CMA – aula 11

A função exponencial.

- Crescimento exponencial

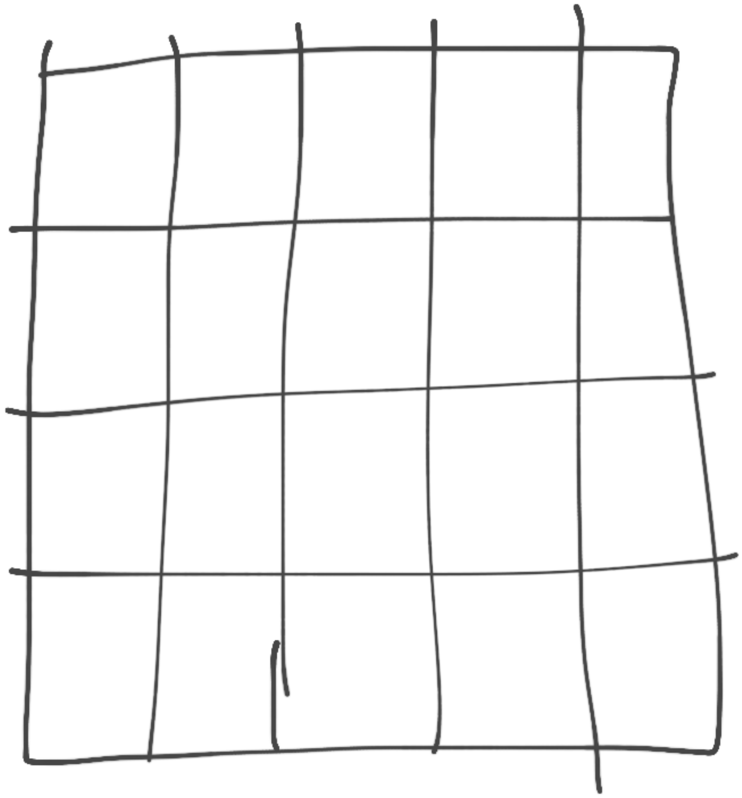
$$1+2+4+8+\dots+\boxed{2^n}=$$

$$\underbrace{2^{n+1}-1}$$

$$=2\times 2^n-1$$

$$<2\times 2^n$$

- O Homem que calculava



$1+2+4+8+\dots+2^{64} = 2^{65}-1$

Massa da Terra $\simeq 10^{27}$ g

$(2\times 5)^{27} = 2^{27}\times(2\times 2.5)^{27}$

$= 2^{27}\times 2^{27}\times(2.5)^{27}$

$\leq 2^{54} \times 4^{27} = 2^{108}$ g

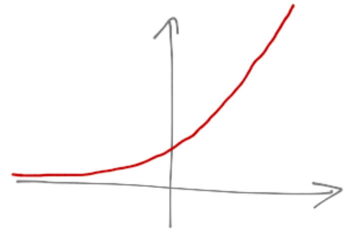
Função exponencial:

$f(x) = b^x$, onde $b > 0$

é chamado de base.

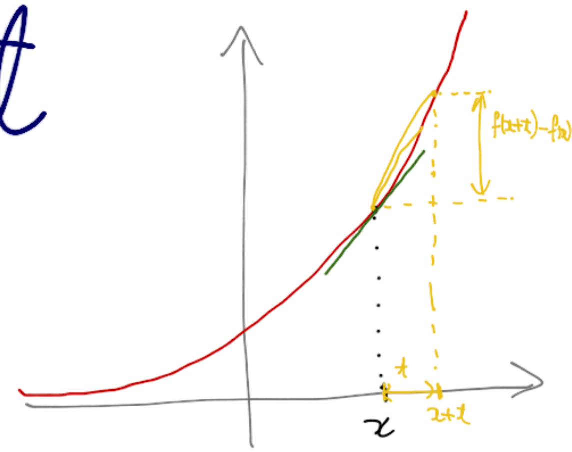
Ex $f(x) = 2^x$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2^x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16



Fix. $b>0$ uma base. Qual a derivada da função $f(x)=b^x$?

$$f'(x)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}$$



$$=\lim_{t\to 0}\frac{b^{x+t}-b^x}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{b^x\cdot b^t-b^x}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{b^x\left(b^t-1\right)}{t}$$

Rascunho:

$$c(2)\approx\frac{2^{0.01}-1}{0.01}$$

$$\approx 0.69$$

$$c(3)\cong\frac{3^{0.001}-1}{0.001}$$

$$\approx 1{,}0992$$

$$= b^x \boxed{\lim_{t\to 0} \frac{b^t - 1}{t}} = c(b)$$

$* \boxed{f'(x) = c(b)\, b^x}$, onde $c(b)$ é uma constante que só depende da base.

Pergunta: Existe alguma base b para a qual $c(b) = 1$?

Seja e a base para a qual $c(e) = 1 \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$

$$\Rightarrow e^t - 1 \simeq t$$

$$\Rightarrow e^t \simeq t + 1$$

$$\Rightarrow e \simeq (t+1)^{1/t}$$

Ou seja

$$e = \lim_{t \to 0} (t+1)^{1/t}$$

Fazendo $t = \frac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \simeq 2.718$$

Portanto, se $f(x) = e^x$,

$$\boxed{f'(x) = e^x}$$

- Propriedades da exponenciação

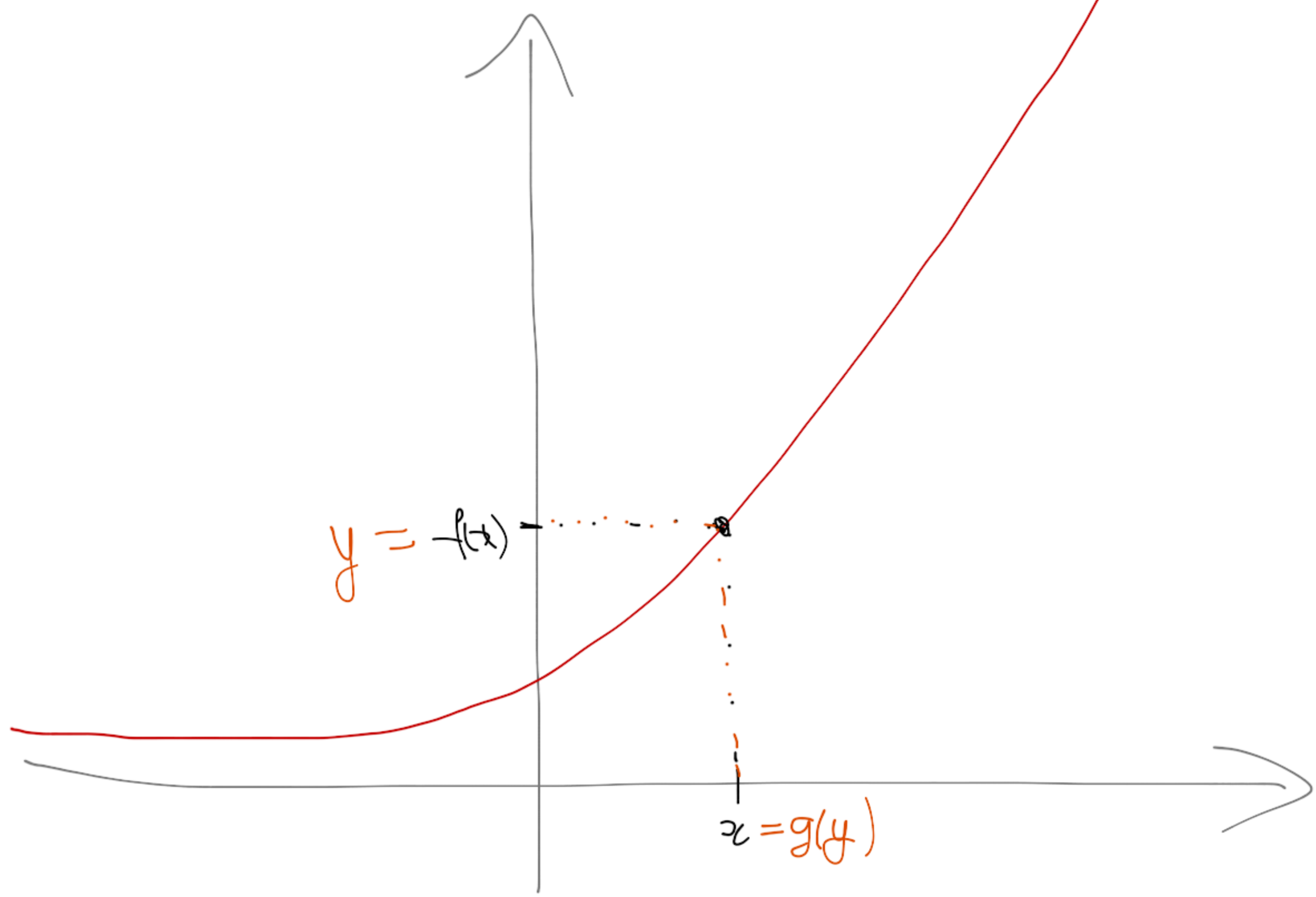
- $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

- $(e^x)^y = e^{xy}$

- $e^x > 0$, $\forall x > 0$

- $e^x \to 0$, $x \to -\infty$

$e^x \to +\infty$, $x \to +\infty$



- <u>Função</u> <u>Inversa</u>:

$f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, como e^x, cuja derivada é positiva existe $g:(0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, tal

$$g(f(x)) = x \quad e$$

$$f(g(x)) = x.$$

Em particular, existe uma função

$$\log : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

que é a inversa de e^x.

$$\log(e^x) = x.$$

Dito de outra forma:

$$\log y = x \Longleftrightarrow y = e^x$$

- Como calcular a derivada da função inversa?

$$f(g(x)) = x$$

Considera a função composta

$$\varphi(x) = f \circ g(x).$$

Por um lado, pela regra da cadeia,

$$\varphi'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Por outro lado,

$$\varphi(x) = x$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = 1$$

Logo,

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$$

ou seja:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

Se $f(x) = e^x$ e $g(x) = \log x$

$f'(x) = e^x$, logo:

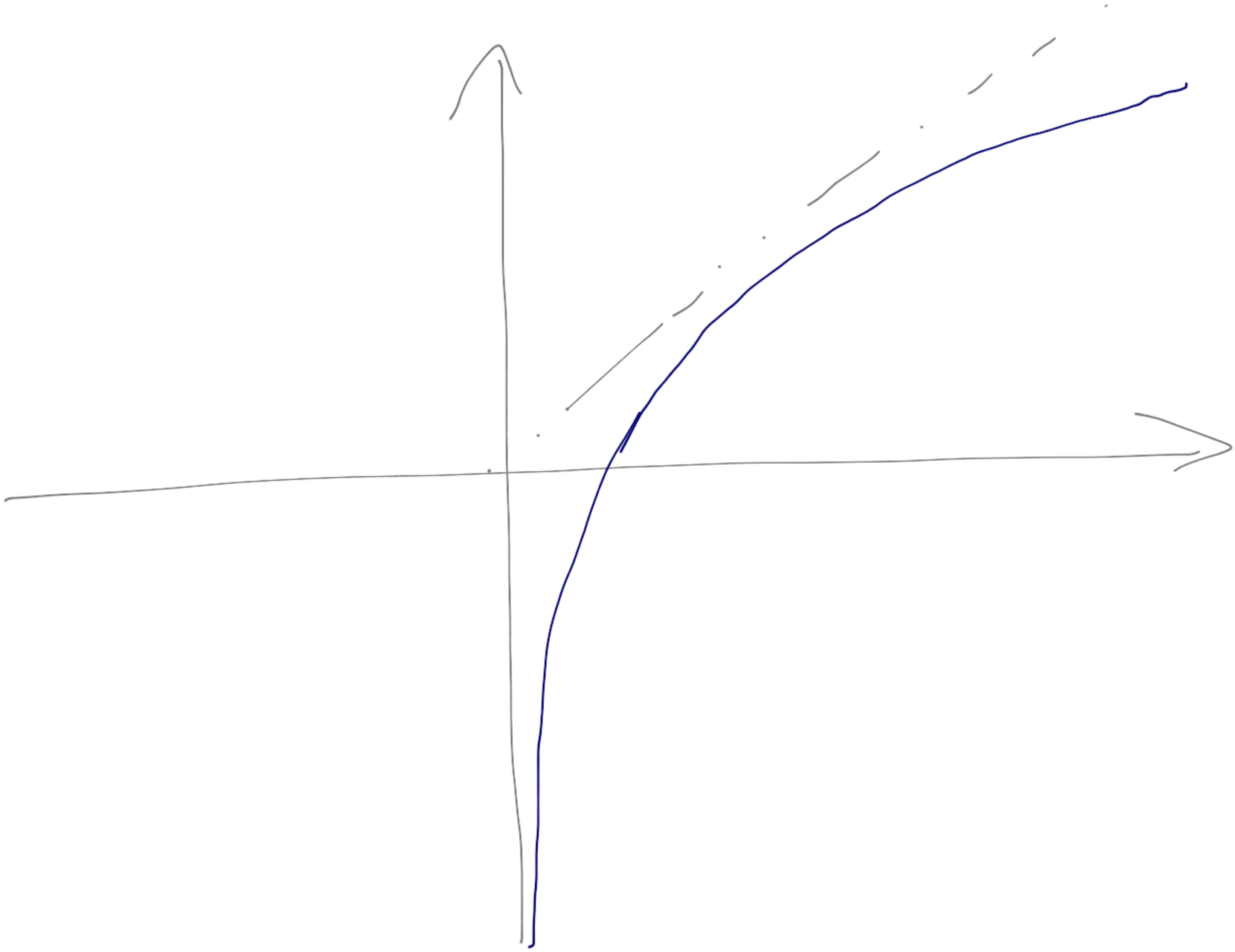
$$g'(x) = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

Ou seja, a derivada da função log x é $1/x$.

$$g'(x) = 1/x \Rightarrow g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

- $\lim\limits_{x \to 0} g'(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1/x = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to \infty} g'(x) = \lim\limits_{x \to \infty} 1/x = 0$



- Cálculo de derivadas:

$$\gamma(x) = 3e^{x^2+x^3}$$

$$\gamma(x) = 3 f \circ \varphi(x) \text{, onde}$$

$f(x) = e^x$ e $\varphi(x) = x^2 + x^3$

$f'(x) = e^x$, $\varphi'(x) = 2x + 3x^2$

$\psi'(x) = 3 f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

$$= 3e^{x^2+x^3}(2x+3x^2)$$

2) $\log\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \psi(x)$

$\psi(x) = g \circ \varphi(x)$, onde

$$g(x) = \log x \, , \quad \varphi(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} \, , \quad \varphi'(x) = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$\psi'(x) = g'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(x)} \times \varphi'(x) =$$

$$= \frac{\cancel{x-1}}{x+1} \times \frac{-2}{(x-1)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{-2}{x^2-1} \quad //$$