UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Disciplina: Álgebra Linear
Primeira Avaliação
Professor: Bruno Santiago

Procure escrever suas respostas de forma objetiva, clara e organizada. Cada questão vale 3 pontos.

Questão 1. *Sejam $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 2, 0)$ e $w = (1, 2, 3)$.*
(a) *Explique por que o conjunto $X = \{u, v, w\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.*
(b) *Calcule as coordenadas do vetor $v = (7, 8, 9)$ na base X.*

Solução. Observe que u e v não são colineares e que o subespaço gerado por eles é o plano "horizontal"em $\mathbb{R}^3$ formado pelos vetores com a terceira coordenada nula. Por outro lado, a terceira coordenada de w é não nula, logo w não pertence ao plano gerado por u e v. Portanto o conjunto X não pode ser LD. Isso prova que X é LI. Como $\mathbb{R}^3$ tem dimensão 3, concluimos que X é uma base. Sejam x, y e z números reais tais que

$$x(1, 1, 0) + y(1, 2, 0) + z(1, 2, 3) = (7, 8, 9).$$

A igualdade vetorial acima equivale às três iguadades numéricas abaixo

$$\begin{aligned} x + y + z &= 7 \\ x + 2y + 2z &= 8 \\ 3z &= 9 \end{aligned}$$

Deduzimos da última equação que $z = 3$ o que nos leva às duas equações

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

cuja solução é $y = -2$ e $x = 6$. □

Questão 2. *Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma função linear satisfazendo*

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0) &= (1, 7, 89) \\ f(1, 1, 0) &= (9, 6, 4) \\ f(1, 1, 1) &= (0, 6, -2) \end{aligned}$$

Calcule $f(1, 2, 3) + f(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.

Demonstração. Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica. Então, a primeira igualdade acima nos diz que

$$f(e_1) = (1, 7, 89).$$

Como $e_1 + e_2 = (1, 1, 0)$ e como f é linear a segunda igualdade do enunciado diz que

$$f(e_1) + f(e_2) = (9, 6, 4).$$

Portanto $f(e_2) = (9,6,4)-(1,7,89) = (8,-1,-85)$. Analogamente, como $e_1+e_2+e_3 = (1,1,1)$, usando a linearidade deduzimos da terceira igualdade do enunciado que

$$f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = (0,6,-2).$$

Portanto, devemos ter $f(e_3) = (0,6,-2) - (9,6,4) = (-9,0,-6)$. Assim, como

$$\begin{aligned}
f(1,2,3) + f(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}) &= f(1+\sqrt{2}, 2+\sqrt{3}, 3+\sqrt{5}) \\
&= f((1+\sqrt{2})e_1 + (2+\sqrt{3})e_2 + (3+\sqrt{5})e_3) \\
&= (1+\sqrt{2})f(e_1) + (2+\sqrt{3})f(e_2) + (3+\sqrt{5})f(e_3)
\end{aligned}$$

Substituindo $f(e_1), f(e_2)$ e $f(e_3)$ na expressão acima obtemos

$$f(1,2,3) + f(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}) = (1+\sqrt{2})(1,7,89) + (2+\sqrt{3})(8,-1,-85) + (3+\sqrt{5})(-9,0,-6).$$

Vamos efetuar o cálculo coordenada por coordenada. Na primeira entrada temos

$$1+\sqrt{2}+16+8\sqrt{3}-27-9\sqrt{5} = -10+\sqrt{2}+8\sqrt{3}-9\sqrt{5}.$$

Na segunda entrada temos

$$7+7\sqrt{2}-2-\sqrt{3} = 5+7\sqrt{2}-\sqrt{3}.$$

Por fim, na terceira coordenada temos

$$89+89\sqrt{2}-170-85\sqrt{3}-18-6\sqrt{3} = -99+89\sqrt{2}-85\sqrt{3}-6\sqrt{5}.$$

Portanto,

$$f(1,2,3)+f(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}) = (-10+\sqrt{2}+8\sqrt{3}-9\sqrt{5}, 5+7\sqrt{2}-\sqrt{3}-99+89\sqrt{2}-85\sqrt{3}-6\sqrt{5}).$$ □

Questão 3. *Dado $d \in \mathbb{N}$ um número natural arbitrário, considere $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ a função linear definida por*

$$f(x_1,x_2,x_3,...,x_d) = (x_1, x_1+2x_2, x_1+2x_2+3x_3, ..., x_1+2x_2+3x_3+...+dx_d).$$

Escreva a matriz de f na base canônica.

Solução. Para ilustrar a solução vamos considerar primeiro o caso particular onde $d = 3$. Assim,

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1, x_1+2x_2, x_1+2x_2+3x_3).$$

Nesse caso temos que

$$\begin{aligned}
f(e_1) &= (1,1,1) \\
f(e_2) &= (0,2,2) \\
f(e_3) &= (0,0,3)
\end{aligned}$$

Portanto a matriz de f será

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

No caso geral vemos que

$$\begin{aligned}
f(e_1) &= (1,1,1,...,1) \\
f(e_2) &= (0,2,2,...,2) \\
f(e_3) &= (0,0,3,...,3) \\
&\vdots \\
f(e_d) &= (0,0,0,...,d).
\end{aligned}$$

Portanto a matriz de f será

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & d. \end{bmatrix}$$

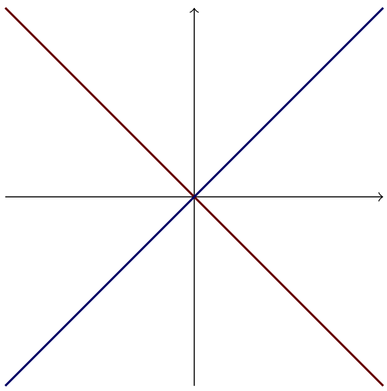
□

Questão 4. *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e sejam* $f_A, f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *as funções lineares definidas a partir de* A *e* B *usando-se a base canônica. Decida se a afirmação a seguir é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.*

Não existe reta no plano simultaneamente invariante por f_A ***e*** f_B***.***

Somente respostas com justificativa adequada serão consideradas.

Demonstração. Observe que $f_A(x, y) = (x + y, y)$ e $f_B(x, y) = (x, x + y)$. Suponha por contradição que exista uma reta r do plano invariante ao mesmo tempo por f_A e f_B. Observe



que o eixo vertical não é invariante por f_A, pois $f_A(0, y) = (y, y)$ e que o eixo horizontal não é invariante por f_B, já que $f_B(x, 0) = (x, x)$. Portanto podemos supor que a reta r não é nem horizontal nem vertical e portanto ou cruza o segundo e o quarto quadrante ou cruza o primeiro e o terceiro. Veja a figura acima. Se estivermos no primeiro caso (reta vermelha na figura), podemos supor que existe $v = (x, y) \in r$ com $x < 0$ e $y > 0$. Como

$$f_A^n(v) = (x + ny, y), \quad \forall\, n > 0,$$

para n suficientemente grande devemos ter $x + ny > 0$. Isso implica que $f_A^n(v)$ pertence ao primeiro quadrante, mas isso é absurdo pois r só passa pelo segundo e pelo quarto quadrante. Portanto, a reta invariante deve conter um vetor $v = (x, y)$ no primeiro quadrante (reta azul na figura), ou seja $x > 0$ e $y > 0$. Agora, como estamos supondo por absurdo que $f_A^n(v) \in r$ para todo n, isso implica que o quociente entre a coordenada vertical e a coordenada horizontal de $f_A^n(v)$ deve ser uma constante positiva, pois r não é horizontal. No entanto, como $f_A^n(v) = (x + ny, y)$ esse quociente é igual a

$$\frac{y}{x + ny}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{y}{x+ny} = 0$, deduzimos que r é horizontal, o que é absurdo. Isso demonstra que a afirmação é verdadeira. □