UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Disciplina: Álgebra Linear
Lista de Exercícios 1
Professor: Bruno Santiago

Exercício 1. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^d$. A reta passando por a e b é o conjunto*

$$r(a:b) \stackrel{\text{def}}{=} \{v = ta + (1-t)b; t \in \mathbb{R}\}.$$

Seja $x \in \mathbb{R}^d \setminus r(a,b)$. Seja $p \in r(a,b)$ o ponto mais próximo a x dentre todos os pontos de $r(a,b)$. Encontre uma fórmula para se obter p em função de x, a e b.

Solução. Seja $p(t) = ta + (1-t)b$, para $t \in \mathbb{R}$. Observe que $r(a,b) = \{p(t); t \in \mathbb{R}\}$. Além disso, note que podemos escrever

$$p(t) = b + t(a-b). \tag{1}$$

Seja $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\|p(\gamma) - x\| \leq \|p(t) - x\|$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Então $p(\gamma) \in r$ é o ponto da reta mais próximo de x. Sabemos pelo Teorema de Pitágoras que isso acontece se, e somente se, o vetor $x - p(\gamma)$ é ortogonal a r. Ou seja, devemos ter

$$\langle x - p(\gamma), p(t)\rangle = 0, \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Pela linearidade do produto interno a equação acima é equivalente a

$$\langle x, p(t)\rangle = \langle p(\gamma), p(t)\rangle. \tag{2}$$

Vamos analisar o termo da direita da equação acima. Para isso vamos usar (1) e a linearidade do produto interno. Com efeito,

$$\begin{aligned}\langle p(\gamma), p(t)\rangle &= \langle b + \gamma(a-b), b + t(a-b)\rangle \\ &= \|b\|^2 + \gamma\langle b, a-b\rangle + t\langle b, a-b\rangle + \gamma t\|a-b\|^2.\end{aligned}$$

Fazendo $t = 1$ obtemos

$$\langle p(\gamma), p(t)\rangle = \gamma(\langle b, a-b\rangle + \langle a-b, a-b\rangle) + \langle b, b\rangle + \langle b, a-b\rangle = \gamma\langle a, a-b\rangle + \langle a, b\rangle.$$

Por outro lado, usando (1) de novo temos

$$\langle x, p(t)\rangle = \langle x, b\rangle + t\langle x, a-b\rangle.$$

Em particular, fazendo $t = 1$ e usando a linearidade de novo temos

$$\langle x, b\rangle + \langle x, a\rangle - \langle x, b\rangle = \langle x, a\rangle.$$

Isto permite reescrever os dois lados da equação (2) obtendo

$$\gamma\langle a, a-b\rangle + \langle a, b\rangle = \langle x, a\rangle.$$

Portanto $\gamma = \frac{\langle a, x-b\rangle}{\langle a, a-b\rangle}$. □

Exercício 2. *Considere $a = (37, 0, 0, 0, 0)$, $b = (0, 47, 0, 0, 0)$, $c = (0, 0, \pi^2, 0, 0)$, $d = (0, 0, 0, \sin\frac{37}{45}, 0)$ e $e = (0, 0, 0, 0, \frac{7}{8})$ vetores em $\mathbb{R}^5$. Explique por que $\{a, b, c, d, e\}$ é uma base de $\mathbb{R}^5$.*

Solução. Dado $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ podemos escrever

$$x = \frac{x_1}{37}a + \frac{x_2}{47}b + \frac{x_3}{\pi^2}c + \frac{x_4}{\sin(37/45)}d + \frac{8x_5}{7}e$$

Portanto o conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ é gerador do $\mathbb{R}^5$. Por outro lado, se existir uma combinação linear nula desses vetores, isto é,

$$\alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c + \alpha_4 d + \alpha_5 e = 0,$$

então teremos que

$$37\alpha_1 e_1 + 47\alpha_2 e_2 + \pi^2\alpha_3 e_3 + \sin(37/45)\alpha_4 e_4 + (7/8)\alpha_5 e_5 = 0$$

e como $\{e_1, ..., e_5\}$ é um conjunto LI devemos ter $\alpha_1 = ... = \alpha_5 = 0$. Isso justifica que $\{a, b, c, d, e\}$ é uma base de $\mathbb{R}^5$. □

Exercício 3. *Encontre os coeficientes da combinação linear dos vetores $a = (1, 7)$ e $b = (3, 4)$ que produz o vetor $v = (9, 46) \in \mathbb{R}^2$.*

Resposta. $y = 1$ e $x = 6$. □

Exercício 4. *Considere $u = (1, 2, 3)$, $v = (3, 2, 0)$ e $w = (2, 0, 0)$, vetores em $\mathbb{R}^3$ e decida se o vetor $x = (1, 1, 1)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores u, v e w. Em caso afirmativo, determine os números reais α, β e γ tais que*

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = x.$$

Resposta. $\alpha = 1/3$, $\beta = 1/6$ e $\gamma = 1/12$. □

Exercício 5. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}^d$. Encontre, em função de a e b, um número real γ tal que $a - \gamma b$ seja ortogonal a b.*

Solução. Pela linearidade, como $\langle a - \gamma b, b\rangle = 0$ devemos ter $\langle a, b\rangle = \gamma||b||^2$ e portanto $\gamma = \frac{\langle a,b\rangle}{||b||^2}$. □

Exercício 6. *Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio de grau $d - 1$. Ou seja, existem d números reais $c_0, c_1, ..., c_{d-1}$ de forma que*

$$p(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{d-1} t^{d-1}.$$

A derivada de p, como se sabe do cálculo 1, é um polinômio $p'(t)$ de grau $d-2$. Em particular, existem números $\beta_0, ..., \beta_{d-2}$ de forma que

$$p'(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + ... + \beta_{d-2} t^{d-2}.$$

Encontre uma matriz $D : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d-1}$ tal que dado o vetor $c = (c_0, c_1, c_2, ..., c_{d-1})$, cujas entradas são vistas como coeficientes do polinômio p então $D(c) = \beta$, onde $\beta = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{d-2})$ é o vetor cujas entradas são os coeficientes do polinômio p', a derivada do polinômio p.

Solução. A derivada de p é o polinômio

$$p'(t) = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + 4c_4 t^3 + ... + d - 1c_{d-1} t^{d-2}.$$

Portanto

$$D(c_0, ..., c_{d-1}) = (c_1, 2c_2, 3c_3, 4c_4, ..., d - 1c_{d-1}).$$

Por isso a matriz de D nas bases canônicas de $\mathbb{R}^d$ e $\mathbb{R}^{d-1}$ deve ser

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & d-1 \end{bmatrix}$$

□

Exercício 7. *Responda se é verdadeiro ou falso, justificando sua resposta: seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função linear $f(x, y) = (2x, y/2)$. As únicas retas que f transforma em si mesmas são a reta horizontal e a reta vertical do plano.*

Solução. Verdadeiro. Observe que $f^n(x,y) = (2^n x, y/2^n)$. Em particular, qualquer reta que não seja horizontal nem vertical é transformada por aplicações sucessivas de f em retas com inclinação $1/2^{2n}$. Assim, suponha por contradição que uma reta seja invariante por f. Então, teremos

$$f^n(r) = r, \quad \forall\ n > 0.$$

Seja ε o ângulo de r com a horizontal. Tomando n suficientemente grande teremos que $1/2^{2n} < |\varepsilon|$ e assim sabemos que $f^n(r)$ é uma reta com inclinação menor do que ε em valor absoluto. Mas como $f^n(r)$ deve ser igual a r isso é absurdo. Portanto não podem existir retas invariantes. $\square$