UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Programa de Pós-Graduação
Disciplina: Análise $\mathbb{R}$eal
Professor: Bruno Santiago
Primeira Avaliação

Questão 1 (2.5pt)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico e sejam $K \subset X$ um subconjunto compacto e $F \subset X$ um subconjunto fechado. Prove que se $F \cap K = \emptyset$ então $d(F, K) > 0$, onde*

$$d(F, K) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{d(x, y); x \in K,\ y \in F\}$$

é a menor distância entre F e K.

Questão 2 (2.5pt)**.** *Seja $0 < a < 1$. Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} na^n < \infty$.*

Questão 3 (2.5pt)**.** *Sejam $0 < a < 1$ e $\{x_n\} \subset (0, +\infty)$ uma sequência satisfazendo $x_n \to 0$. Seja $g_n = \sum_{\ell=1}^{n} a^{n-\ell} x_\ell$. Prove que $g_n \to 0$.*

Questão 4 (2.5pt)**.** *Seja $\{a_n\} \subset (0, +\infty)$ um sequência tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Defina indutivamente*

$$\rho_1 = \frac{1}{1 + a_1} \text{ e } \rho_{n+1} = \frac{\rho_n}{1 + a_{n+1}}.$$

Verifique que $\rho_n = \prod_{\ell=1}^{n} \frac{1}{1+a_\ell}$ e que ρ_n é uma sequência monótona, estritamente decrescente, limitada inferiormente por 0 e que $\rho = \lim \rho_n > 0$.

Questão 5 (2pt)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Seja $P \subset X$ um subconjunto perfeito (todo ponto de P é ponto de acumulação). Prove que P é não-enumerável. Este resultado generaliza o teorema visto em aula quando $X = \mathbb{R}$.*