UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Disciplina: Complementos de Matemática Aplicada - Biomedicina e Ciências Ambientais
Primeira Avaliação
Professor: Bruno Santiago

Escreva suas respostas apontando claramente todos os raciocínios que conduziram a solução, bem como todos os resultados e referências utilizadas. Cada questão vale 3 pontos.

Questão 1. *Considere a função $f(x) = 11x^{11} - 2x^2 + 17$. Esboce o gráfico de f e aplique esse conhecimento para determinar quantas soluções a equação*

$$11x^{11} - 2x^2 + 17 = 0$$

possui. Em seguida, use o método de Newton e calcule com uma precisão de 10^{-4} todas as raízes da equação.

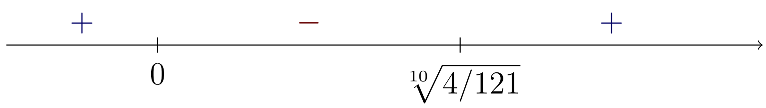
Demonstração. Vamos determinar o número exato de raízes de f sem sequer desenhar o gráfico, mas determinando todas as suas propriedades que importam nessa tarefa. Com efeito, calculando a derivada de f obtemos

$$f'(x) = 121x^{10} - 4x,$$

e calculando a derivada segunda obtemos

$$f''(x) = 1210x^9 - 4.$$

A derivada de f é um polinômio de grau 10 com uma fatoração simpática que nos permite calcular todas as raízes e portanto estudar o sinal. Assim, os pontos críticos de f são $x = 0$ e $x = \sqrt[10]{4/121}$. Como $f'(-1) = 121 - 4 > 0$ vemos que o gráfico de sinais da função f' é



Em particular deduzimos que f é crescente entre $-\infty$ e 0, decrescente entre os dois pontos críticos e crescente a partir do segundo ponto crítico. Vamos estudar a convexidade de f pelo sinal da derivada segunda. Apesar de ser um polinômio de grau nove, a derivada segunda de f possui apenas uma raiz, a saber $x = \sqrt[9]{4/1210}$. Esse é portanto o único ponto de inflexão de f. Assim vemos que f é concava antes do ponto de inflexão e convexa depois do ponto de inflexão. Observe também que o ponto de inflexão ocorre antes do segundo ponto crítico, pois

$$\frac{4}{1210} < \frac{4}{121} \implies \left(\frac{4}{1210}\right)^{1/9} < \left(\frac{4}{121}\right)^{1/9} < \left(\frac{4}{121}\right)^{1/10}.$$

Isso faz com que o ponto crítico $x = \sqrt[10]{4/121}$ seja um mínimo local ao passo que $x = 0$ é um máximo local. Como f é um polinômio de grau impar com termo dominante $11x^{11}$, $f(x)$ tende a $-\infty$ quando $x \to -\infty$ e $f(x)$ tende a $+\infty$ quando $x \to +\infty$. Em particular, f não possui nem mínimo nem máximo globais. Agora observe que podemos escrever

$$f(x) = 11x^{11} + 17 - 2x^2.$$

Note que como $\sqrt[10]{4/121} < 1$, o termo $2x^2$ é sempre menor do que 1 em valor absoluto. Assim, se x está entre os dois pontos críticos de f temos $11x^{11} > 0$ e portanto

$$f(x) > 17 - 2 > 0.$$

Em particular, isso demonstra que $f(\sqrt[10]{4/121}) > 0$. Como esse é o único ponto de mínimo f entre os dois pontos críticos e como f é crescente depois de $\sqrt[10]{4/121}$, deduzimos que f não se anula em $(0, +\infty)$. Por outro lado, f é crescente em $(-\infty, 0)$ e portanto só pode se anular uma única vez. Como $f(-2) < 0$ e

$f(0) = 17$ deduzimos que f possui uma única raiz localizada entre -2 e 0. Na figura abaixo descrevo está o resultado da implementação do método de Newton à função f $(g = f')$.

Entrée [11]:
```
function ξ(n)
    if n==0
        return -2
        else ξ(n-1)-(f(ξ(n-1))/g(ξ(n-1)))
    end
end
```

Out[11]:
```
ξ (generic function with 1 method)
```

Entrée [12]:
```
for n=0:10
    println(ξ(n))
end
```

```
-2
-1.8182661889082574
-1.6532117329304157
-1.5035984035201704
-1.3687671497655367
-1.2493128801423325
-1.148571669701688З
-1.0745647387946018
-1.036679144895638
-1.0282452798086898
-1.0278901973343386
```

Entrée [13]:
```
f(-1.0278901973343386)
```

Out[13]:
```
-9.816385232497282e-5
```

Veja que com o chute inicial -2 o método demora um pouco para convergir. Com o chute -1.5 a convergência é muito mais rápida. $\square$

Questão 2. *Considere equações polinomiais da forma $x^7 - 5x + 1 = y$. Para cada valor de y temos uma equação diferente, que pode ter nenhuma, uma ou mais de uma solução. Para qual intervalo de valores de y a equação $x^7 - 5x + 1 = y$ possui o maior número possível de soluções?*

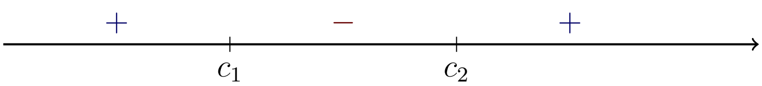
Demonstração. Para esboçar o gráfico de f vamos estudar a sua derivada. Pela regra de cálculo da derivada de um polinômio, sabemos que

$$f'(x) = 7x^6 - 5.$$

Portanto, os **pontos críticos** de f são as soluções da equação

$$7x^6 - 5 = 0 \iff 7x^6 = 5 \iff x = \pm(5/7)^{1/6}.$$

Vamos analisar agora o comportamento (dos sinais) da derivada. Observe que a expressão $7x^6 - 5$ assume valores arbitrariamente grandes e positivos quando x possui valor absoluto muito grande. Por exemplo, $f'(\pm 10) \sim 10^6$. Como f' só se anula nos pontos críticos $c_1 = -(5/7)^{1/6}$ e $c_2 = (5/7)^{1/6}$, isso nos permite deduzir que o sinal da derivada de f se comporta como na figura a seguir. Em particular, deduzimos que



f é crescente nos intervalos $(-\infty, c_1)$ e $(c_2, +\infty)$ e é decrescente no intervalo (c_1, c_2).

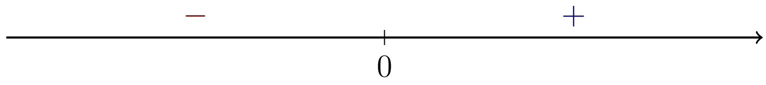
Agora passamos a analisar a derivada segunda de f e seu comportamento. Como f' é um polinômio, podemos calcular

$$f''(x) = 42x^5.$$

Isso implica que os **pontos de inflexão** de f são as soluções da equação

$$42x^5 = 0 \iff x = 0.$$

Como $x^5 < 0$ se $x < 0$ e é positivo se $x > 0$ deduzimos que o sinal da derivada segunda de f se comporta como na figura a seguir. Em particular, f é concava ("curvada para baixo") no intervalo $(-\infty, 0)$ e é



convexa ("curvada para cima") no intervalo $(0, +\infty)$.

Por fim, precismos analisar o comportamento de f nos extremos do seu intervalo de definição. Como nesse caso o domínio de f é toda a reta real, isso se reduzir a analisar os limites $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. Como f é um polinômio de grau 7, para valores muito grandes em valor absoluto da variável x o termo dominantes é x^7, o qual fica negativo se $x < 0$ e fica positivo se $x > 0$. Por isso f assume valores negativos arbitrariamente grandes a medida que $x \to -\infty$ e assume valores positivos arbitrariamente grandes a medida que $x \to +\infty$. Portanto

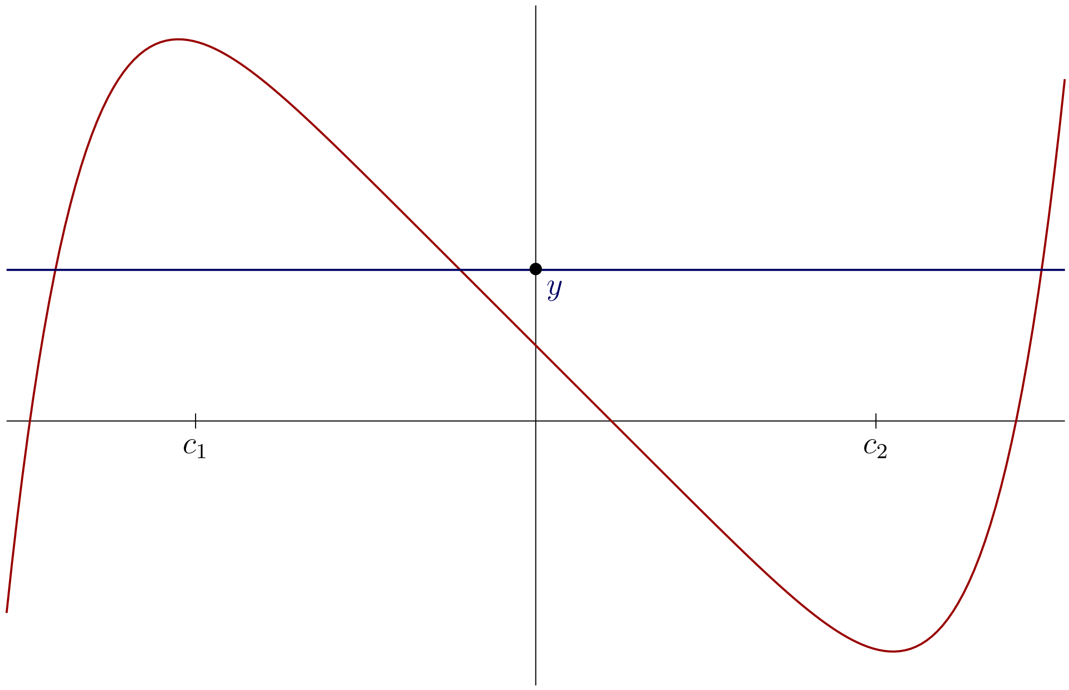
$$\lim_{x\in-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Juntando todas as peças desse quebra-cabeças podemos imaginar como deve ser o gráfico de f. Primeiro, muito a esquerda do eixo horizontal o gráfico está muito abaixo do eixo horizontal porque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Além disso, recorde que f é crescente em $(-\infty, c_1)$. Então nesse intervalo o gráfico está subindo. Agora note (com uma calculadora) que $f(c_1) \sim 5.05 > 0$. Logo, o gráfico de f tem que cruzar o eixo horizontal em algum momento antes do primeiro ponto crítico c_1 e continuar subindo até atingir o valor $f(c_1)$. Observe que f passa a ser decrescente após esse valor e também $f''(c_1) < 0$. Portanto, o primeiro ponto crítico é um ponto de **máximo local** de f.

Após o primeiro ponto crítico, como nossa análise previu, f é decrescente em todo o intervalo (c_1, c_2). Logo, o gráfico de f tem que descer desde o valor $f(c_1)$ até o valor $f(c_2)$. Agora note também que no meio desse caminho temos o ponto de inflexão $x = 0$. Até o ponto de inflexão o gráfico vem se curvando para baixo porque como f'' é negativo em $(-\infty, 0)$, a derivada de f é decrescente. Então a reta tangente tem inclinação muito grande quando $x \to -\infty$ e essa inclinação vai diminuindo continuamente, atinge o valor zero no primeiro ponto crítico c^1 e continua diminuindo até o ponto de inflexão. A partir do ponto de inflexão temos f'' positiva e portante a derivada passa a ser crescente. Ou seja, a inclinação da reta tangente começa a aumentar, e vai aumentando aumentando sem limites.

Além disso, f passa a ser crescente após o segundo ponto crítico. Como $f''(c_2) > 0$ isso nos leva a deduzir que c_2 é um ponto de **mínimo local**.

Podemos desenhar o resultado dessa análise num esboço gráfico.



Analisando o gráfico de f vemos que se $y \in [f(c_1), f(c_2)]$ então a reta horizontal de altura y cruza o gráfico de f exatamente três vezes e esse é o maior número possível de cruzamentos entre uma reta horizontal e o gráfico de f. Note que $f(c_1) \sim 5.0519$ e $f(c_2) \sim -3.05199$. $\square$

Questão 3. *Um teste de laboratório põe dois robôs para uma competição de corrida numa pista. Há um robô R1* acelerado *que se movimenta com aceleração variável e um robô R2* estável *que se movimenta em velocidade constante de* $5m/s$. *Suponha que a aceleração do robô R1 ao longo do tempo seja dada pela função* $a(t) = 12t^2 + 2$ *e que no instante* $t = 0$ *a distância entre R1 e R2 na pista reta seja de 20m. Se a velocidade de R1 em* $t = 0$ *for* $10m/s$ *em quanto tempo R1 alcança R2?*

Demonstração. Como a velocidade é a anti-derivada da aceleração, e como $a(t) = 12t^2 + 2$ temos que

$$v(t) = 4t^3 + 2t^2 + v_0.$$

Como a velocidade de $R1$ em $t = 0$ é $10m/s$ temos que $v_0 = 10$. Como a posição é a antiderivada da velocidade isso nos leva a deduzir que

$$p(t) = t^4 + t^2 + 10t + p_0.$$

Como temos liberdade de escolher a origem do sistema de coordenadas unidimensionais que vamos usar para parametrizar o movimento de $R1$ e $R2$ podemos colocar $R1$ na origem em $t = 0$ e portanto $p_0 = 0$. Por outro lado, a função que descreve o movimento uniforme (velocidade constante) de $R2$ é

$$f(t) = 5t + 20,$$

já que a distância inicial entre os robôs é de $20m$. Logo, o problema que estamos buscando resolver se traduz em encontrar a primeira raiz positiva da equação $p(t) = f(t)$, ou seja

$$t^4 + t^2 + 10t = 5t + 20.$$

Ou seja, precisamos calcular o primeira raiz positiva da função

$$g(t) = t^4 + t^2 + 5t - 20.$$

Para isso vamos analisar como deve ser o gráfico de g para podermos escolher o melhor chute e aplicar o método de Newton. Observe que

$$g'(t) = 4t^3 + 2t + 5 \quad \text{e} \quad g''(t) = 12t^2 + 2.$$

Vemos que $g''(t) > 0$ para todos os valores de t. Em particular g é convexa e só pode ter um ponto crítico. Como g é um polinômio de grau 4 (par) sabemos que $\lim_{to\to+\infty} g(t) = \lim_{t\to-\infty} g(t) = +\infty$. Junto com a convexidade isso já deixa entrever que esse ponto crítico de fato existe (o gráfico de f tem o formato concha). Podemos estimar grosseiramente esse ponto crítico, já que ele é o único zero de g'. De fato, como vimos a derivada de g' é sempre positiva o que indica que g' é crescente. Por outro lado, sendo um polinômio de grau 3 com termo dominante $4t^3$, g' satisfaz $\lim_{t\to-\infty} g'(t) = -\infty$ e $\lim_{t\to+\infty} g'(t) = +\infty$. Além disso, $g'(0) = 5$. Deduzimos daí que o ponto crítico de g é um número negativo. Isso é importante porque nos diz que g é crescente em $(0, +\infty)$ e como $g(0) = -20$ isso mostra que g possui na verdade uma única raiz positiva. O método de Newton corresponde ao algorítimo recursivo

$$\xi_{n+1} = \xi_n - \frac{g(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

A implementação do método fornece $t = 1.70913$ como aproximação de três casas decimais. Com chute inicial 0 e 10 iterações do método temos uma aproximação de 14 casas decimais. □

Questão 4. *O jogo* ***Quadrático*** *consiste em escolher um ponto inicial* $x_0 \in (0, 2)$ *a partir daí escolher recursivamente pontos* $x_1, x_2, x_3...$ *seguindo a seguinte regra. A partir de* x_n *caminhe pela reta que liga os pontos* $(x_n, 0)$ *e* $(0, 1)$ *no plano cartesiano até o ponto de cruzamento mais alto dessa reta com o gráfico da função* $f(x) = x^2 - 2x$. *O número* x_{n+1}, *que é a próxima etapa do algorítimo, é a coordenada horizontal desse ponto de encontro mais alto. Deduza uma fórmula que expresse* x_{n+1} *em função de* x_n.

Demonstração. A expressão de x_{n+1} em função de x_n é

$$x_{n+1} = \frac{2 - 1/x_n + (-1)^{n+1} \times \sqrt{(2 - 1/x_n)^2 + 4}}{2}.$$

Veja a dedução dessa fórmula no vídeo que será disponibilizado. □