UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Disciplina: Complementos de Matemática Aplicada - Sistemas de Informação
Lista de exercícios 4
Professor: Bruno Santiago

Questão 1. *O guepardo é um dos animais mais rápidos da natureza. Devido a sua anatomia privilegiada ele consegue manter uma aceleração constante que o faz ir de zero a 108Km/h em apenas 3 segundos. No entanto, ao atingir essa velocidade máxima ele sempre tem que desacelerar até atingir a metade dessa velocidade, de modo a evitar superaquecimento dos órgãos. Suponha que um guepardo aviste uma gazela a 50m de distância correndo a uma velocidade constante, igual a metade da velocidade máxima que o guepardo consegue atingir. Após quanto tempo o guepardo encontra a gazela?* ***Dica:*** *Suponha em seu modelo que toda aceleração/desaceleração do guepardo tem sempre o mesmo valor absoluto, e que quando precisar desacelerar o guepardo consegue fazer isso instantaneamente.*

Solução. Observe que a velocidade do guepardo é sempre maior do que a velocidade da gazela, exceto nos instantes nos quais ele atinge a velocidade mínima, quando as duas velocidades são iguais. Exceto por esses instantes o guepardo está sempre mais rápido e por isso eventualmente ele consegue capturá-la. Para determinar o instante de tempo exato no qual isso acontece devemos escrever analiticamente a função $f(t)$ que calcula a posição da gazela decorridos t segundos, e a função $g(t)$ que calcula a posição do guepardo.

Assumimos no nosso modelo que o guepardo se encontra na posição inicial 0, e portanto a gazela está na posição 50. Observe que como a gazela se desloca a uma velocidade constante de 15m/s (54Km/h) sua posição é descrita pela função

$$f(t) = 50 + 15t.$$

A dificuldade do problema reside no fato de que a função que descreve o movimento do guepardo é uma função definida por partes. Como efeito, o modelo proposto no enunciado afirma que o movimento do guepardo é composto de ciclos de aceleração seguidos de ciclos de desaceleração. Em cada ciclo de aceleração é de $10\text{m}/s^2$ e em cada ciclo de desaceleração ela vale $-10m/s^2$. Então vamos construir etapa por etapa e função g.

1º ciclo: movimento acelerado–. A função que descreve a velocidade nesse caso é $v_0(t) = 10t$, pois a velocidade inicial é nula. Logo, como a função posição é a antiderivada da velocidade, vemos que a função posição nesse primeiro ciclo vai ser dada por

$$g_0(t) = 5t^2.$$

Como $v_0(3) = 30m/s$, e essa é a velocidade máxima do guepardo o 1º ciclo dura apenas 3 segundos. Como $g_0(3) = 5 \times 3^2 = 45$, vemos que o guepardo percorreu 45m metros nesse primeiro ciclo. A posição da gazela depois de 3 segundos é $f(3) = 50 + 15 \times 3 = 95$. A distância entre eles continua de 50 metros.

2º ciclo: movimento desacelerado–. Agora, depois dos primeiros 3 segundos, a função que descreve a velocidade do guepardo vai ser $v_1(t) = 30 - 10(t - 3)$, pois a velocidade inicial do movimento uniformemente desacelerado é 30m/s e a desaceleração é constante igual a $-10m/s^2$. Como a posição é a antiderivada da velocidade e como a posição inicial nesse caso é 45 (o final do 1º ciclo) temos que a posição do guepardo nesse ciclo vai ser descrita pela função

$$g_1(t) = 45 + 30(t - 3) - 5(t - 3)^2.$$

Como $v_1(4.5) = 15m/s$, a velocidade mínima do guepardo, o 2º ciclo dura apenas 1.5s (de 3s a 4.5s). Observe que $g_1(4.5) = 78.75$. Como $f(4.5) = 117,5$, vemos que o guepardo ainda não alcançou a gazela. A distância entre eles agora é de 38.75m.

3º ciclo: movimento acelerado–. Agora, depois dos primeiros 4.5 segundos, a função que descreve a velocidade do guepardo vai ser $v_1(t) = 15 + 10(t - 4.5)$, pois a velocidade inicial do movimento uniformemente acelerado é 15m/s e a aceleração é constante igual a $-10m/s^2$. Como a posição é a antiderivada da velocidade e como a posição inicial nesse caso é 78.75 (o final do 1º ciclo) temos que a posição do guepardo nesse ciclo vai ser descrita pela função

$$g_2(t) = 78.75 + 15(t - 4.5) + 5(t - 4.5)^2.$$

Como $v_2(6) = 30m/s$, a velocidade máxima do guepardo, o 3º ciclo dura apenas 1.5s (de 4.5s a 6s). Observe que $g_2(6) = 112.5$. Como $f(6) = 140$, vemos que o guepardo ainda não alcançou a gazela. A distância entre eles agora é de 27.5m

4º ciclo: movimento desacelerado–. Agora, depois dos primeiros 6 segundos, a função que descreve a velocidade do guepardo vai ser $v_3(t) = 30 - 10(t - 6)$, pois a velocidade inicial do movimento uniformemente desacelerado é 30m/s e a desaceleração é constante igual a $-10m/s^2$. Como a posição é a antiderivada da velocidade e como a posição inicial nesse caso é 112.5 (o final do 1º ciclo) temos que a posição do guepardo nesse ciclo vai ser descrita pela função

$$g_3(t) = 112.5 + 30(t - 6) - 5(t - 6)^2.$$

Como $v_3(7.5) = 15m/s$, a velocidade mínima do guepardo, o 4º ciclo dura apenas 1.5s (de 6s a 7.5s). Observe que $g_3(7.5) = 146.25$. Como $f(7.5) = 162.5$, vemos que o guepardo ainda não alcançou a gazela. A distância entre eles agora é de 16.25m.

5º ciclo: movimento acelerado–. Agora, depois dos primeiros 7.5 segundos, a função que descreve a velocidade do guepardo vai ser $v_4(t) = 15 + 10(t - 4.5)$, pois a velocidade inicial do movimento uniformemente acelerado é 15m/s e a aceleração é constante igual a $-10m/s^2$. Como a posição é a antiderivada da velocidade e como a posição inicial nesse caso é 146.25 (o final do 4º ciclo) temos que a posição do guepardo nesse ciclo vai ser descrita pela função

$$g_4(t) = 146.25 + 15(t - 7.5) + 5(t - 7.5)^2.$$

Como $v_4(9) = 30m/s$, a velocidade mínima do guepardo, o 3º ciclo dura apenas 1.5s (de 7.5s a 9s). Observe que $g_4(9) = 180$. Como $f(6) = 185$, vemos que o guepardo ainda não alcançou a gazela. A distância entre eles agora é de 5m.

6º ciclo: movimento desacelerado–. Agora, depois dos primeiros 9 segundos, a função que descreve a velocidade do guepardo vai ser $v_5(t) = 30 - 10(t - 9)$, pois a velocidade inicial do movimento uniformemente desacelerado é 30m/s e a desaceleração é constante igual a $-10m/s^2$. Como a posição é a antiderivada da velocidade e como a posição inicial nesse caso é 180 (o final do 5º ciclo) temos que a posição do guepardo nesse ciclo vai ser descrita pela função

$$g_5(t) = 180 + 30(t - 9) - 5(t - 9)^2.$$

Como $v_5(10.5) = 15m/s$, a velocidade mínima do guepardo, o 6º ciclo dura apenas 1.5s (de 9s a 10.5s). Observe que $g_5(10.5) = 213.75$. Como $f(10.5) = 207.5$, vemos que o guepardo alcançou a gazela em algum momento durante o 6º ciclo. Para determinar o valor exato desse momento, precisamos resolver a equação $g_5(t) = f(t)$, onde sabemos que t está entre 9 10.5. Pelas expressões de g_5 e f a equação $g_5(t) = f(t)$ equivale a equação do segundo grau

$$180 + 30(t - 9) - 5(t - 9)^2 = 50 + 15t$$

Essa equação é equivalente a

$$30 + 6(t - 9) - (t - 9)^2 = 10 + 3t$$

Fazendo a mudança de variável $x = t - 9$ para simplificar, chegamos a equação

$$x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Como $x = t - 9$, e como o valor máximo de t no 6º ciclo é 10.5, devemos a raiz da equação acima que seja positiva e seja menor do que 1.5. Pela fórmula de Báskhara, a solução que estamos procurando é

$$x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Como $t = 9 + x$, vemos que o tempo de captura é de aproximadamente 9.3819 segundos. □

Questão 2. *Considere a função $f(x) = x^7 - 5x + 1$. Esboçe o gráfico de f e aplique esse conhecimento para determinar quantas soluções a equação*

$$x^7 - 5x + 1 = 0$$

possui. Em seguida, use o método de Newton e calcule com uma precisão de 10^{-4} todas as raízes da equação.

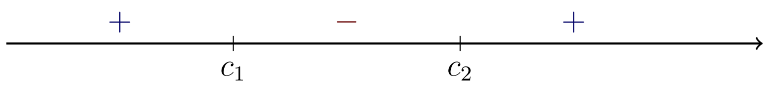
Demonstração. Para esboçar o gráfico de f vamos estudar a sua derivada. Pela regra de cálculo da derivada de um polinômio, sabemos que

$$f'(x) = 7x^6 - 5.$$

Portanto, os **pontos críticos** de f são as soluções da equação

$$7x^6 - 5 = 0 \iff 7x^6 = 5 \iff x = \pm(5/7)^{1/6}.$$

Vamos analisar agora o comportamento (dos sinais) da derivada. Observe que a expressão $7x^6 - 5$ assume valores arbitrariamente grandes e positivos quando x possui valor absoluto muito grande. Por exemplo, $f'(\pm 10) \sim 10^6$. Como f' só se anula nos pontos críticos $c_1 = -(5/7)^{1/6}$ e $c_2 = (5/7)^{1/6}$, isso nos permite deduzir que o sinal da derivada de f se comporta como na figura a seguir. Em particular,



deduzimos que f é crescente nos intervalos $(-\infty, c_1)$ e $(c_2, +\infty)$ e é decrescente no intervalo (c_1, c_2).

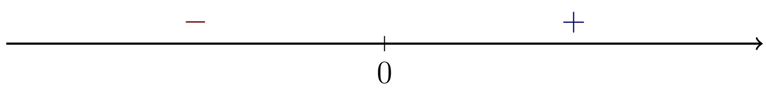
Agora passamos a analisar a derivada segunda de f e seu comportamento. Como f' é um polinômio, podemos calcular

$$f''(x) = 42x^5.$$

Isso implica que os **pontos de inflexão** de f são as soluções da equação

$$42x^5 = 0 \iff x = 0.$$

Como $x^5 < 0$ se $x < 0$ e é positivo se $x > 0$ deduzimos que o sinal da derivada segunda de f se comporta como na figura a seguir. Em particular, f é concava ("curvada para baixo") no intervalo



$(-\infty, 0)$ e é convexa ("curvada para cima") no intervalo $(0, +\infty)$.

Por fim, precismos analisar o comportamento de f nos extremos do seu intervalo de definição. Como nesse caso o domínio de f é toda a reta real, isso se reduzir a analisar os limites $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$. Como f é um polinômio de grau 7, para valores muito grandes em valor absoluto da variável x o termo dominantes é x^7, o qual fica negativo se $x < 0$ e fica positivo se $x > 0$. Por isso f assume valores negativos arbitrariamente grandes a medida que $x \to -\infty$ e assume valores positivos arbitrariamente grandes a medida que $x \to +\infty$. Portanto

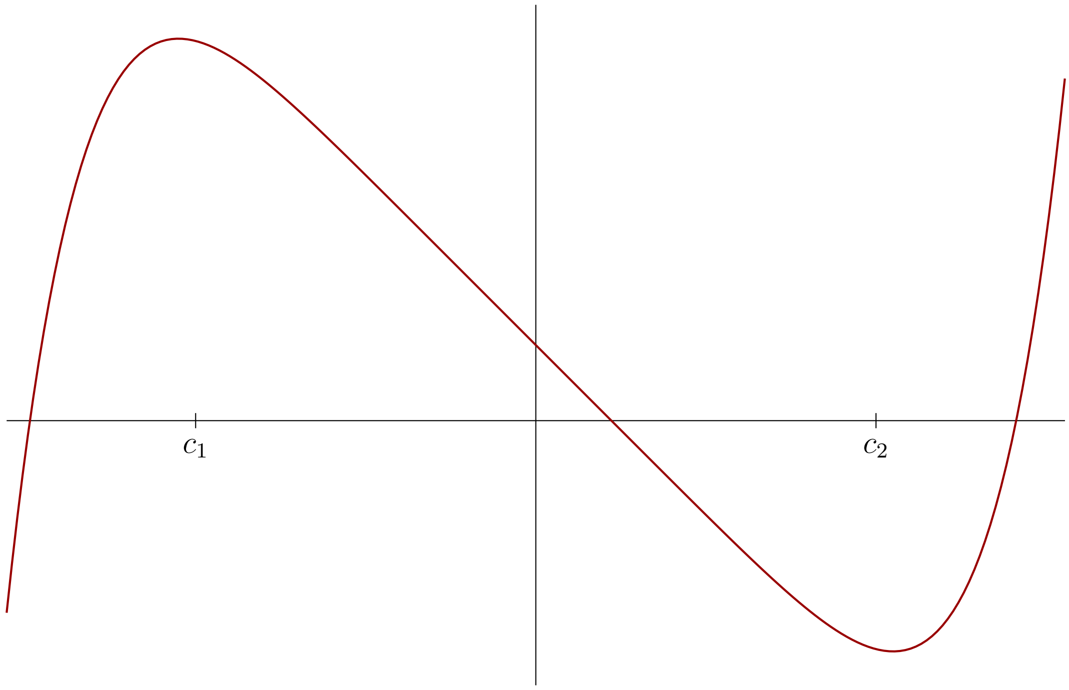
$$\lim_{x \in -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Juntando todas as peças desse quebra-cabeças podemos imaginar como deve ser o gráfico de f. Primeiro, muito a esquerda do eixo horizontal o gráfico está muito abaixo do eixo horizontal porque $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Além disso, recorde que f é crescente em $(-\infty, c_1)$. Então nesse intervalo o gráfico está subindo. Agora note (com uma calculadora) que $f(c_1) \sim 5.05 > 0$. Logo, o gráfico de f tem que cruzar o eixo horizontal em algum momento antes do primeiro ponto crítico c_1 e continuar subindo até atingir o valor $f(c_1)$. Observe que f passa a ser decrescente após esse valor e também $f''(c_1) < 0$. Portanto, o primeiro ponto crítico é um ponto de **máximo local** de f.

Após o primeiro ponto crítico, como nossa análise previu, f é decrescente em todo o intervalo (c_1, c_2). Logo, o gráfico de f tem que descer desde o valor $f(c_1)$ até o valor $f(c_2)$. Agora note também que no meio desse caminho temos o ponto de inflexão $x = 0$. Até o ponto de inflexão o gráfico vem se curvando para baixo porque como f'' é negativo em $(-\infty, 0)$, a derivada de f é decrescente. Então a reta tangente tem inclinação muito grande quando $x \to -\infty$ e essa inclinação vai diminuindo continuamente, atinge o valor zero no primeiro ponto crítico c^1 e continua diminuindo até o ponto de inflexão. A partir do ponto de inflexão temos f'' positiva e portante a derivada passa a ser crescente. Ou seja, a inclinação da reta tangente começa a aumentar, e vai aumentando aumentando sem limites.

Além disso, f passa a ser crescente após o segundo ponto crítico. Como $f''(c_2) > 0$ isso nos leva a deduzir que c_2 é um ponto de **mínimo local**.

Podemos desenhar o resultado dessa análise num esboço gráfico.



A análise do gráfico nos permite inferir que f cruza o eixo horizontal exatamente três vezes: uma à esquerda de c_1, outra entre c_1 e c_2 e a terceira à direita de de c_2. O método de Newton corresponde ao algorítimo recursivo

$$\xi_{n+1} = \xi_n - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)}.$$

Dependendo do valor que a gente der para o chute inicial do ponto de partida ξ_0 do algoritmo, a sequência ξ_n vai convergir para uma das três raízes. Assim por exemplo, vemos que pondo $\xi_0 = -1$ e usando o computador para fazer os cálculos, a sequência converge para ~ -1.338368. Com o computador vemos também que $f(-1.338368) \sim 2.5 \times 10^{-5} = 0.000025$. Portanto, o erro cometido é de 4 casas decimais, como exigido no enunciado. É interessante observar que o algoritmo precisou de pelo menos 12 iterações até estabilizar nesse valor. Para encontrar a raiz que está no intervalo (c_1, c_2) o algoritmo é muito mais rápido: com apenas duas iterações o valor 0.2000025 já aparece e $f(0.2000025) \sim 3 \times 10^{-7} = 0.0000003$, um erro de menos do que 6 casas decimais. Para encontrar a terceira raiz chutamos $\xi_0 = 1.3$ e o algoritmo retorna em três iterações 1.270869. $\square$

1. Aplicação da derivada: fluxo de água num reservatório

Nesta seção vamos discutir a situação hipotética de uma indústria química que trabalha com um grande reservatório de água com capacidade de 80.000 litros. Todos os dias o reservatório precisa estar cheio antes de começar a produção e em vários momentos ao longo do dia é necessário interromper a produção para encher o reservatório, processo que usualmente leva em torno de 20 minutos. Para encher o reservatório uma bomba é usada para levar a água até uma torneira. A bomba sempre trabalha próxima de sua vazão máxima (que é de 80 litros por segundo), mas não consegue manter a vazão constante. Essa lista tem como objetivo explorar a aplicação do conceito de derivada ao seguinte problema: como controlar a vazão da bomba de forma a evitar que ela ultrapasse $80\ell/s$?

Como vimos na aula a ideia é utilizar um sensor para medir a altura da água no reservatório (que tem a forma de um cilindro) e com essa informação plotar o gráfico Volume x tempo. A derivada da função da função $V(t)$ é igual a vazão de água que sai da torneira. Assim, controlando o valor da derivada podemos certificar o bom funcionamento da bomba.

1.1. **Questões.**

Questão 3. *Suponha que ao plotar o gráfico vemos que* $V(t) = 15t^3 - 2t^2$*. Nesse caso, a vazão da bomba vai ultrapassar o limite de* $80\ell/s$ *antes de o tanque ficar cheio? Caso isso aconteça, vai ser depois de quantos minutos?*

Solução. A vazão instantânea da bomba é dada, em cada instante de tempo, pela derivada da função $V(t)$ que descreve o volume do tanque em cada instante de tempo. Assim sendo, uma vez que

$$V'(t) = 45t^2 - 4t,$$

devemos determinar o menor valor positivo de t para o qual $45t^2 - 4t = 80$. Como esta é uma equação do segundo grau, basta aplicar a fórmula de Baskhara:

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \times 45 \times 80}}{90}$$

O único valor positivo dado pela expressão acima é $t \simeq 1.37$. Vemos portanto que a vazão da bomba, nesse caso, seria extrapolada em menos de 2 segundos. $\square$

Questão 4. *Suponha agora que a função que dá o volume de água no reservatório em cada segundo seja*

$$V(t) = \frac{40000 + 2t^2}{1 + t^{0.1}}.$$

Ignorando o limite da vazão, em quanto tempo o reservatório ficaria cheio nesse caso? O limite de vazão da bomba seria extrapolado antes de o reservatório ficar cheio? Dica: utilise o Método de Newton.

Solução. Nesse caso, devemos resolver a equação $V(t) = 80000$, ou seja, devemos achar t tal que

$$\frac{40000 + 2t^2}{1 + t^{0.1}} = 80000.$$

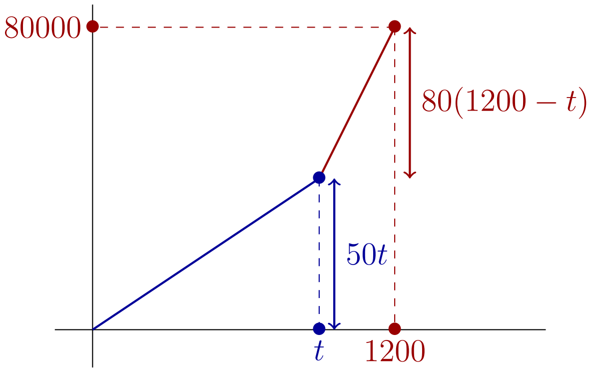
Nesse caso, por não se tratar de uma equação de primeiro, ou de segundo grau não há fórmulas para se encontrar as soluções. Podemos obter, no entanto, valores aproximados para a solução por diversos métodos. O mais simples deles é por **tentativa e erro:** colocamos a fórmula numa calculadora e substituímos valores para t até que o resultado chegue próximo de 80000. Nesse caso, encontramos $t \simeq 301$. Para saber se o limite da vazão seria atingido antes de o reservatório ficar cheio, devemos tomar a derivada da função $V(t)$. Aplicando a regra do quociente e tendo em vista a regra da cadeia,

$$V'(t) = \frac{4t(1 + t^{0.1}) - 0.1^{-0.9}(40000 + 2t^2)}{(1 + t^{0.1})^2} = \frac{4t + 3.8t^{1.1} - 4000t^{-0.9}}{(1 + t^{0.1})^2}$$

Para determinar em quanto tempo a vazão é atingida devemos resolver a equação $V'(t) = 80$. Mais uma vez, só podemos resolver por métodos de aproximação. A solução aproximada é $t \simeq 61.5$. $\square$

Questão 5. *Após alguns anos de funcionamento da indústria a engenheira responsável conseguiu comprar uma nova bomba, a qual ainda que deixe de funcionar se a vazão ultrapassar 80ℓ/s* ***consegue manter a vazão constante****. Um estagiário recém chegado não percebeu que ligou a bomba na vazão baixa de 50ℓ/s. No entanto a bomba nova não pode ficar ligada por mais de 20 minutos. Antes dos 20 minutos o estagiário se deu conta do descuido e mudou a vazão instantaneamente para o máximo de 80ℓ/s. No entanto isso não foi suficiente para encher o reservatório. Pelo menos quanto tempo o estagiário tem que ter levado para se dar conta?*

Solução. Seja t o tempo que o estagiário levou para se dar conta. Se foi o maior tempo possível então o tanque ficou cheio em exatamente 1200 segundos (=20 minutos). Analisando o gráfico vemos que

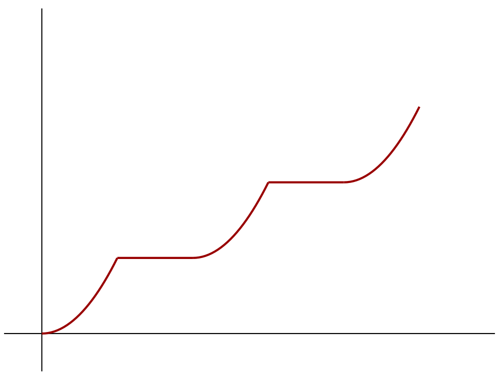


temos que resolver a equação

$$\begin{aligned} 50t + 80(1200 - t) &= 80000 \\ 50t + 96000 - 80t &= 80000 \\ -30t &= -16000 \\ t &\simeq 533.33 \end{aligned}$$

□

Questão 6. *Após o incidente com o estagiário, a engenheira responsável pela indústria comprou um sistema automatizado que funciona da seguinte maneira: a vazão começa em zero quando o tanque está vazio e aumenta até atingir a vazão máxima de 80ℓ/s. Quando isso acontece, a bomba se desliga automaticamente durante cinco segundos e a vazão volta a aumentar de novo até atingir o máximo, quando a bomba se desliga por cinco segundos. Esse processo continua até o tanque ficar cheio. Invente uma função $V(t)$ que descreva o volume do tanque ao longo tempo em acordo com o comportamento da nova bomba.*



Solução. □