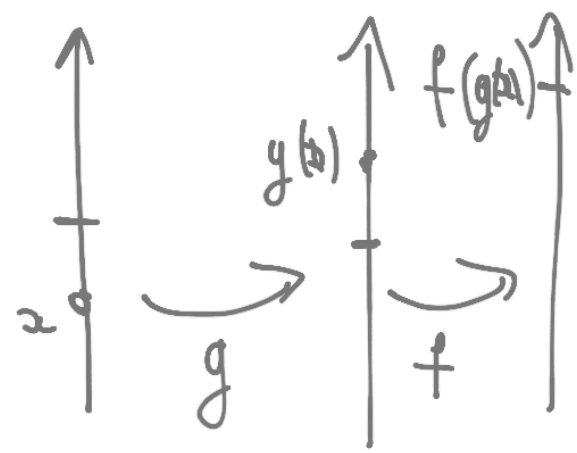
CMA - Aula 09

A regra da cadeia

Funções compostas:

$$f : J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

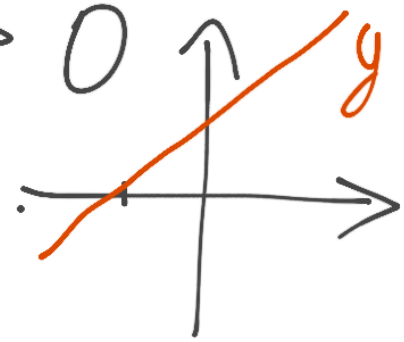


tais que:

$$g(I) \subseteq J$$

Exemplo: $g : [-2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R},$

$g(x) = x+2$, $g(x) \geq 0$



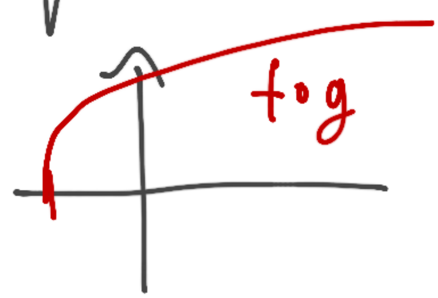
$\forall x \in [-2, +\infty)$

$f(x) = \sqrt{x}$, $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$\to$ Função composta entre f, g.

$\boxed{h = f \circ g(x)}$

$= f(g(x)) = \sqrt{x+2}$



(2) $y(x) = x^2 + d^2$

$$g(y) = \sqrt{y}$$

$$f(x) = g \circ y(x)$$

$$= \sqrt{x^2 + d^2}$$

<u>Exemplos</u> <u>de</u> <u>Aplicações</u>:

(1) (Nível de poluição)

Modelo: $\underline{\underline{t}}$ tempo

Funçãos do modelo:

$p(t)$ = população humona x tempo

$g(p)$ = polução criada x população humona

$f(t) = g \circ p(t)$ = polução criada x Tempo

(2) Orçamento de café

$\underline{\underline{t}}$ tempo

$x(t)$ = # copos de café x tempo

$g(x)$ = custo de x copos de café

$$C(t) = g \circ x(t) = g(x(t))$$

A regra da cadeia:

Sejam $g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$g(I) \subseteq J.$$

Considere a função composta

$$\varphi(x) = f \circ g(x).$$

Então, a derivada da função composta φ pode ser calculada pela regra da cadeia:

$$\boxed{\varphi'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Exemplo (1) $g(x) = x^7 + 5$

$f(x) = x^{10}$

$$\varphi(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$$
$$= (x^7 + 5)^{10}$$

$$g'(x) = 7x^6$$

$$f'(x) = 10x^9$$

$$\varphi'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= 10\, g(x)^9 \cdot g'(x)$$

$$= 10(x^7+5)^9 \cdot 7x^6$$

$$= 70x^6(x^7+5)^9$$

(2) $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= x^2 + a^2 \\ g(y) &= \sqrt{y} = y^{1/2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = g \circ y(x)$$

$$y'(x) = 2x$$

$$g'(y) = \frac{1}{2} y^{1/2 - 1} = \frac{1}{2} y^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{y^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$f'(x) = g'(y(x)) \cdot y'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+d^2}} \cdot 2x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}} \quad //$$

(3) $\varphi(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+d^2}} = \dfrac{x}{f(x)}$

Regra do quociente:

$$\varphi'(x) = \frac{1 \cdot f(x) - x f'(x)}{f(x)^2}$$

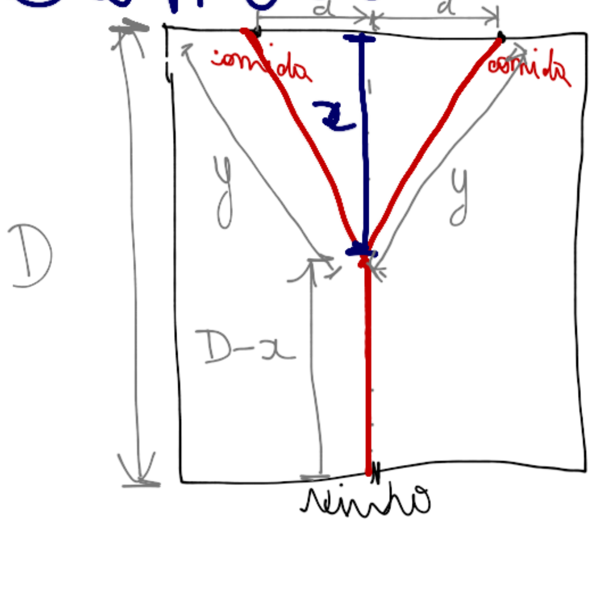
$$= \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+d^2}}{1} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+d^2}}}{x^2+d^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{x^2+d^2-x^2}{\sqrt{x^2+d^2}}}{x^2+d^2} = \frac{\dfrac{d^2}{(x^2+d^2)^{1/2}}}{(x^2+d^2)}$$

$$= \frac{d^2}{(x^2+d^2)^{1/2}} \cdot \frac{1}{(x^2+d^2)} =$$

$$= \frac{d^2}{(x^2+d^2)^{3/2}}$$

Aplicação: Modelando o deslocamento das formigas



y depende x:

Teorema de Pitágoras

$x^2+d^2=y^2$

$\therefore y=\sqrt{x^2+d^2}$

Modelagem matemática:

Qual o valor de x para o qual o comp da fig vermelha é o menor possível?

$$f(x) = \text{comp. } Y \, (x)$$

$$= 2y + D - x$$

$$= 2\sqrt{x^2 + d^2} + D - x$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(x) = 2f(x) + D - x},$$

onde

$$f(x) = \sqrt{x^2 + d^2}.$$

Domínio de $\psi(x)$:

$$\boxed{x \in [0, D]}$$

<u>Solução Matemática do Problema</u>:

<u>1ª Etapa</u>: calcular os extremos locais da função

Pontos críticos: x tais que

$$\psi'(x) = 0$$

$$\psi'(x) = 2f'(x) - 1$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2+d^2}} - 1$$

$$= 2\varphi(x) - 1$$

$$\Rightarrow \psi''(x) = 2\varphi'(x) = \frac{2d^2}{(x^2+d^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi'(x) > 0}$$

Ponto crítico: x que satisfaz

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2+d^2}} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{x^2+d^2}} = 1 \Rightarrow 2x = \sqrt{x^2+d^2}$$

$$4x^2 = x^2 + d^2 \Rightarrow 3x^2 = d^2$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{d}{\sqrt{3}}} \rightarrow \text{pto di mínimo local}$$

$$\psi(x) = 2\sqrt{x^2 + d^2} + D - x$$

$$\psi(0) = 2d + D$$

$$\psi(D) = 2\sqrt{d^2 + D^2}$$

$$\psi\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{\frac{d^2}{3} + d^2} + D - \frac{d}{\sqrt{3}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{4d^2}{3}} + D - \frac{d}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4d}{\sqrt{3}} + D - \frac{d}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{3d}{\sqrt{3}} + D \quad ???$$

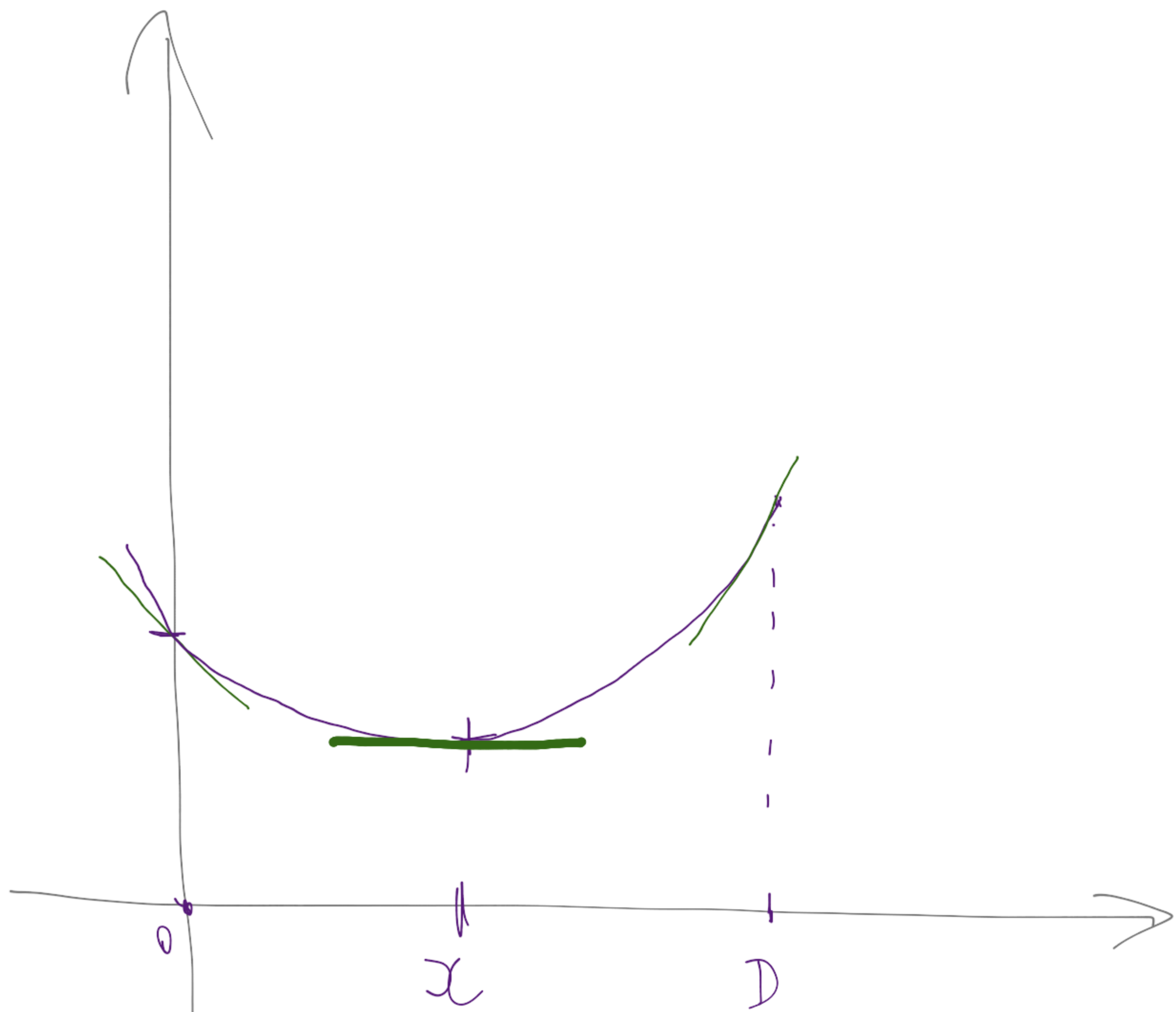
* Gráfico de ψ:

Como $\psi'' > 0$, ψ' só aumenta. $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$.

Como $\psi'(x) = 0$, devemos

tem:

$$\psi(0) < 0 \text{ e } \psi(D) > 0$$



$\Rightarrow x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ é o mínimo global da função ψ