UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE

Disciplina: Complementos de Matemática Aplicada - Biomedicina e Ciências Ambientais 2021.I

Primeira Avaliação

Professor: Bruno Santiago

Escreva suas respostas apontando claramente todos os raciocínios que conduziram a solução, bem como todos os resultados e referências utilizadas. Cada questão vale 3 pontos.

Questão 1. *Suponha que a energia de um determinado sistema físico seja dada em função do estado do sistema por uma função* $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *da forma*

$$E(x) = 8x^4 - x^2.$$

Nesse modelo cada valor numérico $x \in \mathbb{R}$ *deve ser interpretado como um estado do sistema. Estados diferentes podem estar associados a energias iguais. Por exemplo,* $E(-2) = E(2) = 124$*. Dizemos nessa situação que o nível de energia 124 contém pelo menos os estados* $x = 2$ *e* $x = -2$*. Determine quais níveis de energia contém a maior quantidade possível de estados.*

Solução. Seja $y \in \mathbb{R}$ pensado como um valor possível para a energia. Então, a quantidade de estados do sistema com energia exatamente igual a y corresponde a quantidade de soluções da equação

$$E(x) = y.$$

Então, o problema demanda que para cada valor de y encontremos a quantidade de soluções da equação $8x^4 - x^2 = y$. O jeito mais fácil de se resolver esse problema é adotar a estratégia da geometria analítica: se desenharmos o gráfico da função $E(x) = 8x^4 - x^2$, o número de soluções da equação $8x^4 - x^2 = y$ corresponderá ao número de pontos de interseção entre a reta horizontal de altura y e o gráfico de E.

Seguindo essa estratégia vamos esboçar o gráfico de E. Calculamos a derivada de E:

$$E'(x) = 32x^3 - 2x.$$

Os pontos críticos são as soluções de

$$16x^3 - 2x = 0 \iff 2x(16x^2 - 1) = 0$$

Logo os pontos críticos são $x = 0$ e $x = \pm 1/4$. Note que então $E'(-9) < 0$ e $E'(9) > 0$. Assim, o sinal da derivada da função E pode ser descrito pelo seguinte diagrama abaixo.

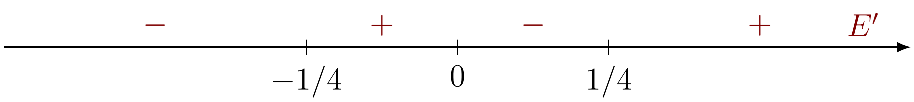


Figura 1. Tabua de sinais da derivada da função energia E

Passamos agora à derivada segunda. $E''(x) = 96x^2 - 2$. Os pontos de inflexão são as soluções da equação $96x^2 - 2 = 0$, que são $x = \pm 1/\sqrt{48}$. O sinal da derivada segunda pode ser então descrito pelo diagrama Vemos assim que $\pm 1/4$ são pontos de mínimo local, ao passo que 0 é um ponto de máximo local.

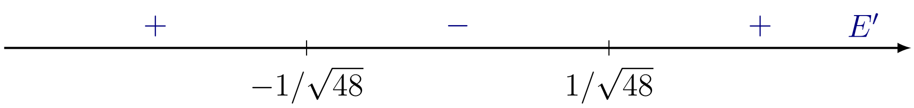


Figura 2. Tabua de sinais da derivada segunda da função energia E.

Como $E(0) = 0$ podemos esboçar o gráfico. Vemos que a região do gráfico que tem mais interseções com retas horizontais é a região entre os dois pontos de mínimo e o eixo horizontal. Como $E(\pm 1/4) = -0.03125$, vemos que para valores de $y \in (-0.03125, 0)$ cada reta horizontal de altura y cruza o gráfico exatamente 4 vezes (veja a reta azul na figura 3). O observe que o eixo horizontal cruza o gráfico três vezes, a reta

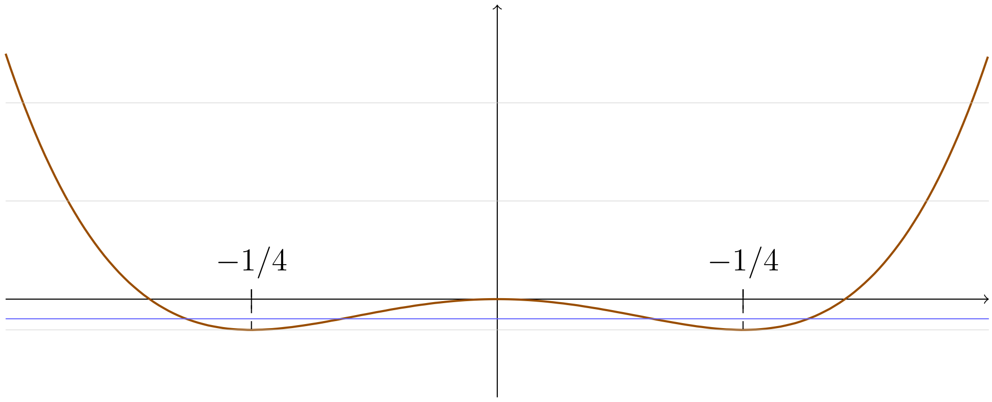


FIGURA 3. Esboço do gráfico da função energia

$y = -0.03215$ só toca o gráfico duas vezes (exatamente nos extremos) e qualquer reta de altura $y > 0$ só cruza o gráfico duas vezes (vejas as retas cinza claro na figura). □

Questão 2. *Duas partículas F e G se movem em linha reta de forma que suas posições em cada instante de tempo sejam dadas por funções*

$$f(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \quad e \quad g(t) = 0.4t.$$

(a) *Determine quantas vezes, a partir do instante $t = 0$, as posições de F e de G são as mesmas.*
(b) *Esboce os gráficos das funções f e g e use o teorema do valor médio para determinar quantas vezes, após o instante $t = 0$, as* velocidades *de F e de G são as mesmas.*
(c) *Utilize o* ***método de Newton*** *para encontrar aproximações de todos os instantes de tempo (após $t = 0$) nos quais as velocidades de F e G são as mesmas.*

Solução. (a) Como as posições de F e G ao longo do tempo são descritas pelas funções $f(t)$ e $g(t)$ respectivamente, teremos encontro se, e somente se $f(t) = g(t)$. Ou seja, devemos resolver

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{1+t^2} &= 0.4t \\ \iff & x^2 = 0.4x + 0.4x^3 \\ \iff & t = 0.4 + 0.4t^2 \\ \iff & 2t^2 - 5t + 2 = 0 \\ \iff & t = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4.2.2}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

Logo os encontros ocorrem nos tempos $t = 0.5$ e $t = 2$. □

(b) Como $g(t) = 0.4t$ é uma função linear, seu gráfico é uma reta que passa pela origem com inclinação igual 0.4. Passamos a analisar o gráfico de f. Faremos isso *analogicamente*, seguindo a teoria que aprendemos no curso. A derivada de f é dada por (para calculá-la usamos a regra do quociente)

$$f'(t) = \frac{2t(1+t^2) - t^2(2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{2t}{(1+t^2)^2}.$$

Vemos assim que $f'(0) = 0$ e $f'(t) > 0$ se $t > 0$. Dentro da modelagem proposta pela questão, isso significa que, enquanto a partícula G se move com velocidade constante igual a 0.4 a partícula F começa com uma velocidade nula que aumenta logo nos instantes iniciais do movimento, e permanece sempre positiva. Com relação aos gráficos das funções f e g isso significa que o gráfico de f se inicia tangente ao eixo horizontal do plano cartesiano e vai subindo nos instantes iniciais. Observe ainda que $f'(1) = 1 > 0.4$. Isso quer dizer que a velocidade de F ultrapassa a velocidade de G antes do instante $t = 1$. Portanto, pelo teorema do valor médio pelo menos uma coincidência de velocidades deve ocorrer antes de $t = 1$. Observe ainda que $f(1) = 0.5 > 0.4 = g(1)$. Logo, não só a velocidade de F é maior nesse instante como também F já ultrapassou G.

No entanto, para uma análise mais detalhada, vamos agora calcular a derivada segunda, ou seja a aceleração do movimento de F para entender como se oscila a sua velocidade. Para o cálculo usamos a regra do quociente mais uma vez.

$$f''(t) = \frac{2(1+t^2)^2 - 8t^2(1+t^2)}{(1+t^2)^4} = \frac{2(1+t^2)(1-3t^2)}{(1+t^2)^4}.$$

Vemos assim que o sinal da derivada segunda de f é governado pelo sinal da expressão $(1-3t^2)$. Essa expressão é nula quando $t = 1/\sqrt{3}$, é positiva quando $0 < t < 1/\sqrt{3}$ e negativa quando $t > 1/\sqrt{3}$. Deduzimos portanto que a aceleração de F é positiva nos instantes iniciais (logo a velocidade aumenta) até o instante $t = 1/\sqrt{3}$ (o ponto de inflexão da função) f que é quando a aceleração muda de sinal. A partir desse instante a velocidade passa a ser decrescente. Agora, como nosso objetivo é esboçar o gráfico da função f observe que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{1+t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1/t^2+1} = 1.$$

Como $\lim_{t\to\infty} 0.4t = +\infty$, deduzimos que o gráfico de f deve cortar o gráfico de g mais uma vezes depois $t = 1$, correspondendo ao momento no qual G ultrapassou F. De fato, se esboçarmos os gráficos, com as informações que já temos veremos Observe no gráfico que está esboçada em

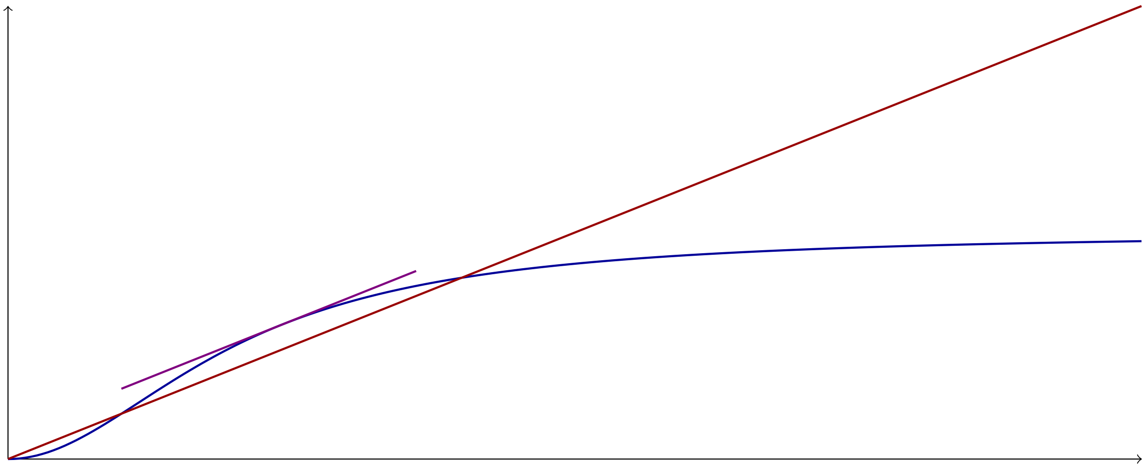


Figura 4. Em azul o gráfico de $f(t)$ e em vermelho o gráfico de $g(t)$.

roxo uma reta tangente ao gráfico azul que é paralela a reta vermelha. Isso quer dizer que nesse momento as duas velocidades são iguais. Observe pelo gráfico que isso ocorre em dois momentos. Logo, existem dois momentos nos quais os dois gráficos coincidem. □

(c) Determinar os instantes de coincidência das velocidades corresponde a determinar as soluções da equação $f'(t) = g'(t)$, ou seja encontrar t tal que

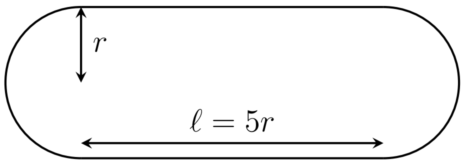
$$\frac{2t}{(1+t^2)^2} = 0.4 \iff \frac{t}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{5} \iff 5t - (1+t^2)^2 = 0.$$

Seguindo a proposta da questão, vamos aplicar o método de Newton para encontrar as soluções positivas dessa equação polinomial de grau 4. A função cujas raízes queremos encontrar é $\xi(t) = 5t - (1+t^2)^2$. Aplicando a regra da cadeia, vemos que sua derivada é $\xi'(t) = 5 - 4t(1+t^2)$. Como vimos na aula, o método de Nweton corresponde a atribuir um *chute* inicial x_1 e a partir daí iterar a sequência

$$t_{n+1} = t_n - \frac{\xi(t_n)}{\xi'(t_n)}.$$

Usando **Julia** para fazer o cálculo (veja o vídeo com o gabarito da prova comentado para ver a redação do algoritmo em Julia), vemos que chutando $t_1 = 0.5$ obtemos com sete iterações $t_7 = 0.21978973437393237$, e obtemos $\xi(t_7) \simeq 2.2 \times 10^{-16}$, uma aproximação com erro menor do que 10^{-15}(!!!!!!). Sabemos, pela análise do gráfico, que a função $\xi(t)$ tem dois zeros positivos e que um deles ocorre quando $t > 1$. Por isso, fazemos o chute $t_1 = 1$ para encontrar a segunda raiz. Obtemos $t_7 = 1.2068386268967801$ e $\xi(t_7) \simeq 3.55 \times 10^{-15}$, uma aproximação melhor do que 10^{-14}, que é ainda espetacular. □

Questão 3. *Vimos na primeira aula do curso, através de um modelo simples, uma explicação para os organismos vivos serem formados por muitas células pequenas ao invés de algumas células grandes. Vamos explorar um pouco mais a fundo essa linha de ideias neste problema. Vamos supor que um determinado* *organismo unicelular tenha um formato tubular como um cilindro com duas semi-esferas em cada ponta, como ilustra a figura abaixo. Suponha que a largura da parte cilíndrica seja sempre 5 vezes o raio da parte*



esférica. Para simplificar os cálculos, vamos supor que a taxa de absorção de nutrientes seja igual à área de superfície enquanto que a taxa de consumo de nutrientes seja igual ao volume. Nesse modelo, determine as dimensões do organismo para o qual o consumo se equilibra com a absorção de nutrientes.

Solução. O organismo pode ser modelado como a "junção" de uma esfera de raio r e um cilindro de largura $5r$ e raio da base igual a r. Assim, o volume será dado por

$$V(r) = \ell\pi r^2 + \frac{4}{3}\pi r^3 = 5\pi r^2 + \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{19}{3}\pi r^3.$$

Por outro lado, a área de superfície será dada por

$$A(r) = 4\pi r^2 + 2\pi r\ell = 4\pi r^2 + 10\pi r^2 = 14\pi r^2.$$

Assim, teremos igualdade entre as taxas de absorção e consumo quando $A(r) = V(r)$, portanto quando

$$\frac{19}{3}\pi r^3 = 14\pi r^2 \iff r = \frac{3 \times 14}{19} \simeq 2.21.$$

□

Questão 4. *Calcule a derivada primeira, a derivada segunda, os pontos críticos, os pontos de inflexão (se houverem), os intervalos de crescimento e decrescimento, os intervalos de concavidade e convexidade e esboce o gráfico da função* $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$.

Solução. Calculamos a derivada de f:

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^4}.$$

Vemos que

$$f'(x) = 0 \iff 3x^6 = 3 \iff x = \pm 1.$$

Como f não está definida em 0, o sinal da derivada de f pode ser descrito pelo diagrama Calculamos agora

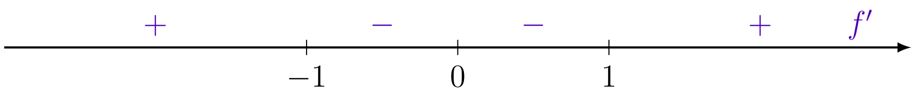


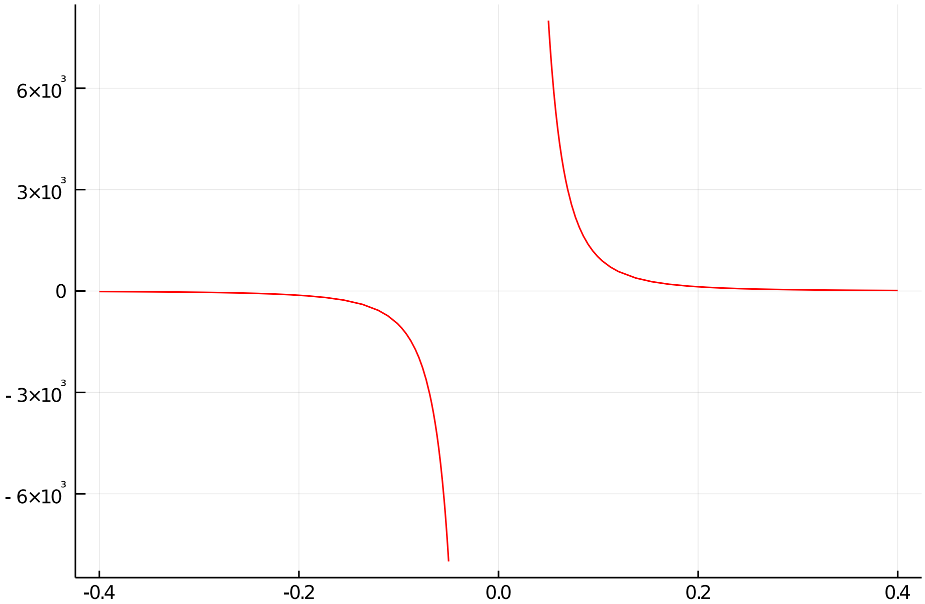
FIGURA 5. Tabua de sinais da derivada de f

a derivada segunda de f.

$$f''(x) = 6x + \frac{12}{x^5}.$$

Vemos que $f''(x) < 0$ se $x < 0$ e $f''(x) > 0$. Assim, o gráfico de f pode ser plotado

□


6×10³
3×10³
0
- 3×10³
- 6×10³
-0.4
-0.2
0.0
0.2
0.4