UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Programa de Pós-Graduação
Disciplina: Análise $\mathbb{R}$eal
Professor: Bruno Santiago
Segunda Avaliação

Questão 1 (1pt). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)dt = f(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Questão 2 (2pt). *Considere a seguinte relação em $\mathbb{R}$: $x \equiv y \mod \mathbb{Z}$ quando $x - y \in \mathbb{Z}$.*

(a) ***0.2pt**: Verifique que isso define uma relação de equivalência em $\mathbb{R}$ e que para todo $x \in \mathbb{R}$ existe um único $y \in [0, 1)$ tal que $x \equiv y \mod \mathbb{Z}$.*

(b) ***1.8pt** Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $x_n \in [0, 1)$ tal que $x_n \equiv \sqrt{n} \mod \mathbb{Z}$. Prove que $X = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ é denso no intervalo $[0, 1]$, i.e. $\overline{X} = [0, 1]$.*

Questão 3 (2 pt). *Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ uma função de classe C^1 satisfazendo $f(0) = 0$ e $f(x) < x$ para todo $x \in (0, 1)$. Defina uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ recursivamente escolhendo $x_1 \in (0, 1)$ e pondo $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(a) ***0.5 pt** Prove que $x_n \to 0$.*

(b) ***1.5 pt** Suponha que $f'(0) = \lambda \in (0, 1)$. Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$.*

Questão 4 (2 pt). *Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 com $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $f'(x) > 1$ para todo $x > 0$. Seja $a_1 \in (0, 1)$ e defina recursivamente a_{n+1} pela equação $f(a_{n+1}) = a_n$. Prove que*

(a) ***0.5 pt** $a_n \to 0$;*

(b) ***1.5 pt** mas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.*

Questão 5 (3pt). *Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ uma função contínua, bijetiva, monótona estritamente crescente satisfazendo $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $f(x) < x$ para todo $x \in (0, 1)$. Seja $\tau : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Para cada par de pontos $x, y \in (0, 1)$ considere a sequência*

$$\Phi_n(x, y) = |\sum_{j=0}^{n-1} \tau(f^j(x)) - \tau(f^j(y))|.$$

Prove que para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $d(x, y) < \delta$ então $\Phi_n(x, y) < \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Questão 6 (3 pt). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que a n-ésima derivada em x satisfaz $f^{(n)}(x) = 0$. Prove que f é um polinômio.*