UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE

Disciplina: Complementos de Matemática Aplicada - Biomedicina e Ciências Ambientais

Segunda Avaliação

Professor: Bruno Santiago

Escreva suas respostas apontando claramente todos os raciocínios que conduziram a solução, bem como todos os resultados e referências utilizadas. Cada questão vale 3 pontos.

Questão 1. *Existem várias regras de derivação que servem ao cálculo de derivadas de uma ampla gama de funções explícitas, mas também possuem importância conceitual, como a regra da cadeia. Uma das regras de derivação de maior importância conceitual é a regra do produto. Ela afirma que se f e g são funções diferenciáveis então o produto fg também é diferenciável e sua derivada pode ser calculada a partir das derivadas de f e g através da fórmula*

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Utilizando a regra do produto, calcule a derivada e os pontos críticos da função

$$\varphi(x) = (x-10)^7(x+10)^{99}.$$

Esboce o gráfico da função φ.

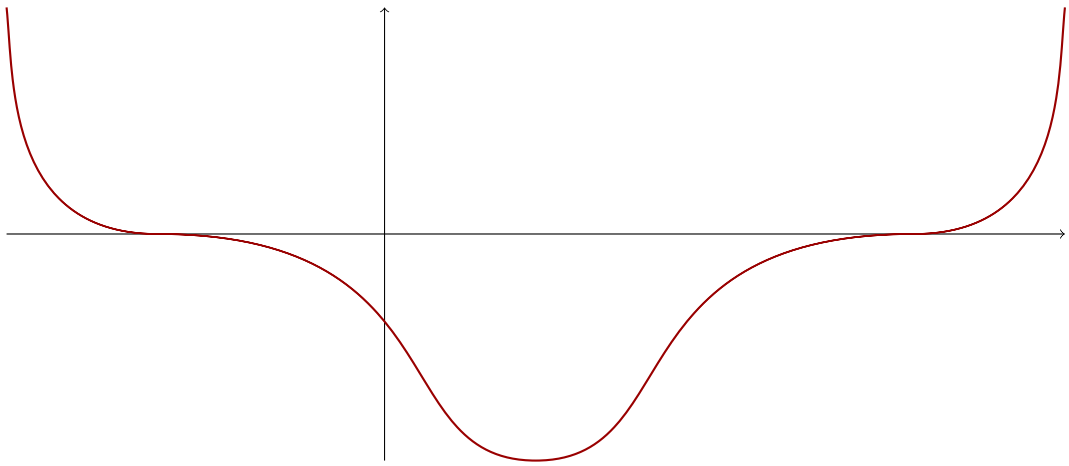
Solução. Calculando a derivada de φ pela regra do produto obtemos

$$\varphi'(x) = 7(x-10)^6(x+10)^{99} + 99(x-10)^7(x+10)^{98}.$$

Com isso, vemos que $x = 10$ e $x = -10$ são pontos críticos. Os demais pontos críticos de φ satisfazem

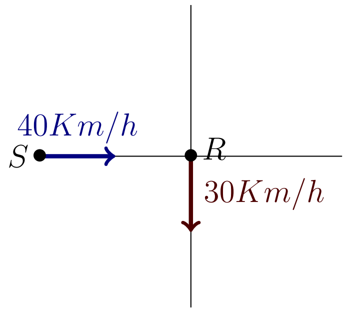
$$\begin{aligned} 7(x-10)^6(x+10)^{99} = -99(x-10)^7(x+10)^{98} &\iff 7(x+10) = -99(x-10) \\ &\iff 7x+70 = -99x+990 \\ &\iff 106x = 920, \end{aligned}$$

e portanto o terceiro ponto crítico de φ é $x = \frac{920}{106} \simeq 8.68$. Na figura abaixo fiz um esboço do gráfico

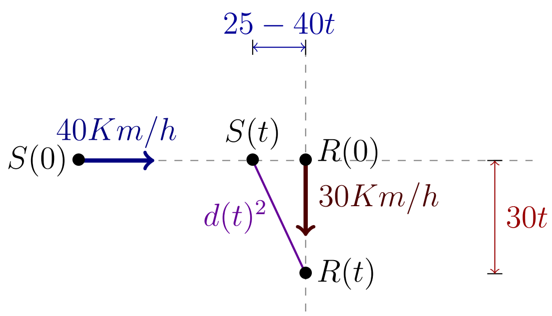


da função φ. Repare que temos três pontos críticos, mas só um deles é um extremo local. Isso se dá porque, como φ é um polinômio de grau par, sabemos que $\lim_{x\to\pm\infty}\varphi(x) = +\infty$. Assim, isso diz como o gráfico deve se comportar após os pontos críticos: com derivada sempre negativa, decrescendo de $+\infty$ a zero do lado esquerdo e subindo de zero a $+\infty$ do lado direito, com derivada sempre positiva. □

Questão 2. *Quando Senna está a 25Km a oeste de Rubens, andando em linha reta no seu Chevete 95, a uma velocidade de 40 Km/h, Rubens vai em linha reta na direção sul em seu Opala 73 a 30 Km/h. Calcule em quanto tempo a distância entre eles vai ser a menor possível, e qual será essa distância.*



Solução. Sejam $S(t)$ e $R(t)$ as posições de Senna e Rubens, respectivamente, após t horas do momento inicial descrito no enunciado. Então, a distância entre o ponto $S(t)$ e a reta vertical norte-sul, onde se encontra Rubens, é $25 - 40t$.



Por outro lado, a distância entre $R(t)$ e a reta horizontal leste-oeste, onde se encontra Senna é $30t$. Pelo Teorema de Pitágoras, o quadrado da distância entre $S(t)$ e $R(t)$ é

$$d(t) = (25 - 40t)^2 + 900t^2 = 625 - 2000t + 1600t^2 = 625 - 2000t + 1500t^2.$$

Por ser um polinômio do segundo grau, sabemos que $d(t)$ possui apenas um ponto crítico o qual será um ponto de minimo global. Para calcular esse ponto crítico, tomamos a derivada

$$d'(t) = -2000 + 5000t = 0 \iff t = 0.4$$

Portanto a menor distância entre Senna e Rubens é atingida após $0.4h = 24min$, e essa distância será igual

$$\sqrt{d(0.4)} = 15km.$$

□

Questão 3. *Nos primeiros estágios de desenvolvimento os membros de um feto aumentam de tamanho mas mantém as proporções constantes. Suponha que um dos membros de um feto seja aproximadamente cilíndrico, com raio r e comprimento ℓ variando ao longo do tempo mas de forma que*

$$\frac{\ell(t)}{r(t)} = C,$$

ao longo do tempo, para algum parâmetro constante $C > 0$. Suponha que o raio aumente a uma taxa constante, i.e.

$$r'(t) = a,$$

para algum parâmetro positivo a. Com que velocidade a massa do membro aumenta nesse período? Suponha que a densidade seja $1g/cm^3$.

Solução. O volume do cilindro pode ser descrito em função do tempo como

$$V(t) = \pi r(t)^2 \ell(t).$$

Como $\ell(t) = Cr(t)$, podemos expressar o volume relacionado apenas com o raio:

$$V(t) = C\pi r(t)^3.$$

Pela regra da cadeia,

$$V'(t) = 3C\pi r(t)^2 \times r'(t).$$

Como por hipótese $r'(t) = a$, concluímos que

$$V'(t) = 3aC\pi r(t)^2.$$

Como nesse caso o volume é igual a massa, esse é o resultado procurado. □

Questão 4. *Calcule as derivadas primeira e segunda, os pontos críticos e de inflexão, os intervalos de crescimento e decrescimento, os intervalos de concavidade e esboce o gráfico da função*

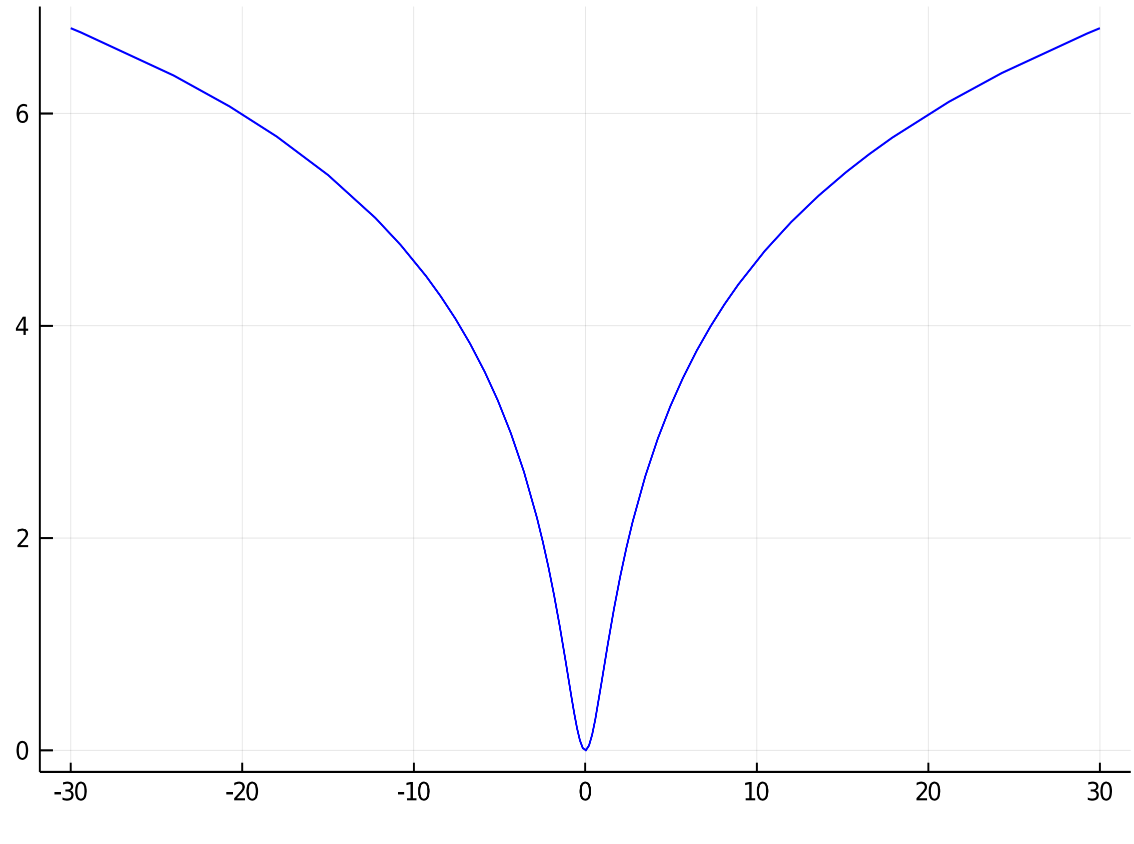
$$f(x) = \log(x^2 + 1).$$

Solução. Calculamos a derivada de f aplicando a regra da cadeia. Note que f é a composição entre as funções $x \mapsto \log(x)$ com $x \mapsto x^2 + 1$. A derivada da primeira função é $1/x$ e da segunda é $2x$. Assim,

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Observe que $f'(x) = 0$ se e somente se $x = 0$. Assim, esse é o único ponto crítico da função. Além disso, a derivada é positiva se $x > 0$ e é negativa se $x < 0$. Vamos agora calcular a derivada segunda. Aqui basta aplicar a regra do quociente

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$



Assim, $f''(x) = 0$ se e somente se $2x^2 = 2$ portanto se $x = \pm 1$. Vemos que a derivada segunda é positiva se $x \in (-1, 1)$, o que prova que o ponto crítico é ponto de mínimo local, e é negativa caso contrário.

Finalmente, como a função log é ilimitada temos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. $\square$