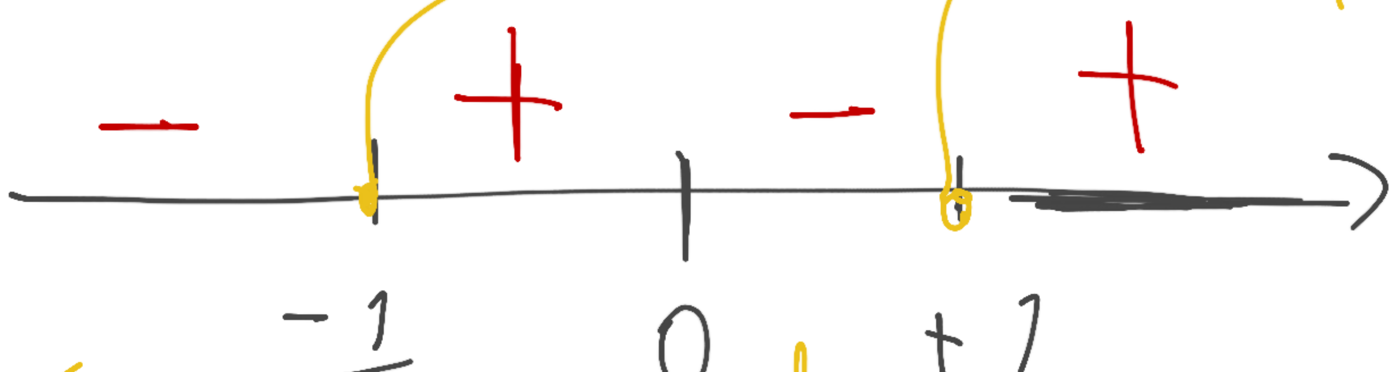
$\Leftrightarrow 2x^4 = 2 \Leftrightarrow x^4 = 1$

$\Leftrightarrow x = \pm 1.$

Logo, f possui dois pontos críticos: -1 e $+1$

• Sinal de f':

min local pois $f'' > 0$



f é dec. cres dec cres

- Derivada segunda

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}$$

$$\boxed{f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4} > 0}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ f é convexa!!!

em todo o seu domínio

f não possui pontos de inflexão.

(c) Esboço do gráfico: