CMA - Aula 08 : Aplicações

(1) Modelo logístico:

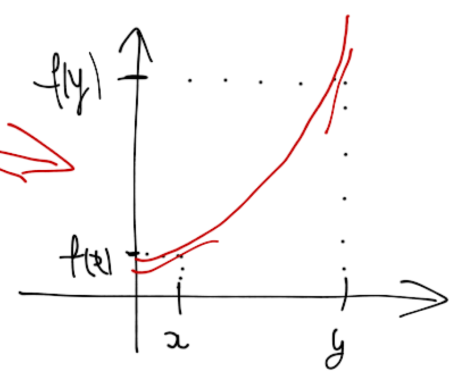
(1.1) Interlúdio matemático: Equações diferenciais

Def: Uma equação diferencial é uma expressão matemática cujo "incógnita" é uma função, isto é, a qual a equação diz algo a respeito de sua derivada.

Ex (1) $f'(x) = x$

Solução: $f(x) = \frac{x^2}{2} + c$

(2) $\boxed{f'(x) = f(x)}$



Solução: $f(x) = e^x + c$

Obs: Função afim

$f(x) = ax + b$

$\boxed{f'(x) = a}$ $\Rightarrow$ derivada cte

(1.2) Modelo logístico?

Objetivo: descrever a função $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a instante de tempo $t \in \mathbb{R}$ associa o tamanho $p(t)$ de uma .

população.

Hipóteses do Modelo:

1º: Quando $p(t)$ é peq a taxa de crescimento é exponencial

2º: Quando $p(t)$ é grande a taxa de crescimento tende a zero.

$\underline{1^{a} H} \Rightarrow p'(t) \approx cte\, p(t)$

quando $p(t) \sim 0$

$\underline{2^{a} H} \Rightarrow p'(t) \approx 0$ quando

$p(t) \rightarrow$ capacidade máxima do ambiente.

<u>Parâmetros</u> <u>do</u> <u>Modelo</u>:

$r \rightarrow$ taxa de crescimento exponencial qd $p(t) \sim 0$

$M \to$ capacidade máx do ambiente

Equação Logística:

$$\boxed{p'(t) = r\,p(t)\left(M - p(t)\right)}$$

Obs: Vimos que:

$p(t) \sim 0 \Rightarrow p'(t) \approx r M p(t)$

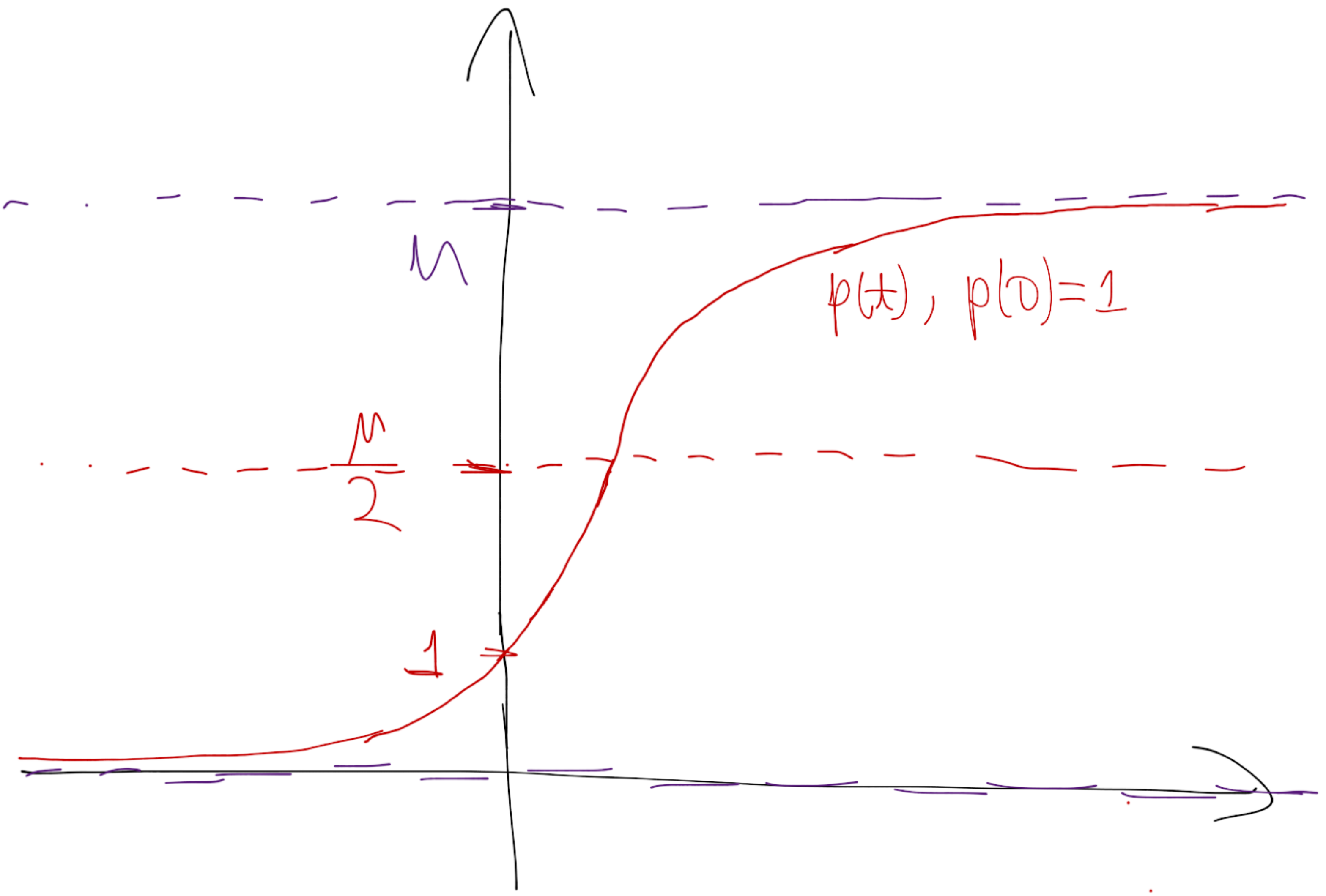
$p'(t) \to 0$ quando $p(t) \to M$.

- Descrição qualitativa do gráfico da função $p(t)$.

Matematicamente: qual o gráfico de uma função que satisfaz a equação acima.

Para isso, vamos supor:

$\boxed{M >> 1}$ e $\boxed{p(0) = 1}$



Como $p'(t) = r\,p(t)\,(M - p(t))$,

como $p(0) = 1$, temos que

$p'(0) = r\,(M-1) > 0.$

$\Rightarrow p(t)$ é crescente perto de zero $\Rightarrow p(t)$ só aumenta

Como $\boxed{p'(t) = r\,p(t)\,(M - p(t))}$

temos que enquanto $p(t) < M$, $p'(t) > 0$.

$\Rightarrow p(t)$ é sempre crescente.

$$\Rightarrow p''(t) = r p'(t) (M - p(t))$$

$$+ r p(t) (-p'(t))$$

$$= rMp'(t) - 2r p(t) p'(t)$$

$$p''(t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$rMp'(t) - 2rp(t)p'(t) = 0$$

$$rp'(t)(M - 2p(t)) = 0$$

Como $p'(t) > 0$, só podemos ter

$$\mu - 2p(t) = 0$$

$$\Rightarrow p(t) = \frac{\mu}{2}$$

- Além disso, como

$$p''(t) = \lambda p'(t)(\mu - 2p(t)),$$

temos que

enquanto $p(t) < \frac{M}{2}$,

$p''(t) > 0$ e

quando $p(t) > \frac{M}{2}$,

$p''(t) < 0$.

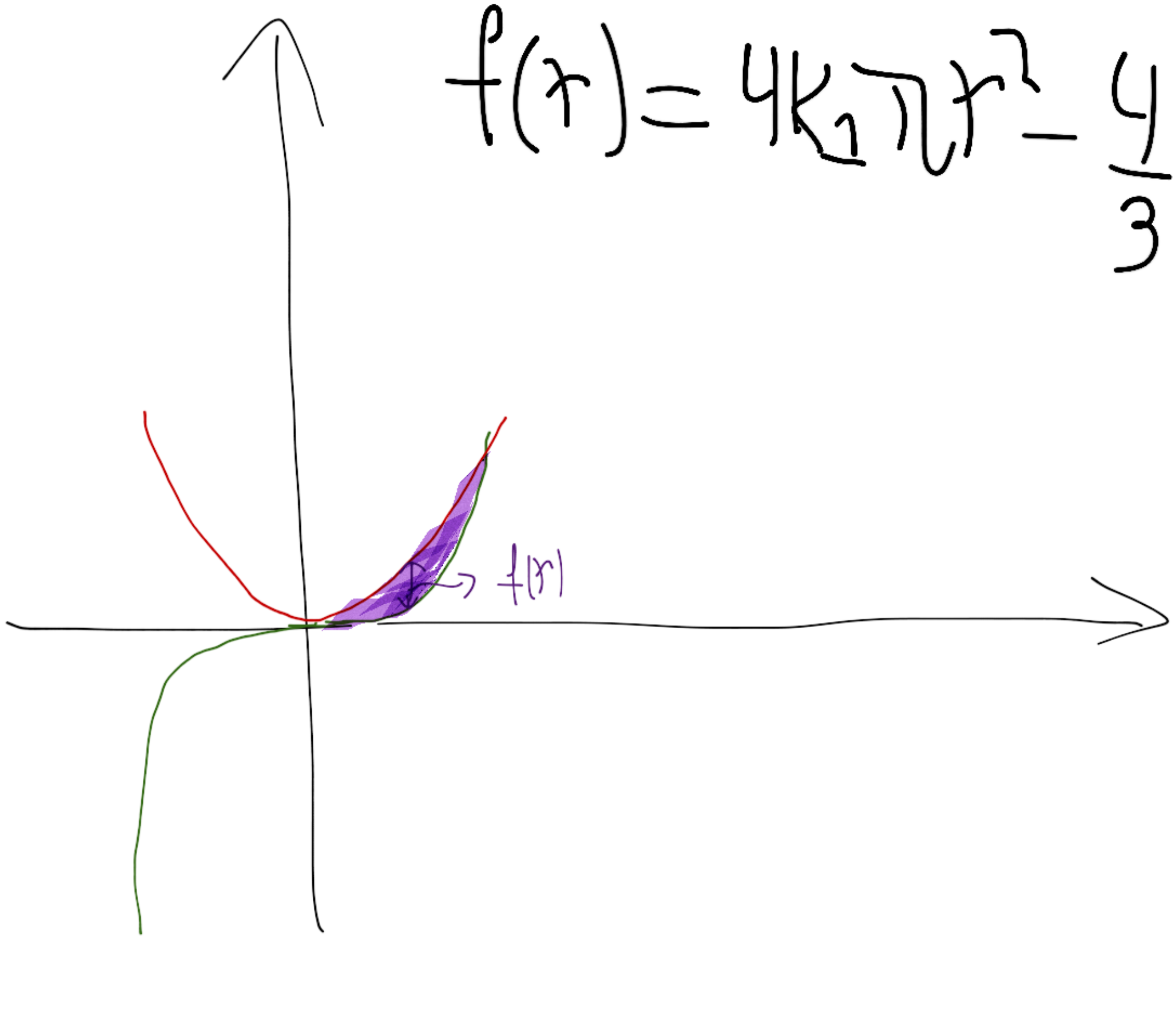
(2) Absorção x consumo de nutrientes:

$$A(r) = 4\underline{k_1}\pi r^2$$

$$c(r) = \frac{4}{3} k_2 \pi r^3$$

$$\boxed{f(r) = A(r) - c(r)}$$

$$f(r) = 4k_1 \pi r^2 - \frac{4}{3} \pi k_2 r^3$$



$$f'(r) = 8k_1\pi r - 4k_2\pi r^2$$

$$f'(r) = 0 \iff$$

$$4\pi r(2k_1 - k_2 r) = 0$$

$$\Rightarrow 2k_1 - k_2 r = 0$$

$$\Rightarrow 2k_1 = k_2 r$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{2k_1}{k_2}}$$ ponto crítico

$$f''(r) = 8k_1\pi - 8\pi k_2 r$$

$$f''\left(\frac{2k_1}{k_2}\right) = 8k_1\pi - 16k_1\pi$$

$$< 0$$

$\Rightarrow$ ponto crítico é um ponto de máximo.