UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Programa de Pós-Graduação
Disciplina: Análise $\mathbb{R}$eal
Professor: Bruno Santiago
Lista de exercícios 1

Exercício 1. *Seja* $b > 1$ *um número real e seja* $q = m/n \in \mathbb{Q}$ *um número racional, com* $n > 0$*. Prove que* $b^q \overset{\text{def}}{=} (b^m)^{1/n}$ *não depende da fração que representa* q*. Dado* $x \in \mathbb{R}$*, considere o conjunto*

$$B(x) \overset{\text{def}}{=} \{b^q; q \in \mathbb{Q} \text{ e } q \leq x\}.$$

Prove que, se $r \in \mathbb{Q}$ *então* $b^r = \sup B(r)$*. Isso permite definir a* ***potência de expoente real*** *como* $b^x = \sup B(x)$*.*

Exercício 2. *Sejam* $b > 1$ *e* $y > 0$ *números reais. Prove que existe um único* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $b^x = y$*. Esse número é chamado o* ***logaritmo de*** y ***na base*** b*, denotado por* $x = \log_b y$*.*

Exercício 3. *Um número real* x *é dito* algébrico *se existem inteiros* $a_0, ..., a_n$*, com pelo menos um deles* $\neq 0$*, tais que*

$$\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell x^\ell = 0.$$

Seja $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ *o conjunto dos números algébricos. Prove que* $\text{card}(\mathbb{A}) = \text{card}(\mathbb{N})$*, i.e.* ***o conjunto dos números algébricos é infinito e enumerável.***

Exercício 4. *Seja* $E \subset \mathbb{R}$ *um conjunto não-enumerável. Dizemos que* $x \in \mathbb{R}$ *é um* ***ponto de condensação*** *de* E *se para todo* $r > 0$ $(x - r, x + r) \cap E$ *é não-enumerável. Denote por* P *o conjunto dos pontos de condensação de* E*. Prove que* P *é não-enumerável e* $\text{card}(P^c \cap E) \leq \text{card}(\mathbb{N})$*.*

Exercício 5. *Seja* $F \subset \mathbb{R}$ *fechado. Prove que existem* $A, B \subset \mathbb{R}$ *com* A *um conjunto perfeito (podendo ser* $A = \emptyset$*) e* $\text{card}(B) \leq \text{card}(\mathbb{N})$*. Deduza que todo subconjunto enumerável e fechado de* $\mathbb{R}$ *possui pontos isolados.*

Exercício 6. *Prove que todo aberto da reta é uma união (no máximo) enumerável de intervalos abertos dois a dois disjuntos.*