CMA - Aula 10

Aplicações da Regra da Cadeia

Regra da Cadeia:

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$,

$g : J \longrightarrow \mathbb{R}$,

tais que

$$g(J) \subseteq I,$$

então a derivada da função

$$\varphi(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$$

$$\varphi'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Exemplo: $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$,

$f(x) = \sqrt{x}$.

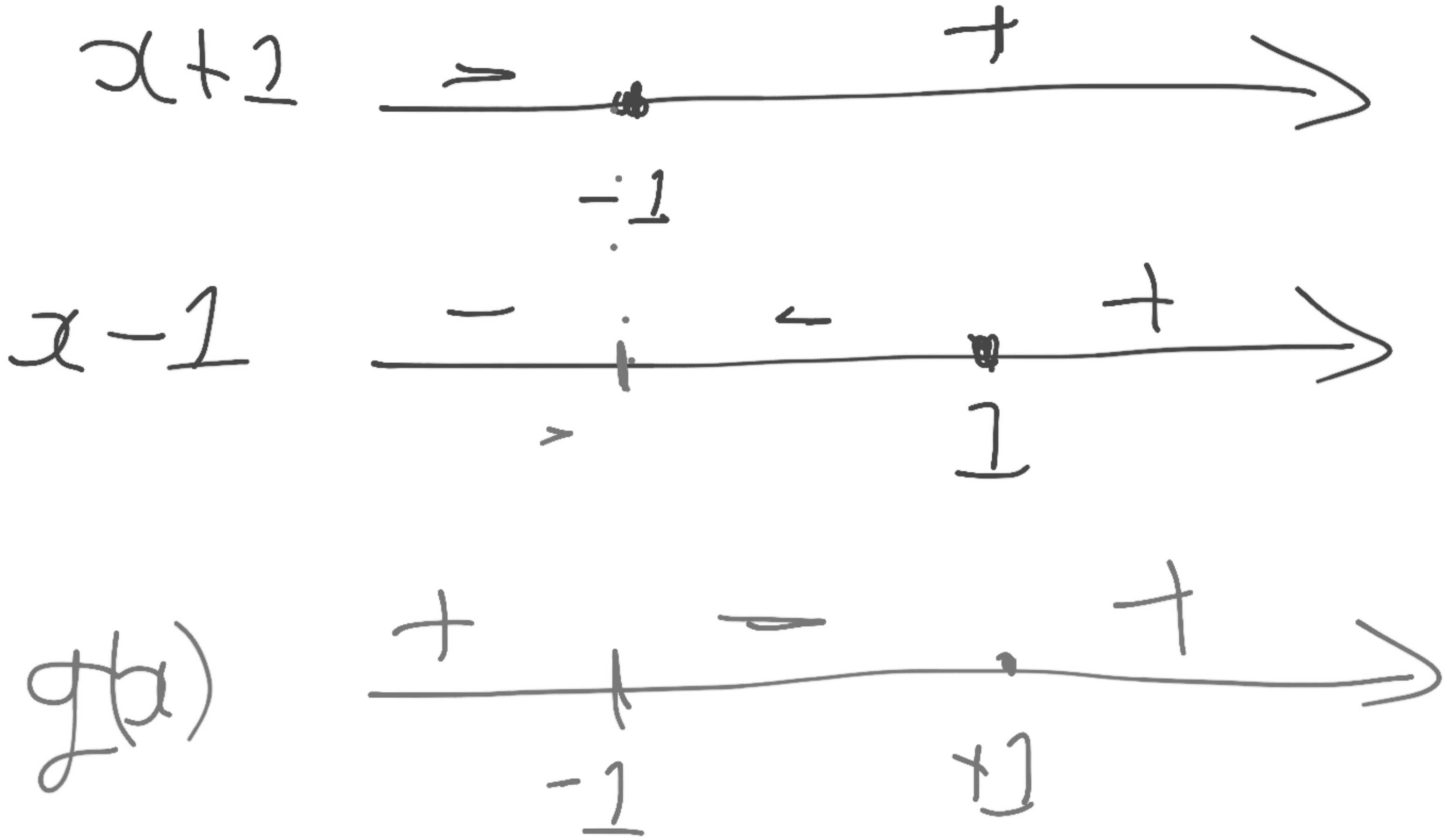
Como $dom(f) = [0, +\infty)$,

precisamos que

$$g(x) \geq 0$$

$$\iff \frac{x+1}{x-1} \geq 0$$

· Análise de sinal:



$$\operatorname{dom}(f \circ g) = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$$

$$\varphi(x) = f \circ g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

Rascunho: $\varphi(x) = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\varphi'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}}$; $f(x) = x^{\alpha}$, com $\alpha = 1/2$. $b^{-\alpha} = \frac{1}{b^{\alpha}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{1/2 - 1} = \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

Regola del quoziente:

$$\psi(x) = \frac{\xi(x)}{\varphi(x)}$$

$$\Rightarrow \psi'(x) = \frac{\xi'(x)\varphi(x) - \xi(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

$$\varphi(x) = f \circ g\,(x)$$

$$\varphi'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} \,.$$

//

Problemas de Taxas Relacionadas

Problema 1: Célula esférica em crescimento, cujo raio aumenta com velocidade constante. Qual a taxa de variação do volume da célula?

Solução: $V(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3.$

Mas $r(t)$ é uma função com derivada cte, i.e,

$$\boxed{r'(t) = c}$$

Obs: $c > 0$

$\Rightarrow V$ é uma função composta!

$$V(t) = f \circ r(t),$$

onde $f(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$.

Portanto,

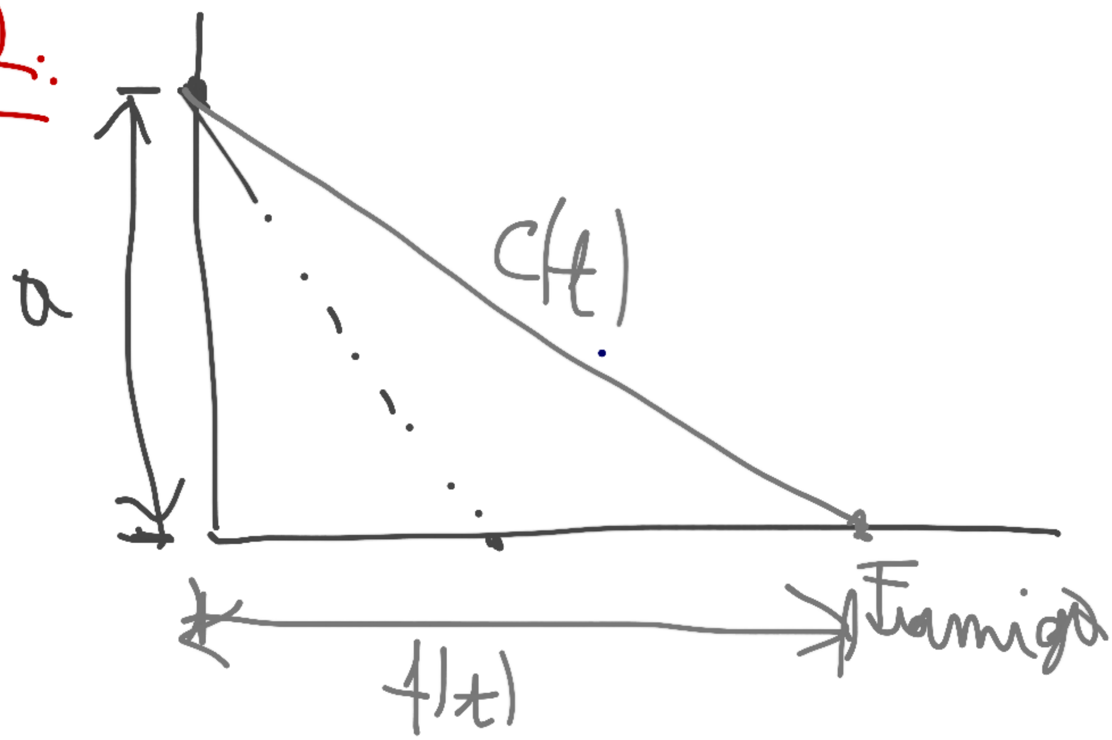
$$V'(t) = f'(r(t)) \cdot r'(t)$$

$$\boxed{f'(x) = 4\pi x^2}$$

$$\Rightarrow V'(t) = 4\pi\, r(t)^2 \cdot r'(t)$$

$$\therefore \boxed{V'(t) = 4\pi\, r(t)^2 \cdot c}$$

Problema 2:



Suponha que a velocidade da formiga é cte. Qual a taxa de variação do comprimento?

* Teorema de Pitágoras:

$$\boxed{\underbrace{f(t)}_{\varphi(t)}{}^2 + a^2 = c(t)^2} \Rightarrow \boxed{c(t) = \sqrt{f(t)^2 + a^2}}$$

Derivando:

$$\boxed{2f(t) \cdot f'(t) = 2c(t)\, c'(t)}$$

$$\varphi(t) = g \circ f(t), \text{ onde } g(x) = x^2$$

$$\varphi'(t) = g'(f(t)) \cdot f'(t)$$

$$g'(x) = 2x \Rightarrow \varphi'(t) = 2f(t) \cdot f'(t)$$

$$c'(t) = \frac{\cancel{2} f(t) f'(t)}{\cancel{2}\sqrt{f(t)^2 + a^2}}$$

Como $f'(t) = k > 0$

$$\boxed{c'(t) = \frac{k\, f(t)}{\sqrt{f(t)^2 + a^2}}}$$

Obs: Como $\boxed{f'(t) = k}$, e

como a anti-derivada de uma cte é uma função afim;

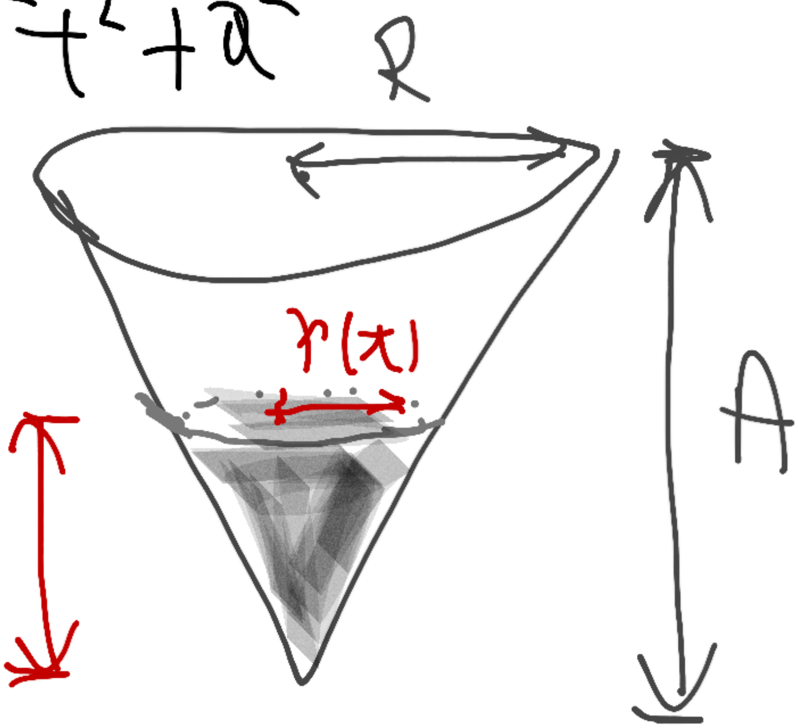
$$f(t) = kt + b$$

supondo $f(0) = 0$, teríamos

$$f(t) = kt$$

$$c'(t) = \frac{k^2 t}{\sqrt{k^2 t^2 + a^2}}.$$

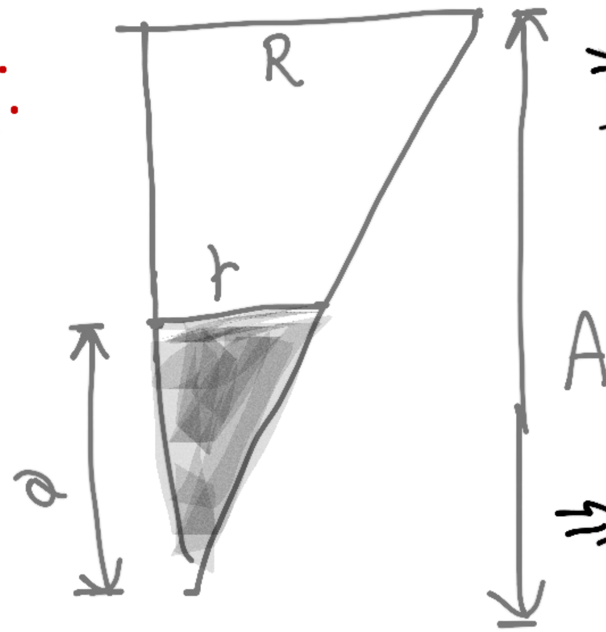
Problema 3:



- <u>Vazão de</u>.

- Qual a velocidade com a qual a altura da água diminui?

Solução:



* Semelhança de Triângulos

$$\frac{r}{a} = \frac{R}{A}$$

$$\Rightarrow r(t) = \underbrace{\boxed{\frac{R}{A}}}_{K} \, a(t) = K\, a(t)$$

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi\, r(t)^2\, a(t)$$

$$= \frac{1}{3}\pi K^2 a(t)^2 \cdot a(t)$$

$$= \frac{1}{3}\pi K^2 a(t)^3$$

Por hipótese, $V'(t) = \beta < 0$.

Por outro lado, aplicando a regra da cadeia:

$$V(t) = g \circ a(t), \text{ onde}$$

$$g(x) = \frac{2}{3}\pi k^2 x^3$$

$$\Rightarrow \boxed{g'(x) = \pi k^3 x^2}$$

Pela regra da cadeia,

$$V'(t) = g'(a(t)) \cdot a'(t)$$

$$\Rightarrow V'(t) = \pi K^2 a(t)^2 \cdot a'(t)$$

Portanto:

$$a'(t) \cdot a(t)^2 \pi K^2 = \beta$$

$$\Rightarrow \boxed{a'(t) = \frac{\beta}{a(t)\pi K^2}} < 0$$