UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Disciplina: Álgebra Linear
Lista de Exercícios 1
Professor: Bruno Santiago

Exercício 1. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^d$. A reta passando por a e b é o conjunto*

$$r(a:b) \stackrel{\text{def}}{=} \{v = ta + (1-t)b; t \in \mathbb{R}\}.$$

Seja $x \in \mathbb{R}^d \setminus r(a,b)$. Seja $p \in r(a,b)$ o ponto mais próximo a x dentre todos os pontos de $r(a,b)$. Encontre uma fórmula para se obter p em função de x, a e b.

Exercício 2. *Considere $a = (37,0,0,0,0)$, $b = (0,47,0,0,0)$, $c = (0,0,\pi^2,0,0)$, $d = (0,0,0,\sin\frac{37}{45},0)$ e $e = (0,0,0,0,\frac{7}{8})$ vetores em $\mathbb{R}^5$. Explique por que $\{a,b,c,d,e\}$ é uma base de $\mathbb{R}^5$.*

Exercício 3. *Encontre os coeficientes da combinação linear dos vetores $a = (1,7)$ e $b = (3,4)$ que produz o vetor $v = (9,46) \in \mathbb{R}^2$.*

Exercício 4. *Considere $u = (1,2,3)$, $v = (3,2,0)$ e $w = (2,0,0)$, vetores em $\mathbb{R}^3$ e decida se o vetor $x = (1,1,1)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores u, v e w. Em caso afirmativo, determine os números reais α, β e γ tais que*

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = x.$$

Exercício 5. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^d$. Encontre, em função de a e b, um número real γ tal que $a - \gamma b$ seja ortogonal a b.*

Exercício 6. *Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio de grau $d-1$. Ou seja, existem d números reais $c_0, c_1, ..., c_{d-1}$ de forma que*

$$p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{d-1} t^{d-1}.$$

A derivada de p, como se sabe do cálculo 1, é um polinômio $p'(t)$ de grau $d-2$. Em particular, existem números $\beta_0, ..., \beta_{d-2}$ de forma que

$$p'(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + ... + \beta_{d-2} t^{d-2}.$$

Encontre uma matriz $D : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d-1}$ tal que dado o vetor $c = (c_0, c_1, c_2, ..., c_{d-1})$, cujas entradas são vistas como coeficientes do polinômio p então $D(c) = \beta$, onde $\beta = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{d-2})$ é o vetor cujas entradas são os coeficientes do polinômio p', a derivada do polinômio p.

Exercício 7. *Responda se é verdadeiro ou falso, justificando sua resposta: seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função linear $f(x,y) = (2x, y/2)$. As únicas retas que f transforma em si mesmas são a reta horizontal e a reta vertical do plano.*