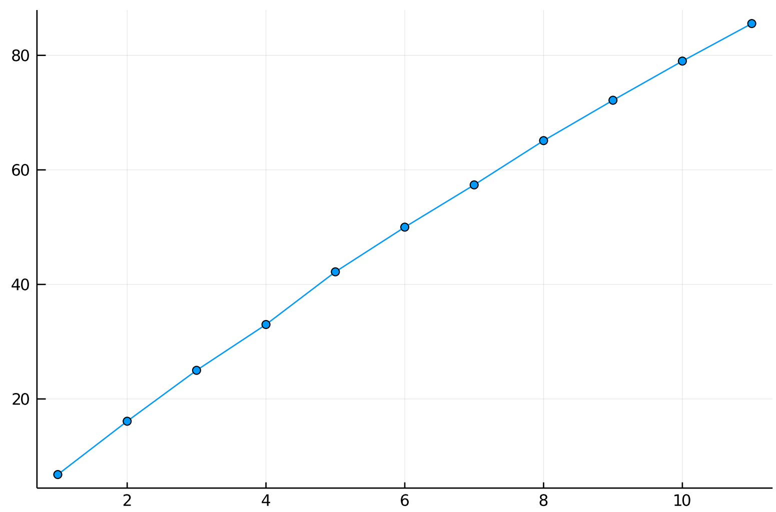
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Disciplina: Complementos de Matemática Aplicada - Sistemas de Informação
Lista de exercícios 2
Professor: Bruno Santiago

Exercício 1. *O gráfico abaixo foi gerado apenas com os dados da tabela Determine em quais*

Tempo (min)	***Temperatura (^oC)***
1	*6.8*
2	*16,11*
3	*25*
4	*33*
5	*42.2*
6	*50*
7	*57.38*
8	*65.11*
9	*72.16*
10	*79*
11	*85.55*



intervalos de tempo houveram a menor e a maior taxa de variação de temperatura. Em seguida, proponha uma função afim $f(x) = ax + b$ cujo gráfico aproxima os dados da tabela e proponha uma maneira de medir o erro que a sua aproximação comete.

Solução. Observe que a tabela é composta por 11 entradas. Vamos denotar a entrada na posição i por $v(i)$. Assim, $v(1) = 6.8$, $v(2) = 16.11$ e assim por diante até $v(11) = 85.55$. A taxa de variação entre no intervalo entre um determinado minuto e o minuto seguinte pode ser calculada da seguinte maneira: dado o minuto i, a taxa de variação entre i e $i + 1$ é

$$t(i) = \frac{v(i+1) - v(i)}{i + 1 - i} = \frac{v(i+1) - v(i)}{1}.$$

Utilizando o computador, podemos calcular $t(i)$ para cada i, e vemos como isso que $t(1) = 9.31$ e $t(10) = 6.54$ são, respectivamente, a maior e a menor taxas de variação nos 10 intervalos de tempo.

Em seguida, para propomos como função afim que aproxima os dados da tabela iremos escolher a função $f(x) = ax + b$ na qual os parâmetros a e b são ajustados de modo que o gráfico de f passe pelos pontos $(1, 6.8)$ e $(11, 85.55)$. Assim, vamos escolher uma função que acerta precisamente dois dos dados da tabela. Essa escolha é um pouco arbitrária mesmo, **o objetivo do exercício é notar o erro que se comete ao fazer essa aproximação.**

Feita essa escolha, vamos agora determinar os parâmetros a e b. Sabemos que eles devem satisfazer $f(1) = 6.8$ e $f(11) = 85.55$. Logo

$$\begin{aligned} a + b &= 6.8 \\ 11a + b &= 85.55, \end{aligned}$$

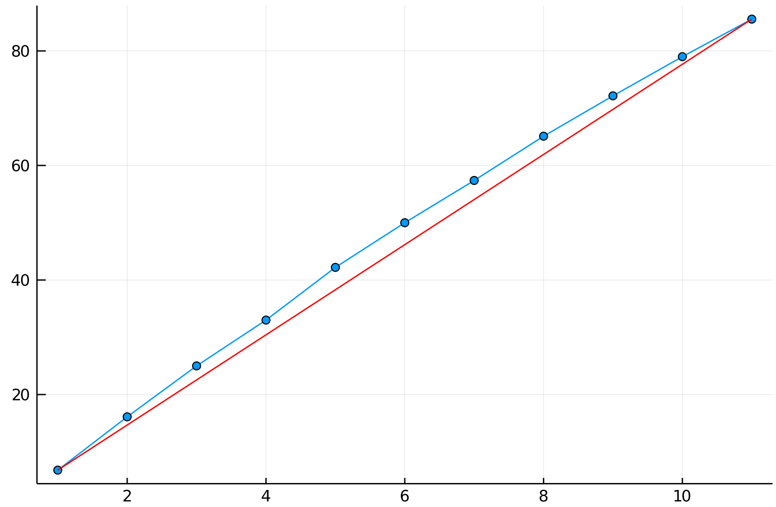
e portanto

$$10a = 78.75 \implies a = 7.875.$$

Com o valor de a a com a primeira equação calculamos o valor de b, obtendo $b = -1.075$. Assim,

$$f(x) = 7.875x - 1.075.$$

Na figura abaixo plotamos o gráfico de f em vermelho: Para estimar o erro cometido, usamos o



valor médio dos desvios quadráticos, conhecido em estatística como **desvio padrão** (você pode escolher outra medida), calculado através da fórmula

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11}(f(i) - v(i))^2}.$$

Com as escolhas que fiz obtemos um erro de **1.3154402524825077**, um erro muito alto. Observe que ele é quase igual a primeira entrada da tabela. $\square$

Exercício 2. *Considere um objeto em queda livre no espaço e suponha que a altura do objeto ao longo do tempo possa ser descrita por uma função do tipo $y(t) = h_0 - ct^2$, onde $c > 0$ é um número real positivo e h_0 é a altura inicial. Determine a taxa de variação média da posição (ou seja, a velocidade média) do objeto num intervalo de tempo entre t e $t + \delta$, para $\delta > 0$.*

Solução. A taxa de variação é calculada como a variação de $y(t)$ dividida pela variação de t. Como a variável t oscilou de um valor t ao valor $t + \delta$, temos então qua a taxa de variação será

$$\frac{y(t+\delta) - y(y)}{t + \delta - t} = \frac{h_0 - c(t+\delta)^2 - [h_0 - ct^2]}{\delta} = \frac{ct^2 - ct^2 - 2ct\delta - \delta 2c}{\delta} = 2ct - \delta c.$$

$\square$

1. Comentários adicionais sobre o Exercício 1

O enunciado pede apenas que se proponha **uma função afim** e que se meça o erro que essa função comete nos dados. Uma pergunta mais fina é se é possível encontrar **a melhor função afim**, ou seja aquela que comete o menor erro. Usando uma técnica de Álgebra Linear, o método dos mínimos quadrados é possível dar uma solução a esse problema demonstrando-se que existe a melhor função. Para efeitos de curiosidade vou escrever aqui a resposta que o método dos mínimos quadrados dá.

Escrevendo $x = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)$ e
$y = (6.8, 16.11, 25, 33, 42.2, 50, 57.38, 65.11, 72.16, 79, 85.55)$ a melhor função é

$$f(t) = \mu(y) + \frac{\sigma(y)}{\sigma(x)}\rho(x, y)(t - \mu(x)),$$

onde $\mu(x) = \frac{1}{11}\sum_{\ell=1}^{11} x_\ell$ é a média do vetor x, $\sigma(x) = \sqrt{\frac{1}{d}\sum_{\ell=1}^{11}(x_\ell - \mu(x))^2}$ é o desvio padrão e $\rho(x, y)$ é o coeficiente de correlação. Tem uma fórmula para calcular ele, mas não é importante nesse momento (no video da solução eu mostro um algoritmo que implementa a fórmula). No nosso caso específico aqui em tela:

$$f(t) = 48.39 + 7.87(t - 6) = 7.87t - 1.17$$

A gente pode comparar o erro que essa função comete usando o desvio padrão também:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11}(f(i) - y(i))^2}.$$

Obtemos um desvio padrão de **1.315439121603366**. Veja o vídeo-comentário desse gabarito na página do curso para mais explicações e algoritmos em Julia para efetuar os cálculos.