Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e das Estruturas

Paulo de Mattos Pimenta

Professor Titular do
Departamento de Estruturas e Fundações da
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

São Paulo
2006

À Ciça e ao
Leandro

Prefácio

Este é o texto de apoio às aulas das disciplinas de pós-graduação sobre Fundamentos da Teoria das Estruturas e de Análise Não-linear de Estruturas ministradas pelo autor no Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo desde 1985.

Embora se deseje transformá-lo em um livro, ele, contudo, deve ainda ser considerado provisório. Ele ainda não inclui referências bibliográficas, o número de figuras, de exemplos e de exercícios é pequeno, alguns capítulos ainda nem foram completados. Modificações e complementações têm sido introduzidas todos os anos na tentativa de melhorá-lo. Para isso, sugestões, correções e contribuições por parte do leitor são bem-vindas. Pede-se, pela mesma razão, compreensão e boa vontade aos alunos que o utilizarem.

O texto é conceitual e contém muita matemática, requerendo esforço e persistência dos alunos. Procurou-se apresentar os tópicos matemáticos de forma mais operacional, ou seja, de forma simples e intuitiva, sem rigorismo. É um texto para Engenheiros, não para Matemáticos. Por isso, como motivação, um capítulo introdutório às Estruturas Civis foi elaborado. No entanto, o texto pode servir muito bem a Engenheiros Estruturais de outras áreas como a Mecânica, Automotiva, Naval e Aeronáutica. É a opinião do autor que estes conceitos são indispensáveis para a formação de um Engenheiro de Estruturas completo, que possa compreender os trabalhos mais recentes nesta área, efetuar pesquisas tanto para o Mestrado como para o Doutorado nas áreas de Mecânica dos Sólidos e de Estruturas e ser responsável pelo desenvolvimento de novas tecnologias.

Recomenda-se antecipadamente aos alunos, assim como aos demais leitores, que façam uma revisão da Matemática do curso de graduação com ênfase em matrizes, determinantes, cálculo diferencial e integral de funções de uma ou mais variáveis reais. A quantidade de informação disponibilizada aos alunos aqui é avassaladora. Por isso, recomenda-se que os alunos estudem com afinco semanalmente a matéria apresentada. É fácil o aluno perder o pé. Da mesma forma, recomenda-se que os alunos elaborem sempre os exercícios deste texto e os sugeridos em aula.

Nos capítulos iniciais os Fundamentos Matemáticos necessários à compreensão da Mecânica dos Sólidos e das Estruturas são apresentados. Uma introdução à Álgebra Linear é elaborada no Capítulo 2, dando importância aos seus aspectos operacionais. A Álgebra Linear é crucial para o entendimento dos conceitos de vetor e de tensor que permeiam toda a Mecânica dos Sólidos e das Estruturas. Os Princípios da Mecânica dos Sólidos ficam muito mais claros com a utilização desta ferramenta matemática. Formulações no espaço tridimensional ficam enormemente facilitadas com o seu emprego. Como todo novo conhecimento, o aprendizado inicial é sempre árduo. No entanto, o esforço é recompensado pelo ganho operacional e pela elegância alcançada na notação. A seguir, no Capítulo 3, à luz dos elementos de Álgebra Linear, são então revistos e estendidos alguns resultados de Cálculo Diferencial e Integral aplicados à Análise Tensorial, dando novamente mais relevância ao aspecto operacional. No Capítulo 4, um breve estudo das Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais é oferecido ao leitor com o intuito de complementar seu *background* matemático. O Capítulo 5 é uma introdução ao Cál-

culo Variacional, que é condição *sine qua non* para o entendimento das formulações integrais da Mecânica dos Sólidos e das Estruturas, as quais são empregadas na forma de teoremas tão importantes como o Teorema dos Trabalhos Virtuais e na formulação de métodos aproximados de solução como o Método dos Elementos Finitos. Trata-se de uma parte da Matemática que geralmente não é abordada em cursos de graduação de Engenharia.

Nos quatro capítulos seguintes os fundamentos da Mecânica dos Sólidos Deformáveis são apresentados. No Capítulo 6, expõe-se a Cinemática dos Sólidos Deformáveis, utilizando-se o ferramental matemático do Capítulo 2 em toda a sua potencialidade. No Capítulo 7, os Princípios da Mecânica são reapresentados ao leitor, inicialmente para os pontos materiais, a seguir para os sólidos rígidos e finalmente para os sólidos deformáveis. No Capítulo 8 a Estática e Dinâmica dos Sólidos são descritas. O conceito de tensão é discutido com profundidade e as Equações do Movimento e do Equilíbrio são deduzidas. No Capítulo 9, uma introdução à Teoria das Equações Constitutivas é elaborada, completando os conhecimentos básicos necessários para a compreensão da moderna Mecânica dos Sólidos e das Estruturas.

Nos capítulos finais diversas aplicações da Mecânica dos Sólidos Deformáveis são apresentadas, como a Teoria Linear da Elasticidade, a Teoria Não-linear da Elasticidade, a Teoria da Plasticidade, a Teoria da Viscoelasticidade e a Teoria da Estabilidade. É óbvio que tais aplicações são expostas em caráter preliminar, não se almejando uma apresentação completa sobre o assunto. Elas servem para ilustrar o poder da Mecânica dos Sólidos na resolução de problemas da Teoria das Estruturas.

Devo o meu agradecimento aos alunos que me ajudaram a preparar este texto, em particular com figuras, exercícios, correções e sugestões. Sem ser exaustiva, a lista de meus credores contém o Eduardo de Moraes Barreto Campello, o Elivaldo Elenildo da Silva, o Evandro Rossi Dasambiagio e o Hudson Chagas dos Santos.

Aproveito o ensejo para agradecer ao CNPq, que tem me apoiado com uma bolsa de Pesquisador, em nível 1, desde 1996, e ao Professor Peter Wriggers, chefe da cadeira de Mecânica Estrutural e Computacional da Universidade de Hannover, que me proporcionou dois estágios como Professor Visitante em 2002. Esta cadeira é sucessora da Cadeira de August Ritter, conhecido dos alunos de Resistência dos Materiais pelos seus trabalhos no século XIX sobre o cálculo de treliças. Agradeço também aos Professores Balthasar Novak e Wolfgang Ehlers da Universidade de Stuttgart, respectivamente do Instituto de Projeto de Estruturas Leves e do Instituto de Mecânica Estrutural, que me convidaram para um estágio de pós-doutorado nesta renomada instituição. Sou também grato aos governos brasileiro e português que, através da CAPES e do ICCTI têm apoiado a mim e ao Professor Sérgio Proença da Escola de Engenharia de São Carlos em um convênio internacional entre a Universidade de São Paulo e o Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa. Este convênio tem financiado estágios a diversos alunos e professores de ambos os países. Em particular, agradeço ao Professor Teixeira de Freitas que tão bem tem-me acolhido em Lisboa. Nestes estágios tive a paz necessária para preparar esta revisão.

Paulo de Mattos Pimenta

Hannover, Stuttgart, Lisboa e São Paulo, fevereiro de 2006

Índice

Prefácio **i**

Índice **iii**

1 As Estruturas da Engenharia **9**
1 Sólidos e estruturas 9
2 Estruturas civis 10
2.1 Notas históricas 10
2.2 Propriedades dos Materiais Estruturais Civis 25
2.3 O Projeto Estrutural Civil 27
3 Estruturas mecânicas 29

2 Elementos de Álgebra Tensorial **31**
1 Espaços Vetoriais 31
2 Espaços Afins 32
3 Dimensão e Base 33
4 Componentes 34
5 Convenção da Somatória 35
6 Espaços Vetoriais Euclidianos 36
7 Bases Ortonormais 39
8 Formas Lineares 41
9 Operadores Vetoriais 42
10 Tensores de Segunda Ordem 47
11 Formas Bilineares e Formas Quadráticas 51
12 Produto Escalar entre Tensores de Segunda Ordem 52
13 Produto Vetorial 54
13.1 Relação de Euler 57
13.2 Relação de Nanson 57
14 Rotações 57
15 Tensores Simétricos 58
15.1 Autovalores e Autovetores 59
15.2 Decomposição espectral de um tensor simétrico 61
15.3 Máximos e mínimos da forma quadrática associada 62
16 Tensores de Terceira Ordem 64
17 Tensores de Quarta Ordem 66

3 Elementos de Cálculo Diferencial **71**
1 Funções 71
2 Diferenciais e Derivadas 71
3 Extremos 74
3.1 Condições Necessárias para Extremos 74
3.2 Condições para mínimos locais 75
4 Convexidade 76
5 Elementos de análise tensorial 78
5.1 Campos tensoriais 78
5.2 Operadores Diferenciais 79
5.3 Integrais de Volume 81

4 Elementos de Equações Diferenciais 84
1 Equações Diferenciais Ordinárias 84
1.1 Introdução 84
1.2 Equações Diferenciais de Primeira Ordem 87
1.3 Solução de EDO's Lineares de Primeira Ordem 90
1.4 Solução de SEDO's Lineares de Primeira Ordem 96
2 Equações Diferenciais Parciais 102
2.1 Introdução 102
2.2 Classificação de EDP's quase-lineares de 2ª ordem 105
2.3 Equação de Euler 107
2.4 Problemas de Valor no Contorno 109
2.5 Método das Diferenças Finitas 110

5 Elementos de Cálculo Variacional 113
1 Funcionais 113
2 Variações 119
2.1 Funcionais de primeira ordem 121
2.2 Funcionais de segunda ordem 122
2.3 Equação de Euler-Lagrange 124
3 Extremos 125
3.1 Condições Necessárias para Extremos 126
3.2 Condições necessárias e suficientes para mínimos locais 130
4 Convexidade 131

6 Cinemática dos Sólidos Deformáveis 133
1 Meio Contínuo 133
2 Movimento de um Sólido Deformável 133
3 Fibras 136
3.1 Estiramento de uma fibra 138
3.2 Alongamento de uma fibra 138
4 Tensores das Deformações 139
4.1 Tensor das deformações de Green 139
4.2 Outros tensores das deformações 141
5 Distorção 143
6 Membranas 144
7 Deformação Volumétrica 145
8 Tensor das Rotações 146
9 Velocidades e Acelerações 147
10 Movimento de Corpo Rígido 148
11 Pequenas Deformações 148
11.1 Máximo e mínimo alongamento 150
11.2 Máxima distorção 150
12 Pequenas Rotações 154

7 Princípios da Mecânica dos Sólidos 156
1 Princípios da Mecânica Newtoniana 156
1.1 Primeiro Princípio ou Princípio do Espaço Absoluto 156
1.2 Segundo Princípio ou Princípio do Tempo Absoluto 156
1.3 Terceiro Princípio ou Princípio das Forças 159
1.4 Quarto Princípio ou Princípio da Inércia 159
1.5 Quinto Princípio ou Lei da Conservação da Massa 159
1.6 Sexto Princípio ou Princípio Fundamental da Dinâmica 160
1.7 Sétimo Princípio ou Princípio da Ação e Reação 160
2 Princípios da Mecânica dos Sólidos Rígidos 162
2.1 Primeiro Princípio 162
2.2 Segundo Princípio 162
2.3 Terceiro Princípio 163
2.4 Quarto Princípio ou Princípio da Inércia 164
2.5 Quinto Princípio ou Lei da Conservação da Massa 164

2.6 Sexto Princípio ou Leis de Euler 166
2.7 Sétimo Princípio 167
3 Princípios da Mecânica dos Sólidos Deformáveis 167
3.1 Primeiro Princípio 167
3.2 Segundo Princípio 167
3.3 Terceiro Princípio 167
3.4 Quarto Princípio ou Princípio da Inércia 168
3.5 Quinto Princípio ou Lei da Conservação da Massa 168
3.6 Sexto Princípio ou Leis de Euler 169
3.7 Sétimo Princípio 169

8 Estática e Dinâmica dos Sólidos Deformáveis 170
1 Tensões 170
1.1 Tensor das Tensões de Cauchy 170
1.2 Tensores de Kirchhoff 179
1.3 Tensores Energeticamente Conjugados 180
1.4 Taxas de Tensionamento 182
2 Equações Globais do Movimento e do Equilíbrio 183
2.1 Equações Globais do Movimento 183
2.2 Equações Globais do Equilíbrio 183
3 Equações Locais do Movimento e do Equilíbrio 183
3.1 Equações Locais do Movimento 183
3.2 Equações Locais do Equilíbrio 184
4 Linearidade Geométrica 185

9 Teoria dos Materiais 188
1 Introdução 188
2 Princípios da Teoria dos Materiais 188
2.1 Princípio do Determinismo 188
2.2 Princípio da Localidade 189
2.3 Princípio da Objetividade 189
3 Modelos Básicos 191
4 Modelos Materiais Unidimensionais 193
4.1 Modelo elástico de Hooke 193
4.2 Modelo plástico de Saint-Venant 194
4.3 Modelo viscoso de Newton 195
4.4 Modelo elastoplástico de Prandtl-Reuss 196
4.5 Modelo viscoelástico de Maxwell 197
4.6 Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt 198
4.7 Modelo viscoelástico de três parâmetros 199
4.8 Modelos viscoelásticos de vários parâmetros 202
4.9 Modelo viscoplástico de Bingham 203
4.10 Modelo viscoplástico de Hohenemser-Prager 205
5 Equações Materiais Hiperelásticas 206
5.1 Classes de Materiais Hiperelásticos 206
5.2 Materiais Hiperelásticos Isótropos 208
5.3 Materiais Hiperelásticos Transversalmente Isótropos 209
5.4 Materiais Hiperelásticos Ortótropos 210

10 Teoria Linear da Elasticidade 213
1 Introdução: linearidade geométrica e física 213
2 Isotropia 214
2.1 Materiais hiperelásticos isótropos 215
2.2 Lei de Hooke generalizada 215
3 Compatibilidade 219
4 O Problema Estático da Teoria Linear da Elasticidade 221
4.1 Equações do Problema Estático da Teoria Linear da Elasticidade 221
4.2 Superposição dos Efeitos 222
4.3 Unicidade da Solução 223
4.4 Método dos Deslocamentos 224

4.5 Método dos Esforços 226
4.6 Princípio de Saint-Venant 228
4.7 Notação Técnica 228
4.8 Problemas Planos da Teoria Linear da Elasticidade 229
4.9 Função de Airy 232
4.10 Teoria da Torção Uniforme 233
5 O Problema Dinâmico da Teoria Linear da Elasticidade 239
5.1 Equações do Problema Dinâmico da Teoria Linear da Elasticidade 239
5.2 Superposição dos Efeitos 240
5.3 Método dos Deslocamentos 241
5.4 Ondas Elásticas 242
5.5 Vibrações Livres 242

11 Teoria Não-linear da Elasticidade 244
1 Introdução 244
2 Linearidade Geométrica 244
2.1 Elasticidade linear 244
2.2 Elasticidade não-linear 248
2.3 Solução de Problemas Quase-estáticos 251
3 Não-linearidade Geométrica 252
3.1 Problema Estático 252
3.2 Material elástico isótropo 255
3.3 Problema Quase-estático 257
3.4 Problema Tangente 257
3.5 Solução de Problemas Quase-estáticos 259

12 Formulações Integrais da Mecânica dos Sólidos 263
1 Formulações sob Não-linearidade Geométrica 263
1.1 Potência e Trabalho dos Esforços Externos 263
1.2 Potência e Trabalho dos Esforços Internos 264
1.3 Energia Cinética 265
1.4 Teorema das Potências 265
1.5 Teorema dos Trabalhos Virtuais 266
1.6 Potenciais 269
1.7 Energia Potencial e Energia Mecânica 270
1.8 Funcional misto de Hu-Washizu 272
1.9 Funcional híbrido-misto geral 272
1.10 Funcionais híbridos de compatibilidade 273
1.11 Teorias Estruturais 275
2 Formulações sob Linearidade Geométrica 276
2.1 Potência e Trabalho dos Esforços Externos 276
2.2 Potência e Trabalho dos Esforços Internos 277
2.3 Energia Cinética 277
2.4 Teorema das Potências 277
2.5 Teorema dos Trabalhos Virtuais 278
2.6 Potenciais 281
2.7 Energia Potencial e Energia Mecânica 282
2.8 Funcional misto de Hu-Washizu 284
2.9 Funcional híbrido-misto geral 285
2.10 Funcionais híbridos de compatibilidade 286
2.11 Teorema dos Trabalhos Virtuais Complementares 288
2.12 Teorema da Energia Potencial Complementar 289
2.13 Funcional misto de Hellinger-Reissner 291
2.14 Funcional híbrido-misto complementar 291
2.15 Funcionais híbridos de equilíbrio 292
2.16 Funcional Híbrido de Trefftz 294
2.17 Teorias estruturais sob linearidade geométrica 295
2.18 Método da Carga Unitária para Estruturas de Barras 309
2.19 Teoremas de Energia para Estruturas de Barras 314

13 Métodos Diretos de Solução de Problemas Estáticos 317
1 Projeções e Resíduos Ponderados 317
1.1 Projeção Clássica 317
1.2 Resíduos Ponderados 319
1.3 Projeção Generalizada 320
2 Formulações Equivalentes na Teoria das Estruturas 321
2.1 Formulação Diferencial 322
2.2 Formulação Forte 322
2.3 Formulação Fraca 323
2.4 Formulação Variacional 324
3 Métodos Aproximados para Problemas Estáticos 325
3.1 Geração de Subespaços de Aproximação 325
3.2 Método de Ritz 325
3.3 Método dos Elementos Finitos 328
3.4 Método da Colocação 329
3.5 Método de Ritz-Galerkin e método de Petrov-Galerkin 330

14 Critérios de Resistência 331
1 Introdução 331
2 Classes de Critérios de Resistência 332
3 Critérios de Resistência Isótropos 332
3.1 Critério de Rankine 333
3.2 Critério de Tresca 333
3.3 Critério de Huber-von Mises 334
3.4 Critério de Mohr-Coulomb 335
3.5 Critério de Drucker-Prager 336

15 Introdução à Teoria da Plasticidade 338
1 Equações Constitutivas Elastoplásticas 338
1.1 Modelo uniaxial elástico perfeitamente plástico 338
1.2 Modelo multiaxial elástico perfeitamente plástico 342
2 O Problema Estático da Teoria da Plasticidade 348
2.1 O Problema Quase-estático 348
2.2 O Problema Tangente da Teoria da Plasticidade 348
3 Análise Limite para Carregamentos Proporcionais 349
3.1 Colapso plástico sob carregamento proporcional 350
3.2 Teorema Estático 350
3.3 Teorema Cinemático 355

16 Introdução à Teoria da Viscoelasticidade 359
1 Modelos Uniaxiais 359
1.1 Modelo de três parâmetros 359
1.2 Função de fluência e de relaxação 360
1.3 Formulação integral 363
1.4 Envelhecimento 365
2 Equações Constitutivas Viscoelásticas Lineares 368
2.1 Materiais viscoelásticos lineares isótropos 369
2.2 Metais e polímeros 369
2.3 Concreto 369
3 Teoremas de Correspondência 370
3.1 Decomposição do Problema Estático 370
3.2 Estruturas de Concreto 370

17 Introdução à Teoria da Estabilidade 376
1 Estabilidade de Sólidos Conservativos 376
1.1 Configuração de Equilíbrio Estável 376
1.2 Configuração de Equilíbrio Crítica 378
2 Análise de Euler 379
3 Modelos Unidimensionais 381

1

As Estruturas da Engenharia

1 Sólidos e estruturas

Como este texto trata de sólidos e de estruturas, é necessário primeiramente introduzir preliminarmente alguns conceitos e definições. *Sólidos*[1], em oposição aos fluidos, são conjuntos conexos de material que possuem forma definida quando não são submetidos à ação de nenhum esforço externo.

Sólidos na Mecânica dos Meios Contínuos são considerados um conjunto contínuo de pontos materiais que podem ser identificados pela posição que ocupam no espaço físico tridimensional. Sólidos são considerados *rígidos* quando a distância relativa entre quaisquer dois de seus pontos materiais não se altera no tempo. Caso contrário são chamados *deformáveis*.

Sólidos são considerados uma *estrutura* quando têm a função de transmitir ou resistir à ação de esforços externos. Para isso é necessário que tenham também mantenham uma forma definida quando submetidos à ação dos esforços externos para os quais devam ser funcionais. Uma estrutura é portanto um sólido com uma função mecânica. Estruturas podem ser projetadas e construídas para que tenham a função desejada. Este é o objetivo principal da *Engenharia Estrutural*. Existem estruturas em todas as construções civis, assim como nas máquinas, sejam elas guindastes, automóveis, aviões, foguetes, navios ou submarinos. Existem estruturas naturais, como a formada pelo esqueleto e músculos dos corpos dos mamíferos.

A *Mecânica dos Meios Contínuos* é a parte da física que trata de sólidos e fluidos, quando são considerados um conjunto contínuo de pontos materiais que podem ser identificados pela posição que ocupam no espaço físico tridimensional. *Mecânica dos Sólidos* é a parte da Física que trata tanto dos sólidos rígidos como dos deformáveis. A Mecânica dos Sólidos trata também de sistemas formados por sólidos, como uma máquina. A *Mecânica dos Sólidos Deformáveis* é a parte da Mecânica dos Meios Contínuos que trata apenas dos sólidos deformáveis. A *Mecânica das Estruturas* é a parte da Mecânica dos Sólidos Deformáveis que trata especificamente das estruturas.

[1] Quando definições são feitas ao longo do texto, coloca-se o conceito definido em *itálico*.

2 Estruturas civis

2.1 Notas históricas

2.1.1 Estruturas em alvenaria

Construções em alvenaria, isto é, com pedras naturais ou artificiais (tijolos cerâmicos, blocos de argamassa ou gesso, etc.) são, juntamente com as construções de madeira, as mais antigas da Cultura Humana. Já havia construções em alvenaria nas mais priscas eras. No início, as pedras eram apenas empilhadas, mas logo se desenvolveu a técnica do alvener ou alvanel, ou seja, de talhar as pedras, dando-lhes um melhor encaixe. O exemplo supremo desta técnica talvez possa ser visto na Fortaleza de Saqshuyaman (Figura 1.1), nas proximidades de Cuzco, na qual os Incas levantaram pedras naturais de diversas toneladas, talhadas e polidas, com encaixes perfeitos e sem argamassa, cuja execução até hoje um enigma permanece. O assentamento das pedras com o auxílio de argamassa, isto é, de uma mistura de água, areia e algum material ligante como barro ou cal é também quase tão antigo.

Figura 1.1: Fortaleza de Saqshuyaman

No passado, a maioria das coberturas e telhados era realizada com a ajuda de estruturas de madeira, uma vez que os vãos que podem ser vencidos com a alvenaria eram bastante limitados. Um exemplo desta limitação são os túmulos executados pelos povos neolíticos da Bretanha, nas proximidades da cidade de Carnac. No entanto, o Homem desde cedo tentou desenvolver técnicas para superar esta limitação. Uma delas, chamada de falso arco ou abóbada, consistia em empilhar pedras em balanço até se fecharem no topo da construção. O exemplo mais conhecido desta técnica é a Câmara do Tesouro de Atreu em Micenas no Peleponeso, erguida estimativamente em 1325 AC.

Figura 1.2: Arcos e abóbadas romanos em alvenaria

a) Pont du Gard perto de Nîmes; b) Panteão em Roma (118-125)

Os romanos levaram a técnica dos arcos e das abóbadas ao um grande florescimento com a construção de pontes e aquedutos assim como com a cobertura de grandes espaços, atingindo vãos que só foram alcançados novamente na Renascença, muitos séculos depois. Na Figura 1.2a vê-se o aqueduto romano de Pont du Gard na Provença, exemplo muito bem conservado da técnica romana com os arcos de alvenaria. Ao lado, na Figura 1.2b está um dos mais belos exemplos de abóbada da Antigüidade: o Panteão de Roma (diâmetro de 40 m).

Na Figura 1.3 vê-se a primeira tentativa de se utilizar a mesma técnica na Renascença: a cúpula da Catedral de Florença, projeto de Bruneleschi[2] em 1420 (diâmetro de 42 m). A habilidade dos alveneiros (hoje, pedreiros) atingiu um máximo, tanto no aproveitamento dos materiais como na forma arquitetônica, na construção das catedrais góticas européias, sejam elas em pedra natural como as francesas e as do centro-sul da Alemanha, assim como as executadas em tijolos cerâmicos do norte da Alemanha.

Figura 1.3: Cúpula da Catedral de Florença

A construção em alvenaria é ainda hoje muito importante, principalmente em obras residenciais. No entanto, ela perdeu parte de sua significância após o desenvolvimento de novos materiais de construção como o aço e o concreto. A baixa resistência à tração da alvenaria limita o seu uso a paredes e muros sujeitos a pouca solicitação de flexão, ou ao uso de arcos e cúpulas. Edifícios residenciais de vários pavimentos com paredes estruturais de alvenaria, armadas ou não, complementados por elementos estruturais de concreto armado como lajes e travamentos, podem ser uma opção em países em desenvolvimento, nos quais a mão de obra é ainda relativamente barata. Já em países com níveis salariais mais altos, a construção em alvenaria concentra-se em obras residenciais de pequeno porte.

Existem alguns desenvolvimentos modernos em materiais para obras de alvenaria, principalmente com o desenvolvimento de blocos leves, inclusive de materiais artificiais derivados do petróleo, e de blocos de alto desempenho.

2.1.2 Estruturas de madeira

A execução artesanal de estruturas de vigas de madeira desenvolveu-se desde cedo tanto na China e, depois, na Idade Média Européia, seja em coberturas, seja em pontes, conforme se podem ver nas Figura 1.4a e na Figura 1.5. No entanto, a construção de estruturas de madeira passou a ser um assunto propriamente da Engenharia somente após a Revolução Industrial. Em particular, nos Estados

[2] Filippo Bruneleschi (1377-1446).

Unidos e na Europa Central, países ricos em florestas, inúmeras pontes ferroviárias foram erguidas no século XIX, que posteriormente foram todas substituídas por pontes metálicas.

Figura 1.4: Estruturas em madeira

a) Igreja em Saalfeld (séc.XIII); b) Balneário de Bad Dürrheim (1985-1987)

Figura 1.5: Ponte em madeira sobre o Rio Reno em Schaffhausen

Projeto com 2 vãos de 60 m de J. U. Grubenmann (1756)

Uma inovação recente nas estruturas de madeira são as vigas de madeira colada que possibilitam a construção de vigas curvas de grande vão (Figura 1.4b e Figura 1.6). Contribuiu, para isso, também o desenvolvimento de diversos tipos de ligações metálicas que muito simplificaram estas construções e lhes deram um caráter de estruturas metálicas.

Figura 1.6: Ginásio de esportes do Parque das Nações, Lisboa

2.1.3 Estruturas metálicas

A utilização do ferro e do aço em estruturas dependeu muito do desenvolvimento da siderurgia durante a Revolução Industrial na Inglaterra. Alguns marcos deste desenvolvimento são a produção de ferro gusa em alto-fornos por volta de 1735 por Abraham Darby II e a descoberta do processo de fabricação do aço pelo processo "puddling" por Henry Cort em 1784. Com o desenvolvimento das primeiras laminações na primeira metade do século XIX, pôde o aço ser finalmente transformado de forma econômica em perfis adequados ao uso estrutural. A produção econômica do aço em grandes quantidades tornou-se possível somente após a descoberta em 1855 do processo da garrafa de Henry Bessemer e a invenção em 1867 do forno de Siemens-Martin.

Figura 1.7: Ponte de ferro fundido em Coalbrookdale/Severn

A primeira ponte de ferro (Figura 1.7) foi construída em Coalbrookdale/Severn por Abraham Darby III e John Wilkinson nos anos 1773-1779 com 30,6 m de vão e pode ainda ser visitada hoje. No ano 1794 surgiu a primeira ponte de ferro na Alemanha com 13 m de vão (Figura 1.8). No princípio do século XIX inúmeras pontes foram construídas em toda a Europa com a mesma técnica. As primeiras pontes adotaram as formas tradicionais das pontes em alvenaria, sendo construídas em arco, uma vez que ainda eram executadas de forma artesanal, sem fundamentos teóricos. Os elementos de fer-

ro fundido, que são muito frágeis quando submetidos a compressão, eram ligados por encaixes e molas ou com chapas de aço forjado.

Figura 1.8: Ponte de ferro fundido em Laasan, Silésia

Além das pontes em arco, a partir de 1825, com a construção acelerada das estradas de ferro, foram executadas inúmeras pontes em treliça em diversos esquemas. Este sistema estrutural atingiu seu apogeu com a ponte sobre o Firth of Forth (Figura 1.9), próxima a Edimburgo, com o vão principal de 521 m, construída em 1883-1890.

Figura 1.9: Ponte sobre o Firth of Forth, Escócia

Paralelamente ao desenvolvimento da tecnologia do aço, a compreensão de forma racional do comportamento das estruturas foi um fator importantíssimo para o rápido desenvolvimento da Engenharia de Estruturas no século XIX. A partir de meados do século XIX, as estruturas passam a serem concebidas não mais artesanalmente e suas formas não mais determinadas por proporções, mas sim por sua capacidade portante calculada a partir de fundamentos científicos e de resultados de ensaios. Baseados na Mecânica, e com o auxílio de resultados experimentais, Hooke (1635-1703), Belidor (1693-1761), Bernoulli (1700-1782), Coulomb (1736-1806) e outros haviam estabelecido os fundamentos da Estática. Navier (1735-1806) ordenou em 1821 este conhecimento, resumindo-o e complementando-o em suas preleções na "École des Ponts et Chaussées", transformando-o em um conhecimento prático, ou, como hoje denominamos, em tecnologia. Em 1858 aparecia uma outra obra importantíssima, denominada “Manual of Applied Mechanics” do engenheiro escocês William Rankine (1820-1872). Contribuições importantes vieram também do alemão Karl Culmann (1821-

1881) com a Grafostática, hoje desnecessária depois dos computadores, e do físico escocês James Clerk Maxwell (1831-1879) e do italiano Carlo Alberto Castigliano (1847-1884) com os teoremas de energia de deformação. A exemplo de Maxwell, outros físicos e matemáticos também se ocuparam dos fundamentos da Mecânica dos Sólidos no século XIX, como Lagrange (1763-1813), Young (1773-1829), Poisson (1781-1840), Cauchy (1789-1857) e Kirchhoff (1824-1887). O matemático August Ritter (1826-1908), da escola Politécnica de Hannover (hoje Universidade de Hannover), viabilizou, na segunda metade do século XIX, métodos de análise para as já mencionadas pontes em treliças metálicas[3]. Sua cadeira existe até hoje com o nome de Mecânica das Construções Civis e Computacional. Por outro lado, no final do século XIX, contribuições mais técnicas vieram de engenheiros alemães como Engesser (1848–1931), Mohr (1835-1918), Müller-Breslau (1851-1925) e Wöhler (1819-1914), levando à formação da disciplina denominada na época de Resistência dos Materiais. A premissa básica da Resistência dos Materiais era que a determinação das tensões nas estruturas era suficiente para um bom dimensionamento.

A "École des Ponts et Chaussées" havia sido fundada em 1747 para a formação científica dos oficiais do exército francês, que também se ocupavam da construção pelo estado francês de pontes e obras enterradas. Cabe aqui comentar que, desde o Império Romano até o século XVIII, a profissão de engenheiro estava ligada à atividade militar, sendo muitas vezes considerada uma das armas do exército e da marinha. A construção, hoje dita civil, era tocada basicamente por artesãos e arquitetos, cabendo aos engenheiros a tarefa de construir fortificações e pontes. É também interessante comentar que a palavra engenheiro vem do latim "ingenium", através do francês antigo "ingenieure", significando fazer com o espírito, ou seja, fazer com razão e habilidade, enquanto que a palavra arquiteto vem do grego "architekton", significando operário-chefe, ou mestre-de-obras.

Em 1775, é fundada a "École Polytechnique" de Paris, a qual, embora seja uma escola militar, passa também a formar Engenheiros Civis, tornando-se paradigma para diversas escolas técnicas em todo o mundo. Logo após, em Troy, Nova York, é fundada a primeira Escola Politécnica do continente americano. A partir do início do século XIX, elas se espalham por toda a Europa.

A primeira escola de engenharia brasileira é fundada no Rio de Janeiro em 1810, por D. João VI, com o nome de Academia Real Militar. Dela é desmembrada, em 1874, a famosa Escola Politécnica do Rio de Janeiro, "alma mater" das Escolas de Engenharia do Brasil e que foi instrumento importantíssimo para mitigar o bacharelismo vigente até então nos centros de poder brasileiros. Ela foi inspiração para a fundação da Escola de Minas de Ouro Preto em 1876, das Escolas Politécnicas da Bahia (1887) e de São Paulo (1893), do Mackenzie College em São Paulo (1896) e das Escolas de Engenharia do Recife (1896) e de Porto Alegre (1897). Adotando diversos nomes no decorrer do século XX, acabou por ser incorporada à Universidade Federal do Rio de Janeiro.

A primeira Escola Politécnica alemã (Polytechnikum) é fundada em 1825 em Karlsruhe, tendo também a co-irmã de Paris como inspiração. Da mesma época é a Escola Politécnica de Zurique, na Suíça, hoje conhecida como ETH (Eidgenössische Technische Hochschule Zürich). Estas duas, serviram de modelo a Francisco de Paula Souza na fundação da Escola Politécnica de São Paulo em 1893, o que muito contribuiu para a industrialização da cidade. Em 1934, a Escola Politécnica de São Paulo foi incorporada à recém criada Universidade de São Paulo.

Na Alemanha, as Escolas Politécnicas mais importantes, como a de Stuttgart, passaram a ter a denominação de Escolas Técnicas Superiores (TH), deixando o termo escola politécnica para escolas técnicas de menor importância. A partir da década de 50, muitas das Escolas Técnicas Superiores passaram a ser denominadas Universidades Técnicas ou, simplesmente, Universidades.

[3] A. Ritter, "Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach-und Brücken-Konstruktionen", Rümpler, Hannover, 1873.

Figura 1.10: Pontes Pênseis do século XIX

a) Ponte sobre o estreito de Menai (1816); b) Brooklin Bridge em Nova York (1883)

Das estruturas metálicas, as pontes suspensas destacam-se por vencer os maiores vãos. Conhecidas há mais de 2000 anos na China, utilizando cordas, elas se desenvolveram após a Revolução Industrial a partir de estruturas suspensas por correntes feitas de elementos forjados, passaram a ser executadas em cadeias de barras, como a Ponte Hercílio Luz de Florianópolis e, terminaram, nos dias de hoje por serem quase que exclusivamente executadas com o auxílio de cabos de aço. O país que mais contribuiu para o desenvolvimento de pontes suspensas por cabos, ou simplesmente, pontes pênseis, foram os Estados Unidos. Na Figura 1.10 vê-se duas notáveis obras do século XIX: a ponte em correntes sobre o estreito de Menai, Inglaterra, de Thomas Telford, construída de 1816 a 1826 e a maravilhosa Brooklin Bridge em Nova York, de J. A. & W. A. Roebling, construída de 1870 a 1883.

Figura 1.11: Golden Gate Bridge em São Francisco

Na Figura 1.11 está a famosa Golden Gate em São Francisco, que deteve brevemente o recorde de maior vão principal em pontes. Na Figura 1.12 estão as duas das maiores pontes pênseis já construídas: a ponte sobre a entrada do porto de NovaYork, chamada de Verrazano Narrows, terminada em 1964, e a Ponte Akashi-Kaikyo no Japão, de quase 2.000 m de vão central, o recorde mundial, construída de 1993 a 1998. Na Figura 1.13, vê-se a Ponte 25 de Abril sobre o Tejo em Lisboa, inaugurada em 1972, e que, em 1998 recebeu cabos adicionais para permitir a passagem do trem metropolitano sob o tabuleiro rodoviário.

Figura 1.12: Pontes Pênseis do século XX

Verrazano Narrows, Nova York (1964); b) Ponte Akashi-Kaikyo (1990)

Hoje, planeja-se a superação dos estreitos de Messina (3 km) e de Gibraltar (11 km) por meio de pontes que combinam cabos estaiados com cabos pênseis.

Figura 1.13: Ponte 25 de Abril sobre o Tejo em Lisboa (1972)

Na tabela a seguir expõem-se alguns dados sobre pontes suspensas que podem ser de interesse.

data	Ponte suspensa	Vão principal (m)
1796	Primeira ponte suspensa moderna (correntes) de J. Finley	21
1816-26	Ponte de correntes no Estreito de Menai de Th. Telford	127
1816	Primeira ponte pênsil nos EUA	124
1832-34	Grand Pont de Friburgo, Suíça, de J. Chaley	273
1870-83	Brooklyn Bridge em Nova Iorque de J. A. & W. A. Roebling	486
1929-32	George Washington Bridge em Nova Iorque de O. H. Ammann	1067
1933-35	Golden Gate Bridge em São Francisco de J. B. Strauss	1280
1964	Verrazano Narrows em Nova York	1660
1993-98	Ponte Akashi-Kaikyo no Japão	1990
planejada	Ponte sobre o Estreito de Messina	3300
planejada	Ponte sobre o Estreito de Gibraltar	3 x 3500

Figura 1.14: Ponte de Stromsund

Desde 1950, vãos médios a moderadamente grandes passaram a ser vencidos por pontes suspensas por cabos retos (pontes estaiadas). Em 1955 a primeira ponte moderna deste tipo foi executada na Suécia (Figura 1.14) pelo eminente engenheiro alemão Dischinger (1887-1953). Em 1957 foi executada a ponte estaiada sobre o Reno, ao norte de Düsseldorf, com um vão principal de 260 m. Em 1995 foi erguida a Ponte da Normandia no Havre com 865 m de vão principal. A primeira ponte estaiada brasileira é executada em 2000 sobre o Rio Pinheiros, em São Paulo, e contém uma estação do trem metropolitano.

As primeiras pontes em viga de alma cheia, a ponte de Conway (122 m), mostrada na Figura 1.15a e a Ponte Britannia (140 m), foram completadas por W. Fairbairn e R. Stephenson em 1847 e 1850, respectivamente. Elas foram percussoras das pontes de seção celular que se tornaram, nas últimas décadas, o tipo padrão de pontes de aço e de concreto protendido (Figura 1.15b) em todo o mundo.

Figura 1.15: Pontes em viga caixão

a) Ponte de Conway (1847); b) Ponte de Twinberg, Áustria, (1987)

Muitas pontes expressivas, várias delas suspensas, ruíram por ruptura frágil, por fadiga dos materiais, por flambagem de elementos estruturais insuficientemente enrijecidos, por ressonância causada pela marcha de soldados, por instabilidade aerodinâmica (Figura 1.16) ou por outros fenômenos subestimados. Estes fracassos levaram invariavelmente a uma intensificação da atividade de pesquisa e, posteriormente, a um maior desenvolvimento tecnológico.

Figura 1.16: Desabamento da Tacoma Narrows Bridge (1940)

A construção metálica impôs-se de forma mais vagarosa no setor de edificações, embora, já no começo do século XIX, grandiosas estruturas, principalmente de galpões, tenham sido executadas (Figura 1.17). Inicialmente elas eram compostas de barras de ferro fundido e, depois, de ferro forjado e aço laminado.

Figura 1.17: Estruturas de aço na Paris do século XIX

a) Cúpula do "Halle au Blé" (1813); b) "Palais des Machines" (1889)

Despertou muita admiração no século XIX, a construção do "Crystal Palace" (Figura 1.18) de Londres por Joseph Paxton, em 1851, e da Torre Eiffel para a Exposição Mundial de Paris de 1889. Em Stuttgart, as estufas do Jardim Botânico Wilhelma, de 1842-53, são também um exemplo deste período. Por toda a Europa, a nova linguagem arquitetônica das construções metálicas, com vastas áreas envidraçadas, passou a concorrer fortemente com as tradicionais construções em alvenaria principalmente em estações ferroviárias, estufas, galerias comerciais, mercados e galpões de exposição.

Figura 1.18: Crystal Palace, Londres (1851)

Desde o final do século XIX, desenvolveu-se, principalmente nos Estados Unidos, a construção de edifícios altos, os chamados arranha-céus. Em 1930, a estrutura em aço do "Empire State Building" (Figura 1.23a), com 102 andares, foi levantada em Nova York em apenas seis meses.

Em 1972, as torres gêmeas do "World Trade Center" de Nova York, com 110 andares, foram inauguradas e permaneceram por pouco tempo como os edifícios mais altos do mundo. Em 1974 a "Sears Tower" em Chicago (Figura 1.23b), também em estrutura de aço, atingiu o recorde de 422 m de altura.

Figura 1.19: Arranha-céus americanos

a) Empire State Building (1930); b) Sears Tower (1974)

Esta altura foi superada na década de 90 pelas torres gêmeas "Petronas Towers" (Figura 1.20) com 452 m em Kuala Lumpur na Malásia, desta vez em estrutura mista em aço e concreto e com a ajuda de torres de comunicação em seu topo. Existem projetos para edifícios ainda mais altos na China. No entanto, após o ataque terrorista contra o "World Trade Center" de Nova York, em 11 de setembro de 2001, a segurança de edifícios muito altos foi colocada em questionamento.

Desde o começo do século XX, as estruturas de aço passaram a ter a concorrência das estruturas de concreto armado. Depois da Segunda Guerra Mundial, o concreto protendido juntou-se a esta concorrência, vencendo-a quase que completamente no segmento de pontes de pequeno e médio vão. A utilização de elementos estruturais mistos, compostos de aço e de concreto, principalmente em lajes, abriu um espaço amplo para as obras de edifícios em todo mundo. Deve-se esperar desta combinação um grande desenvolvimento nos próximos anos no Brasil.

Figura 1.20: Petronas Twin Towers, Malásia

Depois que a questão da produção em massa do aço foi resolvida na segunda metade do século XIX, os desenvolvimentos se orientaram primordialmente para a produção de aços de melhor qualidade, com maior resistência, tenacidade, soldabilidade e resistência à corrosão. Desde a década de 60 são produzidos aços para fins estruturais resistentes a corrosão. Embora o seu uso demande um pouco de cuidado, eles contribuíram para alargar o campo de utilização das estruturas de aço. Aços inoxidáveis e alumínio, devido aos seus altos custos, são utilizados em casos muito especiais, quando materiais incorrosíveis são necessários e quando, no caso do alumínio, a leveza é absolutamente necessária.

Pouco a pouco, em meados do século XX, a ligação por rebites dos elementos em aço foi substituída por soldas e parafusos. As ligações por parafusos apresentam sempre uma certa flexibilidade e permitem escorregamentos devidos às folgas de montagem. Ligações mais rígidas, com a ajuda de parafusos de alta resistência, têm sido observadas com maior freqüência nos últimos anos. Já as ligações com cola podem ser uma boa surpresa para os próximos anos.

Desde a construção da cobertura do Parque Olímpico de Munique em 1972, o ferro fundido, agora elaborado de forma a torná-lo dúctil, voltou a ser utilizado, principalmente em nós complexos de estruturas modernas de alta tecnologia ("high-tech structures").

2.1.4 Estruturas de concreto armado e protendido

Concretos com cal hidráulica ou com cimento pozolânico (de origem vulcânica) já eram conhecidos dos romanos há mais de 2000 anos (*Opus Caementitium*). As descobertas do cimento romano no ano de 1796 pelo inglês J. Parker e do cimento Portland pelo francês J. Aspdin em 1824 introduziram um novo desenvolvimento nas construções de concreto.

Em meados do século XIX, na França, introduziram-se agregados de pedra britada no concreto pela primeira vez. Em 1855 J. L. Lambot construiu um barco de argamassa de cimento reforçada por ferro. Em 1861 J. Monier produziu floreiras de concreto reforçado com arames de aço (Monier-Beton). Em 1861 F. Coignet publicou os primeiros fundamentos para a construção com concreto armado e expôs na Exposição Mundial de Paris de 1867 vigas e tubos com o novo material.

O americano W. E. Ward construiu, em 1873, em Nova Iorque, uma mansão de concreto armado que existe até hoje (Figura 1.21). Outros importantes pioneiros foram T. Hyatt, F. Hennebique, G. A. Wayss, M. Koenen e C. W. F. Doehring.

A Igreja de São Marcos em Stuttgart, inaugurada em 1908, é a primeira igreja de concreto armado do mundo. O Mercado Central de Stuttgart de 1912, que sobreviveu aos bombardeios da Segunda Guerra Mundial, é um exemplo precoce de obra puramente em concreto armado na Alemanha.

Figura 1.21: Wards Castle, estado de Nova York

Emil Mörsch (1872-1950), Professor da Escola Técnica Superior de Stuttgart de 1916 a 1948, recebeu em 1902 da firma Wayss und Freytag a tarefa de criar uma base científica para o projeto de estruturas de concreto armado. Os resultados de seu trabalho teórico e de seus ensaios experimentais foram publicados na forma de uma coleção de livros e constituem-se na primeira obra fundamental para o dimensionamento de estruturas de concreto. Herdeiros famosos da cadeira de Mörsch em Stuttgart foram os Professores F. Leonhardt e J. Schlaich.

Figura 1.22: Cascas de concreto

a) Casca em Xochimilco (Candela); b) Teatro em Grötzingen (Isler);

c) Ópera de Sydney (Utzon); d) NovoMuseu em Curitiba (Niemeyer)

Concreto é o material estrutural mais produzido em todo o mundo. É difícil encontrar hoje uma obra onde ele não tenha sido utilizado, mesmo que somente nas fundações ou em lajes. No Brasil, sua

presença é marcante em nossas cidades e estradas. Infelizmente, às vezes, ele é utilizado como um mau símbolo do péssimo urbanismo brasileiro. No entanto, mais que qualquer outro material estrutural, o concreto não tem formas pré-definidas, podendo ser plasticamente moldado para aproveitar ao máximo as características do material e para dar belas formas arquitetônicas às construções, como nos quatro exemplos da Figura 1.22, nos quais cascas de concreto destacam-se pelo arrojo e pela esbelteza. Como o Homem progrediu desde o Panteão de Roma! Neste aspecto, o Brasil, principalmente nas quatro décadas finais do século XX, tornou-se um exemplo da arte de combinar as estruturas de concreto com a arquitetura, como, por exemplo, nos belos edifícios de Brasília.

A Figura 1.23 ilustra, através de uma simples ponte de pedestres, como a forma livre das estruturas de concreto possibilita uma concepção otimizada quanto ao aspecto e funcionalidade estrutural. Nesta ponte, no lugar de barras de aço para reforçar o concreto à tração, foram utilizadas, pela primeira vez, barras de concreto protendido de alta resistência. As escoras inclinadas foram executadas em concreto de alta resistência, com resistência à compressão da ordem de 120 N/mm^2.

Figura 1.23: Ponte sobre o Rio Gera em Rudisleben, Turíngia

Desde a Segunda Guerra Mundial, novas tecnologias de construção em concreto estrutural foram desenvolvidas que contribuíram em muito para a execução econômica de obras significativas. Aqui algumas palavras-chave: formas lisas, formas pré-fabricadas e reaproveitáveis, formas deslizantes, concreto bombeado, concreto usinado, concreto projetado, concreto sub-aquático, injeção de argamassas e resinas, concreto reforçado por fibras, estacas escavadas, protensão com aderência posterior, protensão com aderência inicial, protensão sem aderência, construção por etapas, construção empurrada, construção por aduelas sucessivas, elementos estruturais pré-fabricados, lajes extrudadas, lajes-painel, super-plastificantes, etc. Os últimos desenvolvimentos apontam para concretos de alta resistência, concretos reforçados por fibras, concretos auto-adensáveis e robôs específicos para obras civis de concreto. Nenhum outro material estrutural conseguiu em tão pouco tempo aumentar a sua qualidade estrutural como o concreto. Hoje, fala-se naturalmente de concretos com resistência a compressão de 250 N/mm^2, quando há vinte anos o natural era menos de um décimo disso. Longe de ser um material antigo, o concreto é hoje muito mais um material de moderna tecnologia.

A grande diferença de deformabilidade entre o concreto e o aço inspirou o americano Jackson, em 1886, e o berlinense Doehring, em 1888, a patentearem sistemas com barras de aço pré-tracionadas por meio de porcas. Assim o concreto era submetido inicialmente a uma tensão de compressão e as tensões de tração provocadas pelos momentos fletores levavam a formação de fissuras muito mais tarde. Este tipo de concreto é atualmente denominado concreto protendido. Doehring, Koenen e outros experimentaram este processo na prática, mas falharam, pois ainda não se sabia que o concreto apresenta deformações deferidas no tempo quando submetido à compressão duradoura, fenômeno conhecido como fluência, de tal forma que a pré-compressão era totalmente perdida algum

tempo depois. Somente em 1928, E. Freyssinet desenvolveu um processo com o emprego de aços de alta resistência que possibilitou manter a protensão mesmo com a ocorrência da fluência do concreto.

O concreto protendido impôs-se após a Segunda Guerra Mundial, invadindo segmentos onde a construção de aço predominava. Ele concorre hoje com o aço mesmo em pontes de grande vão, em edifícios grandes e em estruturas esbeltas.

2.1.5 Estruturas mistas e novos materiais

O concreto armado e o concreto protendido são a combinação apropriada de dois materiais diferentes. Além disso, como já mencionado, podem-se combinar perfis de aço, ou painéis corrugados de aço, com lajes de concreto na confecção de pavimentos de edifícios. Muitos edifícios são construídos com alvenaria e lajes de concreto armado. Pontes estaiadas são freqüentemente construídas com tabuleiros de concreto protendido e cabos de aço de alta resistência. Outras combinações são, no entanto, possíveis e geram uma classe de estruturas chamada de mistas. Hoje, um Engenheiro Civil deve estar preparado para combinar os materiais estruturais sem preconceito, otimizando o seu emprego nos projetos. Infelizmente, a formação e a experiência especializadas dos engenheiros, das firmas de engenharia e dos operários, não somente no Brasil, têm limitado a construção de estruturas mistas. Diversas Escolas de Engenharia têm reformado seus currículos nos últimos anos, tentando eliminar esta falha educacional. As normas técnicas européias, os "Eurocodes", estão sendo elaborados, procurando estabelecer uma unidade de projeto para os diversos materiais e estruturas. Não deve mais haver engenheiros estruturais de apenas um sistema estrutural e um material estrutural.

A combinação de materiais tradicionais com novos materiais, como as membranas têxteis de PVC e Teflon, de polímeros reforçados por fibras e de vidro, abriu uma avenida de possibilidades para a concepção de novos sistemas estruturais, conhecidos como estruturas de alta tecnologia ("high-tech structures"). Estas estruturas procuram combinar materiais novos e tradicionais de forma otimizada e de forma ecológica, conservando energia, permitindo que a luz natural chegue até os locais de permanência humana e contendo a maior massa possível de materiais recicláveis. Um dos pais espirituais destas estruturas é o Prof. Frei Otto da Universidade de Stuttgart, conhecido pela criação das coberturas do Parque Olímpico de Munique em 1972. Hoje diversas estruturas seguem esta tendência (Figura 1.24).

Figura 1.24: Ginásio de esportes de inverno, Munique

Projeto de Ackermann, Schlaich & Bergermann (1983)

Em 2000, as antigas cadeiras do Prof. F. Otto de estruturas leves e do Prof. E. Mörsch de concreto estrutural, mais as cadeiras de estruturas metálicas e de madeiras, foram fundidas em uma só, denominada Concepção e Construção de Sistemas Estruturais.

Na Figura 1.25 são vistos quatro exemplos de estruturas de alta tecnologia existentes no Parque das Nações em Lisboa. No alto, à esquerda a estrutura atirantada ("tenso-estrutura") que cobre a entrada do pavilhão de exposições, composta por escoras metálicas, cabos e membrana têxtil tracionados. No alto, à direita, a belíssima estação Oriente do metropolitano de Lisboa, projeto de Calatrava, em aço, vidro e concreto. Embaixo, à esquerda, uma membrana tracionada de concreto armado. Finalmente, no canto inferior direito, o centro comercial Vasco da Gama em arcos intertravados de aço cobertos de vidro, sobre os quais corre permanentemente água de modo a minimizar o consumo de energia pelo ar-condicionado.

Figura 1.25: Construções "high-tech" da EXPO 98, Lisboa, 1998

2.2 Propriedades dos Materiais Estruturais Civis

Madeira natural é apropriada somente para a confecção de elementos estruturais lineares (barras) com dimensões limitadas pelas dimensões da árvore original. Em estruturas, são utilizadas na forma de vigas, pontaletes, caibros e ripas com seção transversal retangular. Com a técnica de colagem de barras de madeira natural, é possível se construir elementos estruturais lineares retos ou curvos de qualquer comprimento e com qualquer seção transversal. Existem também chapas de madeira industrializada, como compensados e aglomerados, que requerem elementos de ligação especial, na maioria das vezes metálicos.

Por questões de facilidade de produção e de economia, os elementos estruturais de aço são utilizados principalmente na forma de perfis e chapas laminados ou conformados a frio. A perfilhação aumenta a rigidez e a resistência à flexão em relação a seções retangulares com mesma área e facilita a ligação entre barras com solda ou parafusos. Com aço fundido podem ser realizadas peças de formas tridimensionais complexas, mas com alto custo. Por isso só deve ser utilizado em casos especiais ou quando a repetição de muitos elementos iguais torna-o competitivo.

Em contraste com a madeira e o aço laminado, o concreto é plástico (palavra com origem no grego, significando que pode ter qualquer forma, como em artes plásticas). Não vem em partes nem precisa de ligações. Pode ser moldado em qualquer forma, seja em barras, placas, cascas ou blocos. É claro que, por razões de produção e de economia, fôrmas planas com ângulos retos predominam. Em estruturas de concreto podem ser combinados monoliticamente de infinitas maneiras escoras, pilares, vigas, paredes, lajes, blocos, etc. Muitas vezes membros estruturais pertencem simultaneamente a diversos elementos, como a mesa da viga que pertence à laje. Outras vezes, elementos não-estruturais como painéis de fechamento, tem a missão de transferir o carregamento devido ao vento para os elementos estruturais.

O Engenheiro de Estruturas deve almejar a combinação dos materiais de tal forma que eles sejam utilizados nas suas funções mais apropriadas e onde suas deficiências tenham um papel secundário. Muitas vezes isto leva a estruturas mistas, como por exemplo, edifícios com pilares e vigas metálicos, lajes de concreto armado e paredes de alvenaria. Outras vezes isto leva à combinação de materiais em uma seção transversal, denominadas de materiais compostos ou elementos estruturais mistos. O concreto armado é um material composto, assim como resinas reforçadas com fibras de poliamida ("kevlar") são materiais compostos de alta tecnologia utilizados em segmentos não-civis. O concreto armado talvez seja o material composto mais utilizado no mundo. Já as vigas formadas pela combinação de perfis laminados ou soldados de aço com mesas em laje de concreto armado e as lajes moldadas sobre uma chapa trapezoidal de aço, que lhe serve de fôrma e armação, são elementos estruturais mistos.

Quando se compara o material concreto com os outros materiais estruturais, imediatamente destaca-se a grande diferença entre suas resistências à compressão e à tração. Esta é aproximadamente um décimo daquela. Enquanto que a compressão pode ser suportada pelo concreto de forma econômica, membros tracionados ou fletidos de concreto simples não têm sentido. A pequena resistência à tração do concreto é facilmente ultrapassada por tensões provocadas pela restrição à retração do concreto, de modo que muitas vezes ela não fica disponível para suportar o carregamento atuante na estrutura. Se construíssemos as estruturas de concreto de forma a não termos tensões de tração, estaríamos submetidos às mesmas limitações das estruturas em alvenaria.

As formas atuais das estruturas de concreto somente se tornaram possíveis através da "simbiose" do concreto e do aço. O princípio do concreto estrutural é essencialmente substituir ou reforçar o concreto tracionado pelo aço. Existem para isso diversas possibilidades. Pode-se substituir totalmente a zona tracionada de uma viga por um perfil de aço, como nos elementos compostos. A aderência dos dois materiais, neste caso, pode ser garantida por pinos soldados ao perfil de aço. Pode-se fundir uma laje de concreto sobre uma chapa corrugada de aço, que lhe serve de fôrma. A aderência entre o concreto e o aço é garantida pelo corrugamento. Pode-se, como no concreto armado convencional, distribuir barras ou telas de aço principalmente nas zonas tracionadas do concreto. Em vigas, as barras são colocadas principalmente ao logo das bordas tracionadas pelo momento fletor. As barras desta assim chamada armadura de aço precisam ser colocadas a uma certa distância da superfície externa das peças para se evitar a sua corrosão por agentes externos, como o cloro, típico de ambientes marinhos. A armadura longitudinal é complementada por estribos ou armadura transversal que é importante para resistir aos esforços transversais como o cortante, e por uma armadura construtiva importante para a montagem e para suportar efeitos não considerados nos cálculos. Quando a zona do concreto sob tração fissura, o aço ali colocado assume as forças de tração. A transferência das forças entre a armadura e o concreto dá-se por aderência na superfície de contato entre os dois materiais, o que depende das condições e geometria destas superfícies. O aço alonga-se mais na tração que o concreto, o que provoca uma certa abertura nas fissuras que se formam no concreto. Esta abertura pode ser controlada por uma boa distribuição e detalhamento da armadura, de modo que as fissuras fiquem tão finas que sejam inofensivas. No entanto, elas são vistas, muitas vezes, como uma desvantagem do concreto armado.

Pode-se também utilizar a idéia de se pré-tracionar as barras longitudinais de aço contra o próprio concreto, criando-lhe um estado de pré-compressão, que lhe é favorável durante o carregamento por outras ações. Isto pode ser realizado, por exemplo, por uma barra de aço de alta resistência embutida em um tubo, ou bainha, colocado antes da concretagem. O estado de pré-tração do aço seria então alcançado, tracionando-se a barra com macacos, ou mesmo com porcas, contra placas de aço de apoio colocadas nas extremidades da viga de concreto. Posteriormente, mas não necessariamente, a folga entre a barra e a bainha pode ser preenchida por argamassa, de modo a dar ao elemento estrutural um comportamento sob carregamento mais parecido com o concreto armado. A força longitudinal excêntrica provocada pela pré-tração do aço atua então de forma contrária ao estado de tensões provocado pelo carregamento transversal. O concreto então se encontra num estado de pré-compressão e os materiais, que compõem a viga, em um estado de pré-tensão. Uma denominação possível para este elemento estrutural seria então viga pré-tensionada, uma vez que os dois materiais assim se encontram. Para o material concreto a terminologia concreto pré-comprimido seria adequada. No entanto, consagrou-se a terminologia de concreto protendido para este material e para os decorrentes elementos estruturais e estruturas. Como o prefixo "pro" significa favorável, pode-se interpretar esta denominação como estrutura pré-tensionada de forma favorável aos materiais que a compõem.

Na tabela abaixo, algumas das vantagens e desvantagens dos materiais estruturais considerados até o momento são apresentadas de forma resumida.

Materiais Estruturais Civis		
material	**vantagens**	**desvantagens**
alvenaria	Tecnologia simples; montagem e aderência entre materiais simples; estruturas não necessitam fôrmas; possui boas propriedades térmicas, acústicas e higroscópicas; é incombustível e resistente ao fogo; tem bom aspecto natural.	Tem baixas resistências, em particular, à tração; apropriada apenas para paredes, arcos e abóbadas; exige muitas vezes revestimentos e tratamentos superficiais caros; exige o uso intensivo de mão-de -obra.
madeira	É natural, fácil de trabalhar e leve em relação à resistência; possui boas propriedades térmicas e acústicas; tem bom aspecto natural.	É combustível, apodrece ou é atacado por pragas, é muito deformável, inclusive por efeito de variações de umidade e temperatura; nem sempre tem origem ecologicamente correta.
aço	Tem alta resistência, mesmo em relação ao seu peso; tem boa ductilidade e tenacidade; os elementos estruturais podem ser industrializados e montados na obra com facilidade; montagem é simples, com parafusos ou com solda; a obra é desmontável e reciclável; reformas e expansões são facilitadas; possibilitam estruturas esbeltas.	Pode ter ruptura frágil, especialmente em aços de alta resistência, ou em aços submetidos a baixas temperaturas, ou a ciclos de tensão ou a más soldagens; são corrosíveis, necessitam tratamento superficial; têm alta condutibilidade térmica; perdem resistência em altas temperaturas, deve ser protegido frente a incêndios; leva a estruturas mais sujeitas a instabilidades.
concreto estrutural	Pode-se dar qualquer forma, a armadura pode se adaptar ao caminhamento dos esforços; estruturas com boa resistência, e, se bem dimensionada, boa ductilidade; é incombustível, tem boa resistência ao fogo, à abrasão e ao intemperismo; se forem bem executadas, necessitam baixa manutenção; material econômico e de tecnologia simples.	É pesado; oferece pouco conforto térmico; fôrmas e cimbramentos podem ser muito caros; reformas e demolições são caras; se mal projetado e executado pode ser frágil, ficar demasiadamente fissurado e apresentar corrosão precoce das armaduras; possui mau aspecto natural, exigindo muito boa arquitetura; industrialização limitada.

2.3 O Projeto Estrutural Civil

O trabalho do Engenheiro Civil no projeto estrutural é dividido tradicionalmente em quatro fases: (i) concepção, (ii) modelação estrutural, (iii) dimensionamento e (iv) detalhamento.

A concepção representa a fase mais importante, mais criativa e mais difícil do projeto e requer, via de regra, muita experiência do engenheiro. Erros básicos de concepção dificilmente podem ser corrigidos pelas fases seguintes. Acidentes ocorrem, na maioria das vezes, por falhas originadas nesta fase. Na concepção, o engenheiro deve pensar na funcionalidade estrutural, na economia, na estética, no processo e na facilidade de execução, no prazo de execução, nas interferências com outros aspectos da obra, na escolha dos materiais, na escolha do sistema estrutural e na facilidade de dimensionamento. É nesta fase que o engenheiro tem uma grande interação com o arquiteto ou com a arquitetura da obra.

Em obras como casas e edifícios de pequeno a médio porte, a arquitetura é praticamente pré-determinada pelo arquiteto, cabendo ao engenheiro civil conceber uma estrutura que atenda os requisitos estéticos, econômicos e comerciais. Neste tipo de obra a estrutura custa uma fração da obra, da ordem de 10 a 30%, sendo muito comum estar parcialmente ou totalmente oculta. Já em obras de grande porte, a estrutura determina a forma arquitetônica da obra e é seu principal custo. É o caso de edifícios de grande porte, de pontes e outras obras públicas. Nestas obras o engenheiro interage intensamente com a arquitetura da obra e a estrutura fica sempre muito visível.

A modelação estrutural visa a determinação dos esforços de dimensionamento e constitui-se em uma fase basicamente físico-matemática que era realizada manualmente, mas que, hoje, é cada vez mais realizada computacionalmente. É nesta fase que o engenheiro estabelece as ações sobre a estrutura que devem ser consideradas, escolhe quais são os esquemas estruturais necessários para a análise, decide quais simplificações geométricas e físicas devem ser feitas, especifica quais os tipos de simulação que devem ser executados e determina os esforços necessários ao dimensionamento da estrutura.

Como ilustração, considere-se um edifício residencial convencional. As principais ações a serem consideradas são as devidas ao peso próprio do edifício, às sobrecargas de utilização das lajes e as devidas ao vento. As duas primeiras ações são verticais e podem ser simuladas em análises estáticas sobre vigas contínuas ou vigas simples engastadas no núcleo do edifício. É claro que uma análise tridimensional envolvendo toda a estrutura poderia ser elaborada, principalmente com os programas computacionais hoje disponíveis. No entanto, ela não seria necessariamente mais realista, porque os esforços devidos ao peso próprio não são introduzidos repentinamente na estrutura, mas sim pouco a pouco durante as etapas de construção. Por isso, o engenheiro deve sempre ter em mente que uma modelação de maior porte nem sempre é mais realista que uma modelação aparentemente simplificada. Para o vento, podem-se modelar os pilares e vigas como elementos rígidos que transmitem os esforços para o núcleo do edifício, que trabalha como uma viga em balanço engastada na fundação.

Na terceira fase as dimensões da estrutura são determinadas de forma a assegurar que a construção seja confiável. Isto significa garantir que a estrutura tenha uma probabilidade baixa de não cumprir suas funções no período de sua vida útil. É neste momento que as normas técnicas aplicáveis devem ser obedecidas, uma vez que o nível de segurança das obras deve ser estabelecido pela Sociedade Civil através dos órgãos para isso constituídos. Em muitos países, as normas técnicas são obrigatórias e têm força de lei.

O detalhamento é a última fase e engloba toda a complementação necessária ao projeto estrutural, que não foi realizada por ocasião do dimensionamento. Muitas decisões aqui são tomadas baseadas na experiência do projetista e em normas técnicas. Falhas de detalhamento são responsáveis por muitos acidentes. Ele deve possibilitar a representação gráfica da estrutura, de modo a permitir a sua fabricação e execução.

Por ocasião da concepção, alguns cálculos e dimensionamentos preliminares precisam ser feitos para se definir os elementos estruturais e justificar diversas decisões. Como na fase de modelação as dimensões também são necessárias, percebe-se que as fases acima listadas não são seqüenciais, mas repetidas ciclicamente até a convergência em um projeto final.

Atualmente a fase de modelação e dimensionamento têm sido cada vez mais executada com o auxílio de computadores. O mesmo tem acontecido com o detalhamento e a representação gráfica do projeto estrutural. Hoje, a maioria dos escritórios de projeto estrutural realiza boa parte da modelação, do dimensionamento e detalhamento com o auxílio de computadores. É o chamado Projeto Auxiliado por Computadores. Mesmo assim, para se manter o trabalho de modelação e dimensionamento dentro de uma escala razoável, diversas decisões de modelação e de simulação são necessárias. Esta é hoje a parte mais criativa das fases de modelação e dimensionamento, e a que talvez mais exija preparo teórico dos engenheiros de projeto.

Hoje, em obras mais convencionais, um único engenheiro pode rapidamente executar a modelação, o dimensionamento, o detalhamento e a representação gráfica final da estrutura. Obras especiais ou excepcionais necessitam ainda um maior desenvolvimento dos sistemas. Acreditamos, no entanto, que, em um prazo não maior que dez anos, estas três fases encontrar-se-ão reunidas em um mesmo sistema computacional para a grande maioria das obras civis. Embora este fato possa significar uma redução do mercado de trabalho do engenheiro de projeto, por outro lado, ele, ao reduzir os custos de projeto, torna possível realizar projetos estruturais mesmo para obras de pequeno porte. O uso de programas de computador demanda um preparo cada vez melhor do ponto de vista conceitual dos engenheiros de projeto. Alguns países estudam, ou já implementaram parcialmente, algum sistema de controle de qualidade do pessoal envolvido com o projeto estrutural, com a execução de exames de capacitação periódicas e a certificação de profissionais.

A incorporação em sistemas computacionais dos aspectos da concepção que possam ser objetivamente quantificados é objeto de pesquisas e encontra-se em experimentação. O verdadeiro dimensionamento de uma estrutura, e parte da concepção, consiste em otimizar os diversos aspectos de uma obra, sejam eles de ordem técnica, estética ou econômica, atendendo os requisitos de confiabilidade que a Sociedade Civil lhe impõe. Por exemplo, dimensionar uma viga contínua de concreto armado significa encontrar as dimensões da seção transversal e a distribuição de armadura que, satisfazendo as normas técnicas em termos de confiabilidade e os requisitos estéticos e construtivos especificados inicialmente, levem à maior economia. Economia esta que não é apenas equacionada pelo custo unitário dos materiais, mas que engloba muitos outros aspectos executivos. Em matemática é um problema bastante complexo, pois boa parte das variáveis, como bitolas das barras de aço, espaçamentos, dimensões das fôrmas, propriedades mecânicas dos materiais, número de operários e de equipamentos necessários à execução, prazo de execução, interação com outros aspectos da obra (p.ex.: posição dos pilares na garagem subterrânea ou largura dos blocos de alvenaria) são discretas e não contínuas.

3 Estruturas mecânicas

Após a Revolução Industrial as máquinas ganharam grande importância na sociedade humana. Toda máquina possui uma estrutura responsável por transmitir a ação dos esforços aos quais ela é submetida durante a sua operação. Os veículos, como os automóveis, ônibus, caminhões, trens, aviões e navios de todos os tipos, possuem uma estrutura. Máquinas como motores, turbinas, geradores, guindastes, pontes rolantes, vasos de pressão, caldeiras, aparelhos domésticos, etc. também sempre possuem uma estrutura. A Figura a seguir mostra algumas estruturas da Engenharia Mecânica.

Figura 1.26: Estruturas mecânicas

2

Elementos de Álgebra Tensorial

1 Espaços Vetoriais

Na Geometria e na Física entra-se em contacto com grandezas denominadas vetores, designados por $\vec{x}$, $\vec{y}$, etc., para os quais são definidas as operações de adição, produto por um escalar, produto escalar e produto vetorial, entre outras. Neste capítulo o conceito de vetor será generalizado e novas operações serão introduzidas. Para isso, define-se a seguir o que é um espaço vetorial.

Definição 2.1: Espaços vetoriais

Chama-se *espaço vetorial* ou *linear* a todo conjunto $\mathcal{V}$, cujos elementos, denotados por $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$, são denominados *vetores*, tal que:

a) a cada par de elementos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de $\mathcal{V}$ fica associado um e só um elemento $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ de $\mathcal{V}$, denominado *soma* de $\boldsymbol{x}$ com $\boldsymbol{y}$, de modo que:

(i) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\,, \quad \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$;

(ii) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})\,, \quad \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in \mathcal{V}$;

(iii) $\exists \boldsymbol{o} \in \mathcal{V} \mid \boldsymbol{x}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{x}\,, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$;

(iv) $\exists -\boldsymbol{x} \in \mathcal{V} \mid \boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{o}\,, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$;

b) a $a \in \mathbb{R}$ e a um elemento $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$ fica associado um e só um elemento de $\mathcal{V}$, indicado por $a\boldsymbol{x}$, denominado *produto do vetor* $\boldsymbol{x}$ *pelo escalar* a , de modo que:

(i) $(a+b)\boldsymbol{x}=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}\,, \quad \forall a,b \in \mathbb{R}\,, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$;

(ii) $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}\,, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathcal{V}$;

(iii) $a(b\boldsymbol{x})=b(a\boldsymbol{x})=(ab)\boldsymbol{x}\,, \quad \forall a,b \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$;

(iv) $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}\,, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$.

Exemplos 2.1

- Espaço vetorial da Geometria Clássica: $\mathcal{V}_3$;
- Conjunto dos números reais: $\mathbb{R}$;
- Conjunto dos números complexos: $\mathbb{C}$;
- Produtos cartesianos de $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ldots \times \mathbb{R}}^{n \text{ vezes}}$, ou seja, o conjunto das *ênuplas* dadas por $(a_1, a_2, \ldots a_n)$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots n$;
- Conjunto das funções de uma variável real $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, definidas sobre um aberto de $\mathbb{R}$, indicado por $\Omega = (a,b)$, contínuas até a derivada de ordem k : $\mathcal{C}_k(a,b)$ ou $\mathcal{C}_k(\Omega)$;
- Conjunto das funções de n variáveis reais, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, contínuas até a derivada de ordem k, onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{C}_k(\Omega)$;
- Conjunto das soluções de uma equação diferencial ordinária linear homogênea de ordem k : $\mathcal{S}_{\text{h}} = \left\{ y(x) \mid a_k(x) y^{(k)} + a_{k-1}(x) y^{(k-1)} + \cdots + a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0 \right\}$.

Exercícios 2.1

- Mostre que o conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}$ das matrizes de dimensão $m \times n$, com as operações usuais de soma de matrizes e de produto de matrizes por números reais, formam um espaço vetorial;
- Mostre que o conjunto das soluções de uma equação diferencial ordinária linear homogênea de ordem k realmente forma um espaço vetorial;
- Mostre que $\mathcal{P}_n$, o conjunto dos polinômios de grau n definidos em $\mathbb{R}$, é um espaço vetorial;
- Considere o conjunto das funções contínuas no intervalo (a,b) denotado por $\mathcal{C}_0(a,b)$; defina soma de funções e produto de função por número real, e mostre que este conjunto é um espaço vetorial.

2 Espaços Afins

Na Geometria um conceito fundamental é o de ponto. Os problemas da Geometria são então formulados em um conjunto de pontos chamado de espaço geométrico. Na Geometria Plana este espaço é denominado plano geométrico. Na Geometria, a cada par ordenado de pontos geométricos fica associado um único vetor. Estes conceitos serão generalizados através da seguinte definição.

Definição 2.2: Espaço afim

Seja $\mathcal{E}$ um conjunto e $\mathcal{V}$ um espaço vetorial. $\mathcal{E}$ é chamado de *espaço afim* associado ao espaço vetorial $\mathcal{V}$ e seus elementos $A, B, \ldots$ são denominados *pontos*, se a cada par ordenado de pontos (A,B) corresponder um e só um elemento $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$, indicado por $\overrightarrow{AB}$, tal que:

a) $\overrightarrow{AA} = \boldsymbol{o}$, $\forall A \in \mathcal{E}$;

b) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$, $\forall A, B \in \mathcal{E}$;

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, $\forall A, B, C \in \mathcal{E}$;

d) Para todo $O \in \mathcal{E}$ e $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$, existe um único $X \in \mathcal{E} \mid \boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX}$.

Exemplos 2.2

a) Espaço afim da Geometria Clássica: $\mathcal{E}_3$;
b) Espaço afim da Geometria Plana: $\mathcal{E}_2$;
c) Espaço afim da Física Clássica: $\mathcal{E}_3$.

Observação 2.1

Uma vez definida uma origem em $\mathcal{E}_3$, isto é, um ponto $O \in \mathcal{E}_3$, é usual, de acordo com d) da Definição 2.2, confundir-se o vetor $\boldsymbol{x}$ com o próprio ponto X.

3 Dimensão e Base

Definição 2.3: Vetores linearmente independentes

Diz-se que os vetores $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots \boldsymbol{x}_n$ são *linearmente independentes* (LI) se

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{o} \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n \ .$$

Caso contrário, eles se dizem *linearmente dependentes* (LD).

Exemplos 2.3

- Na Geometria Plana quaisquer dois vetores não nulos e não colineares são LI.
- Em $\mathbb{R}^2$ os vetores $(1,1)$ e $(1,2)$ são LI, mas os vetores $(1,1)$ e $(2,2)$ são LD.
- Em $\mathcal{C}_0(a,b)$ os vetores $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ são LI.
- Em $\mathcal{C}_0(0,\ell)$ os vetores $\left\{1, \text{sen}\,\frac{\pi x}{\ell}, \text{sen}\,\frac{2\pi x}{\ell}, \text{sen}\,\frac{3\pi x}{\ell}, \ldots\right\}$ são LI.

Exercícios 2.2

a) Mostre que se o vetor nulo estiver contido em um conjunto de vetores então eles são LD.
b) Mostre que, em $\mathcal{M}_{2\times 2}$, as matrizes abaixo são LI

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}. \tag{2.1}$$

Definição 2.4: Dimensão de um espaço vetorial

Diz-se que um espaço vetorial $\mathcal{V}$ tem *dimensão* n finita quando nele existirem n vetores linearmente independentes e quaisquer $n+1$ vetores forem linearmente dependentes. Caso contrário, diz-se que a dimensão de $\mathcal{V}$ é infinita $(n = \infty)$.

Exemplos 2.4

a) A dimensão de $\mathcal{V}_3^2$ é 3;
b) A dimensão de $\mathbb{R}$ é 1;
c) A dimensão de $\mathbb{R}^n$ é n;
d) A dimensão de $\mathbb{C}$ é 2;
e) A dimensão de $\mathcal{C}_k(a,b)$ é ∞.

Exercícios 2.3

a) Qual é a dimensão de $\mathcal{M}_{2\times 2}$?
b) Qual é a dimensão de $\mathcal{P}_n$?

Definição 2.5: Base

Um conjunto ordenado de n vetores linearmente independentes pertencentes a um espaço vetorial $\mathcal{V}$ de dimensão finita n forma uma *base*.

Exemplos 2.5

a) Em $\mathbb{R}^2$, os vetores $(1,1)$ e $(1,2)$ formam uma base;
b) Em $\mathbb{R}^2$, $\{(1,0),(0,1)\}$ formam a chamada *base canônica*;
c) Em $\mathcal{M}_{2\times 2}$, as matrizes (2.1) formam a chamada *base canônica*.
d) Mostre que a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ estão relacionadas da seguinte forma: se $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1,2$, são os elementos da base canônica de $\mathbb{R}^2$ e $\boldsymbol{E}_{ij}$, $i,j = 1,2$, são os elementos da base canônica de $\mathcal{M}_{2\times 2}$, então $\boldsymbol{E}_{ij} = \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^T$.

Exercícios 2.4

a) Generalize o conceito de base canônica para $\mathbb{R}^n$;
b) Generalize o conceito de base canônica para $\mathcal{M}_{m\times n}$;
c) Mostre que $\left\{1, x, x^2, x^3, \ldots x^n\right\}$ formam uma base em $\mathcal{P}_n$, o espaço vetorial dos polinômios de grau n.

Observação 2.2

A partir deste momento adota-se a dimensão $n = 3$ para $\mathcal{V}$, designando-o por $\mathcal{V}_3$, pois o espaço vetorial de dimensão 3 tem importância fundamental na Mecânica. No entanto, a maioria dos resultados deste capítulo valem para n qualquer. O caso de dimensão infinita será examinado com maior detalhe posteriormente.

4 Componentes

Considere-se $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}_3$ e a base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ em $\mathcal{V}_3$. Como $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ são linearmente dependentes, pode-se escrever

$$a\boldsymbol{x} + a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{o}\ , \quad a \neq 0\ .$$

Assim, fazendo-se $x_i = -\dfrac{a_i}{a}$, $i = 1,2,3$, tem-se que

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3\ .$$

Definição 2.6: Componentes de um vetor em uma base

Seja $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}_3$ e seja $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ uma base de $\mathcal{V}_3$. Se

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i\boldsymbol{e}_i\ ,$$

então os números reais x_i, $i = 1,2,3$ recebem a denominação de *componentes* do vetor $\boldsymbol{x}$ na base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$.

Observação 2.3

As componentes x_i, $i = 1,2,3$, podem ser agrupadas em uma matriz-coluna, indicada por $[x_i]$, como abaixo

$$[x_i] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Quando não houver dúvida ou perigo de confusão quanto à base utilizada para a definição das componentes, confundir-se-á o vetor com a matriz-coluna de suas componentes, escrevendo-se

$$\boldsymbol{x} = [x_i]. \tag{2.3}$$

Muitas vezes, matrizes-colunas são chamadas de vetores, embora, a rigor, quaisquer matrizes sejam vetores.

5 Convenção da Somatória

Concebida por Einstein, a convenção da somatória retira o símbolo da somatória das expressões, aliviando a notação com componentes.

Definição 2.7: Convenção da somatória

A convenção da somatória permite escrever

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \boldsymbol{e}_i = x_i \boldsymbol{e}_i \ . \tag{2.4}$$

ou seja, a repetição de um índice numa expressão significa uma somatória neste índice de 1 até 3.

Propriedades 2.1

a) Podem-se tratar algebricamente as expressões contendo adições e multiplicações de somatórias como se elas não existissem:

$$a_i b_i + a_i c_i = a_i (b_i + c_i).$$

b) O índice sobre o qual é efetuada a somatória é denominado índice mudo e pode ser trocado livremente:

$$a_i b_i = a_j b_j = a_r b_r = \cdots.$$

c) Seja, por exemplo, o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Ele pode ser substituído por

$$a_{ij} x_j = b_i \ ,$$

que demonstra a força da notação indicial combinada com a convenção da somatória. Na representação acima j é o índice mudo. O índice i, que varia também de 1 a 3, é denominado *índice livre* e pode ser também livremente trocado em ambos os lados da equação. Pode-se concluir que o número de equações sintetizadas é dado por $3^{\text{n}^{\text{o}}\text{ de indices livres}}$ e que cada lado da equação contém $3^{\text{n}^{\text{o}}\text{ de indices mudos}}$ parcelas. A expressão $a_{ijklm}b_{jlm} = c_{ik}$ representa, por exemplo, 9 equações com 27 parcelas do lado esquerdo.

Exercícios 2.5

a) Quantas equações a expressão $a_{ijkl}c_{ik}b_l = 0$ sintetiza? Quantas parcelas cada expressão tem?
b) Por que as expressões $a_{ij}b_j = c_{ij}$ e $a_{ijk}b_k = d_i$ contém erros?
c) Mostre que $A_{ik}B_{kj} = C_{ij}$ indica o produto matricial $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$, se o primeiro índice representar a linha e o segundo índice a coluna, como é usual.
d) Mostre que $A_{ki}B_{kj} = C_{ij}$ indica o produto matricial $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.
e) Mostre que toda matriz pode ser expressa por $\boldsymbol{A} = A_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}$, onde A_{ij} são os elementos da matriz e $\boldsymbol{E}_{ij}$ é a base canônica de $\mathcal{M}_{m\times n}$.

6 Espaços Vetoriais Euclidianos

Na Geometria travou-se contacto com o produto escalar de dois vetores. Aqui este conceito será generalizado através da seguinte definição.

Definição 2.8: Produto escalar

Um *espaço vetorial com produto escalar* ou interno é um espaço vetorial munido de uma aplicação denominada *produto escalar* que associa a cada par de vetores $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}_3$ um e só um número real $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$, verificando as seguintes propriedades

a) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}, \quad \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathcal{V}_3$;
b) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}, \quad \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in \mathcal{V}_3$;
c) $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y}, \quad \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathcal{V}_3, \forall a \in \mathbb{R}$;
d) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}_3$, e $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.

Observação 2.4

a) A notação $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$ é utilizada para o produto escalar, especialmente no contexto de funções.
b) A notação $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}$ é utilizada para o produto escalar, especialmente no contexto de matrizes (e de tensores).
c) Um espaço vetorial com produto escalar é denominado também *pré-Hilbertiano*.

Exemplos 2.6

a) Em $\mathbb{R}^2, (x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2) = x_1y_1 + x_2y_2$;
b) Em $\mathcal{C}_0(a,b), \langle f,g\rangle = \int_a^b fg\,dx$;
c) Sejam $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Uma definição para o produto escalar de duas matrizes quadradas é

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{B}\right), \tag{2.5}$$

onde $\operatorname{tr}(\boldsymbol{M})$ indica o *traço* da matriz $\boldsymbol{M}$. O operador traço é definido por

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{M}) = \sum_{i=1}^{n} M_{ii} \ . \tag{2.6}$$

Exercícios 2.6

a) Mostre que, em $\mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ satisfaz as propriedades do produto escalar;

b) Mostre que em $\mathcal{C}_0(a,b)$, $\langle f, g \rangle = \int_a^b fg dx$ satisfaz as propriedades do produto escalar;

c) Mostre que em $\mathcal{M}_{2\times 2}$ a definição $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{B}\right)$ satisfaz as propriedades do produto escalar. Mostre também que $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = A_{ij} B_{ij}$.

Definição 2.9: Espaço vetorial Euclidiano

Um espaço vetorial dotado de produto escalar e de dimensão finita é denominado *espaço vetorial Euclidiano*[4] e o espaço afim associado é denominado *espaço afim Euclidiano*.

Definição 2.10: Norma Euclidiana

A *magnitude* ou *norma Euclidiana* de um vetor $\boldsymbol{x}$ pertencente a um espaço vetorial Euclidiano é dada pelo escalar

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} \ . \tag{2.7}$$

Propriedade 2.2: Desigualdade de Schwarz

Em um espaço vetorial com produto interno vale a *Desigualdade de Schwarz*[5]

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\| \ , \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}_3 \ . \tag{2.8}$$

Para demonstrá-la, considere-se que

$$\|\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y}\| \geq 0 \ , \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}_3 \ , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ .$$

Mas

$$\|\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} + 2\alpha \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \alpha^2 \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y} \ .$$

Logo

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\alpha \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \alpha^2 \|\boldsymbol{y}\|^2 \geq 0 \ , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ . \tag{2.9}$$

O discriminante do trinômio em α acima não deve ser positivo, portanto,

$$(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2 \|\boldsymbol{y}\|^2 \leq 0 \ ,$$

de onde resulta (2.8).

Propriedade 2.3: Desigualdade triangular

Da Desigualdade de Schwarz decorre a *Desigualdade Triangular*

---

[4] Euclides (ca. 320-260 AC)
[5] Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|\,, \quad \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathcal{V}_3\,. \tag{2.10}$$

De fato, fazendo $\alpha = 1$ em (2.9), tem-se

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + \|\boldsymbol{y}\|^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}| + \|\boldsymbol{y}\|^2 \tag{2.11}$$

Utilizando-se (2.8), de (2.11) vem

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}| + \|\boldsymbol{y}\|^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2\,, \tag{2.12}$$

de onde decorre (2.10).

Propriedade 2.4

Da Desigualdade de Schwarz (2.8) decorre também

$$-1 \leq \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} \leq 1\,. \tag{2.13}$$

Definição 2.11: Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos A e B de um espaço afim Euclidiano é dada por

$$d(A,B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|. \tag{2.14}$$

Definição 2.12: Ângulo entre vetores

O ângulo θ entre dois vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ é dado por

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}\,. \tag{2.15}$$

A definição acima faz sentido por causa de (2.13).

Definição 2.13: Ortogonalidade

Dois vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são ditos ortogonais se $\theta = 90^o$ ou $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0$.

Propriedade 2.5: Teorema de Pitágoras[6]

Em um espaço vetorial com produto interno vale o seguinte teorema (*Teorema de Pitágoras*)

$$\theta = 90^o \Leftrightarrow \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2\,. \tag{2.16}$$

(2.16) decorre de (2.11) e da definição de ortogonalidade acima.

Exercícios 2.7

a) Considere-se o espaço vetorial $\mathcal{C}_0(0,1)$ com o produto escalar $\langle f,g\rangle = \int_0^1 fg\,dx$. Determine as normas das funções $f(x) = 1$ e $g(x) = x$ e o ângulo entre elas; elas são LI? Determine o coeficiente α de $h(x) = x + \alpha$, de modo que f e h sejam ortogonais. Determine a distância entre f e g, definindo-se distância entre funções por $d(f,g) = \|f-g\|$. Determine o erro de se aproximar $p(x) = x^2$ por $g(x)$, definindo-se a função erro $\varepsilon(x) = p - g$ e o erro por $\|\varepsilon\| = d(p,g)$.

b) Mostre que

[6] Pitágoras (571-497 a.C.)

$$\int_a^b fgdx \leq \sqrt{\int_a^b f^2 dx}\sqrt{\int_a^b g^2 dx} \ . \tag{2.17}$$

Definição 2.14: Colinearidade

Dois vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são ditos colineares se $\theta = 0^o$.

Propriedades 2.6

Sejam os vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, dados por $\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{y} = y_i\boldsymbol{e}_i$. Efetuando-se o produto escalar e utilizando-se as propriedades b) e c) deste, tem-se

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_i y_j \left(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \right) . \tag{2.18}$$

Definição 2.15: Métrica

O conjunto dos produtos

$$g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \tag{2.19}$$

recebe a denominação de *métrica* do espaço vetorial. Note-se que estes produtos são simétricos, isto é, $g_{ij} = g_{ji}$ por causa da propriedade a) do produto escalar.

7 Bases Ortonormais

Definição 2.16: Base ortonormal

Uma base é dita *ortonormal* se

$$g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \ , \tag{2.20}$$

onde δ_{ij} é o *símbolo de Kronecker*[7] abaixo

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \tag{2.21}$$

Propriedades 2.7

a) Em uma base ortonormal, os vetores são unitários, isto é,

$$\|\boldsymbol{e}_i\| = 1 \ , \quad i = 1,2,3 \ . \tag{2.22}$$

b) Em uma base ortonormal, os vetores são ortogonais entre si, ou seja,

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = 0 \ , \quad i \neq j \ . \tag{2.23}$$

Propriedades 2.8

a) O produto escalar de dois vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, dados por $\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{y} = y_i\boldsymbol{e}_i$, é

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \delta_{ij} x_i y_j \ . \tag{2.24}$$

b) Note-se, no entanto, que (2.21) leva a

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_i y_i = x_j y_j \ . \tag{2.25}$$

[7] Leopold Konecker (1823-1891)

evidenciando uma propriedade muito importante de δ_{ij}: o símbolo de Kronecker pode ser utilizado para substituir ou trocar índices de grandezas indexadas. Assim, por exemplo, tem-se que $\delta_{ik}\delta_{jl}a_{lmn}b_{kn} = a_{jmn}b_{in}$.

c) Note-se que

$$\left[\delta_{ij}\right] = \boldsymbol{I} \ , \tag{2.26}$$

onde $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade.

d) Note-se também que

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_j = (x_i \boldsymbol{e}_i) \cdot \boldsymbol{e}_j = x_i \left(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j\right) = \delta_{ij} x_i \ , \tag{2.27}$$

e portanto

$$x_j = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_j \ . \tag{2.28}$$

(2.28) fornece uma interpretação geométrica para as componentes de um vetor em uma base ortonormal. Utilizando-se (2.15) e (2.28), tem-se

$$x_j = \|\boldsymbol{x}\| \cos\theta \ , \tag{2.29}$$

onde θ é o ângulo entre $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{e}_j$, ou seja, a componente é a projeção do vetor na direção do vetor unitário da base, conforme a Figura 2.1.

Figura 2.1: Interpretação geométrica da componente de um vetor

Exercícios 2.8

Sejam $\boldsymbol{z} = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2$ em $\mathcal{V}_2$.

a) Calcule $\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{w}$, $\|\boldsymbol{z}\|$, $\|\boldsymbol{w}\|$ e θ entre estes vetores;

b) Construa uma base ortonormal $\{\overline{\boldsymbol{e}}_1, \overline{\boldsymbol{e}}_2\}$, na qual $\overline{\boldsymbol{e}}_1$ tenha a direção e o sentido de $\boldsymbol{z}$;

c) Encontre as componentes de $\boldsymbol{w}$ na base $\{\overline{\boldsymbol{e}}_1, \overline{\boldsymbol{e}}_2\}$ do item acima.

Observação 2.5

Neste texto serão utilizadas somente bases ortonormais. Bases que não são ortonormais surgem, por exemplo, com a utilização de coordenadas curvilíneas.

Propriedades 2.9: Mudança de base

Sejam duas bases ortonormais $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ e $\{\overline{\boldsymbol{e}}_1, \overline{\boldsymbol{e}}_2, \overline{\boldsymbol{e}}_3\}$. Sejam os seguintes coeficientes

$$\overline{m}_{ij} = \overline{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \ . \tag{2.30}$$

Note-se que não há simetria nestes coeficientes, isto é, em geral, $\overline{m}_{ij} \neq \overline{m}_{ji}$. Determine-se, agora, as componentes de um vetor $\boldsymbol{x}$ na base $\{\overline{\boldsymbol{e}}_1, \overline{\boldsymbol{e}}_2, \overline{\boldsymbol{e}}_3\}$ por meio de (2.28), ou seja, $\overline{x}_i = \overline{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{x}$. Lembrando-se que $\boldsymbol{x} = x_j \boldsymbol{e}_j$, tem-se

$$\overline{x}_i = \overline{\boldsymbol{e}}_i \cdot \left(x_j \boldsymbol{e}_j \right) = x_j \left(\overline{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \right). \tag{2.31}$$

Logo, tem-se

$$\overline{x}_i = \overline{m}_{ij} x_j \ , \tag{2.32}$$

que é a expressão da mudança de base para as componentes de um vetor.

Observação 2.6

Os coeficientes $\overline{m}_{ij}$ são os co-senos dos ângulos entre os vetores unitários das duas bases.

Exercícios 2.9

a) Mostre que

$$x_i = \overline{m}_{ji} \overline{x}_j \ ; \tag{2.33}$$

b) Mostre que a matriz $\overline{\boldsymbol{M}} = \left[\overline{m}_{ij} \right]$ é *ortogonal*, isto é,

$$\overline{\boldsymbol{M}}^T \overline{\boldsymbol{M}} = \overline{\boldsymbol{M}} \overline{\boldsymbol{M}}^T = \boldsymbol{I} \ . \tag{2.34}$$

(Sugestão: utilize $\overline{\boldsymbol{M}}^T \overline{\boldsymbol{M}} = \left[\overline{m}_{ki} \overline{m}_{kj} \right]$);

c) Mostre que a matriz

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

é ortogonal e que $\det \boldsymbol{R} = 1$.

d) Mostre que a matriz

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} + \frac{\text{sen}\theta}{\theta} \boldsymbol{\Theta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\text{sen}\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{\theta}{2}} \right)^2 \boldsymbol{\Theta}^2 \ , \tag{2.36}$$

onde

$$\theta = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.37}$$

é ortogonal e que $\det \boldsymbol{R} = 1$. (2.36) é conhecida como *fórmula de Euler-Rodrigues*[8].

e) Encontre $\overline{m}_{ij}$ dos Exercícios 2.8.

8 Formas Lineares

Na Álgebra Linear são definidos diversos tipos de aplicações com propriedades de linearidade e multilinearidade. Formas lineares serão as primeiras a serem consideradas aqui.

[8] Leonhard Euler (1707-1783), Benjamin Olinde Rodrigues (1794-1851)

Definição 2.17: Forma linear

Chama-se *forma linear* em $\mathcal{V}_3$ a toda aplicação $A : \mathcal{V}_3 \to \mathbb{R}$, de modo que

a) $A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A(\boldsymbol{x}) + A(\boldsymbol{y}), \quad \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathcal{V}_3$;

b) $A(a\boldsymbol{x}) = aA(\boldsymbol{x}), \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}_3$.

Propriedades 2.10

a) Uma forma linear A fica inteiramente caracterizada na base $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ pelo conhecimento dos coeficientes

$$\alpha_i = A(\boldsymbol{e}_i). \tag{2.38}$$

Para se verificar isto, seja $\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i$. Pelas propriedades a) e b) da Definição 2.17, tem-se que

$$A(\boldsymbol{x}) = A(x_i\boldsymbol{e}_i) = x_iA(\boldsymbol{e}_i) = x_i\alpha_i .$$

α_i são chamadas de componentes de A na base $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$.

b) Dada A, existe um único vetor $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}$ tal que

$$A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}. \tag{2.39}$$

Para se verificar isto, considere-se que

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} = a_ix_i \quad \text{e} \quad A(\boldsymbol{x}) = \alpha_ix_i .$$

Logo

$$a_i = \alpha_i .$$

Diz-se, então, que o vetor $\boldsymbol{a}$ representa a forma linear A. Há autores que definem vetores diretamente como formas lineares.

Exercícios 2.10

Considere a forma linear na base $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ dada por $B(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2$.

a) Determine o vetor $\boldsymbol{b}$ que representa B;

b) Calcule $B(\boldsymbol{x})$, com $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$.

9 Operadores Vetoriais

Introduz-se, agora, uma aplicação com propriedades de linearidade denominada operador vetorial. Esta aplicação facilita muito o entendimento do conceito de tensor e, por isso, é muito importante neste texto.

Definição 2.18: Operador Vetorial

Chama-se *operador vetorial* em $\mathcal{V}_3$ a toda aplicação $\boldsymbol{T} : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_3$, de modo que

a) $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{y}), \quad \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathcal{V}_3$;

b) $\boldsymbol{T}(a\boldsymbol{x}) = a\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}), \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}_3$.

Propriedades 2.11

a) Um operador vetorial $\boldsymbol{T}$ fica inteiramente caracterizado em uma base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ pelo conhecimento dos vetores $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i)$. Para se verificar isto, seja $\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i$. Utilizando-se as propriedades da Definição 2.18 dos operadores vetoriais, tem-se

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{T}(x_i\boldsymbol{e}_i) = x_i\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i) .$$

b) Denotando-se as componentes do vetor $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_j)$ na base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ por T_{ij}, de modo que

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_j) = T_{ij}\boldsymbol{e}_i , \tag{2.40}$$

tem-se

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = x_j\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_j) = T_{ij}x_j\boldsymbol{e}_i . \tag{2.41}$$

Logo, se $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$, então as componentes de $\boldsymbol{y}$ na base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ são dadas por

$$y_i = T_{ij}x_j . \tag{2.42}$$

c) T_{ij} são as componentes do operador $\boldsymbol{T}$ na base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Veja-se que

$$T_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_j) . \tag{2.43}$$

Observação 2.7

Tendo em vista a Definição 2.18 e as Propriedades 2.11, o vetor $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ é grafado a partir deste ponto como um produto, como se segue

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x} . \tag{2.44}$$

Logo, se $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$, então $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}$. (2.43) é grafado, então, da seguinte forma

$$T_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_j . \tag{2.45}$$

Definição 2.19: Operador nulo

O operador vetorial $\boldsymbol{O}$ tal que

$$\boldsymbol{O}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} , \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}_3 \tag{2.46}$$

é denominado *operador nulo*. Note-se que $O_{ij} = 0$.

Definição 2.20: Operador identidade

O operador vetorial $\boldsymbol{I}$ tal que

$$\boldsymbol{I}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} , \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}_3 \tag{2.47}$$

é denominado *operador identidade*. Note-se que

$$I_{ij} = \delta_{ij} \tag{2.48}$$

em bases ortonormais.

Definição 2.21: Transposição de operadores vetoriais

O operador $\boldsymbol{T}^T$ é denominado o *operador transposto* de $\boldsymbol{T}$, se

$$\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}_3 . \tag{2.49}$$

Propriedade 2.12

É fácil mostrar que

$$T_{ij}^T = T_{ji} \tag{2.50}$$

em bases ortonormais. (2.50) indica que

$$\left[T_{ij}^T\right] = \left[T_{ij}\right]^T \ . \tag{2.51}$$

Definição 2.22: Operadores simétricos

O operador vetorial $\boldsymbol{T}$ é dito *simétrico* se

$$\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}) \ , \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}_3 \ . \tag{2.52}$$

Propriedades 2.13

De acordo com (2.49) para operadores simétricos

$$\boldsymbol{T}^T = \boldsymbol{T} \ . \tag{2.53}$$

Propriedades 2.14

De (2.50) decorre que, para operadores simétricos,

$$T_{ij} = T_{ji} \ , \tag{2.54}$$

ou seja,

$$\left[T_{ij}\right] = \left[T_{ij}\right]^T \ , \tag{2.55}$$

em bases ortonormais.

Definição 2.23: Operadores anti-simétricos

Um operador vetorial é dito *anti-simétrico* se

$$\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}) \ , \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}_3 \ . \tag{2.56}$$

De acordo com (2.49) para operadores anti-simétricos

$$\boldsymbol{T}^T = -\boldsymbol{T} \ . \tag{2.57}$$

Propriedades 2.15

De (2.50) decorre que, para operadores anti-simétricos,

$$T_{ij} = -T_{ji} \ , \tag{2.58}$$

ou seja

$$\left[T_{ij}\right] = -\left[T_{ij}\right]^T \ , \tag{2.59}$$

em bases ortonormais.

Definição 2.24: Soma de operadores vetoriais

Sejam $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{V}$ operadores vetoriais em $\mathcal{V}_3$. Se

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{V}\boldsymbol{x} \ , \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}_3 \ , \tag{2.60}$$

então o operador vetorial $\boldsymbol{T}$ é denominado a *soma* dos operadores vetoriais $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{V}$, sendo, por isso, denotado por $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}$.

Propriedade 2.16

Todo operador vetorial $\boldsymbol{T}$ pode ser decomposto na soma de um operador simétrico $\boldsymbol{S}$ e um operador anti-simétrico $\boldsymbol{A}$ como se segue

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A}\,, \tag{2.61}$$

onde

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^T\big) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}^T\big)\,. \tag{2.62}$$

Em termos das componentes em uma base ortonormal, tem-se

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\big(T_{ij} + T_{ji}\big) \quad \text{e} \quad A_{ij} = \frac{1}{2}\big(T_{ij} - T_{ji}\big)\,. \tag{2.63}$$

Observação 2.8

Uma notação muito empregada para a operação de extração das componentes simétrica e anti-simétrica de um tensor é

$$\boldsymbol{S} = \mathrm{Sym}\,(\boldsymbol{T}) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{A} = \mathrm{Skew}\,(\boldsymbol{T})\,. \tag{2.64}$$ [9]

Definição 2.25: Operadores ortogonais

Um operador vetorial $\boldsymbol{Q}$ é dito *ortogonal* se

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}\,, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}_3\,. \tag{2.65}$$

Propriedades 2.17

É fácil demonstrar, a partir de (2.65), que

$$Q_{ki} Q_{kj} = \delta_{ij}\,. \tag{2.66}$$

(2.66) faz com que a matriz $\big[Q_{ij}\big]$ seja ortogonal, isto é,

$$\big[Q_{ij}\big]^{-T} = \big[Q_{ij}\big]\,. \tag{2.67}$$

Logo

$$\det\big[Q_{ij}\big] = \pm 1\,. \tag{2.68}$$

Definição 2.26: Rotações

Quando $\det\big[Q_{ij}\big] = +1$, diz-se que o operador ortogonal é uma *rotação*.

Definição 2.27: Inversão de um operador vetorial

Diz-se que $\boldsymbol{T}^{-1}$ é o *operador vetorial inverso* de $\boldsymbol{T}$ se

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{y})\,, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}_3\,. \tag{2.69}$$

[9] Do inglês "*symmetric*" e "*skew-symmetric*".

Propriedades 2.18

É fácil mostrar, a partir de (2.69), que

$$T_{ik}^{-1}T_{kj} = \delta_{ij} \ . \tag{2.70}$$

Logo

$$\left[T_{ij}^{-1}\right] = \left[T_{ij}\right]^{-1} \ . \tag{2.71}$$

Para que $\boldsymbol{T}^{-1}$ exista, o operador vetorial $\boldsymbol{T}$ precisa ser uma aplicação bijetora. Uma condição necessária e suficiente para isso, em uma base ortonormal, é que a matriz de suas componentes em sistema ortonormal não seja singular, isto é

$$\det\left[T_{ij}\right] \neq 0 \ . \tag{2.72}$$

Propriedades 2.19

Podem-se mostrar as seguintes propriedades dos operadores, que são completamente análogas a das matrizes,

a) $\left(\boldsymbol{T}^{-1}\right)^T = \left(\boldsymbol{T}^T\right)^{-1}$; logo pode-se grafar apenas $\boldsymbol{T}^{-T}$;

b) $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^T$, para operadores ortogonais.

Definição 2.28: Composição de operadores

O operador vetorial $\boldsymbol{T}$ é denominado a *composição* dos operadores vetoriais $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{U}$, sendo denotado por $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{V} \circ \boldsymbol{U}$ ou por

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{U} \ , \tag{2.73}$$

se

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})) \ , \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}_3 \ . \tag{2.74}$$

Propriedades 2.20

É fácil mostrar, a partir de (2.74), que vale a seguinte equação

$$T_{ij} = V_{ik}U_{kj} \ . \tag{2.75}$$

Logo, as matrizes de suas componentes em um sistema ortonormal obedecem à seguinte relação

$$\left[T_{ij}\right] = \left[V_{ik}\right]\left[U_{kj}\right] . \tag{2.76}$$

(2.75) ou (2.76) justificam a notação (2.73).

Exercícios 2.11

a) Considere-se um operador, cuja matriz em uma base ortonormal $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ seja

$$\left[T_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Seja também o vetor $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3$. Calcule $\boldsymbol{e}_i \cdot T\left(\boldsymbol{e}_j\right)$, $i, j = 1,2,3$, $T(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \cdot T(\boldsymbol{x})$ e $T(\boldsymbol{x}) \cdot T(\boldsymbol{x})$.

b) Mostre que

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\,. \tag{2.77}$$

c) Encontre as componentes simétricas e anti-simétricas do operador vetorial do exercício b) acima.

10 Tensores de Segunda Ordem

Definição 2.29: Tensores de segunda ordem

Tensores de segunda ordem são definidos como operadores vetoriais em $\mathcal{V}_3$.

Observação 2.9

As classificações de operadores vetoriais introduzidas anteriormente podem ser estendidas aos tensores de segunda ordem. Assim pode-se falar de tensores simétricos, anti-simétricos, ortogonais, transpostos, do tensor nulo, do tensor identidade, do tensor rotação, da soma e da composição de tensores. Em relação à composição, tendo em vista (2.73), fala-se do produto de dois tensores.

Definição 2.30: Produto diádico

Introduz-se aqui o *produto diádico* ou *produto tensorial* entre dois vetores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, grafado por $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$, que resulta em um tensor de segunda ordem $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}$, tal que

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}\,. \tag{2.78}$$

Propriedades 2.21

O produto tensorial de dois vetores $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathcal{V}_3$ possui as seguintes propriedades de bilinearidade, que podem ser verificadas facilmente através das propriedades de linearidade dos operadores vetoriais :

a) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\otimes\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c}$, $\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathcal{V}_3$;

b) $\boldsymbol{a}\otimes(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{c}$, $\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathcal{V}_3$;

c) $(a\boldsymbol{a})\otimes\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\otimes(a\boldsymbol{b}) = a(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})$, $\forall a\in\mathbb{R}$, $\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathcal{V}_3$.

Por causa destas propriedades a nomenclatura de produto fica justificada.

Propriedade 2.22

Seja $\boldsymbol{T}$ um tensor de segunda ordem qualquer. Se $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$, então, de $\boldsymbol{y} = y_i\boldsymbol{e}_i$, (2.42) e (2.43), tem-se

$$\boldsymbol{y} = \left[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i)\cdot\boldsymbol{e}_j\right]\boldsymbol{e}_i\,. \tag{2.79}$$

Logo, todo tensor de segunda ordem pode ser escrito da seguinte forma

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i)\otimes\boldsymbol{e}_i\,. \tag{2.80}$$

Observação 2.10

(2.80) indica que as componentes de $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i)$ na base $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ formam a coluna i da matriz do operador vetorial nesta mesma base.

Propriedades 2.23

O produto tensorial de dois vetores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{V}_3$ fica inteiramente caracterizado em uma base ortonormal $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ pelo conhecimento dos produtos tensoriais dos vetores da base, ou seja, de

$$\boldsymbol{E}_{ij} = \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \ , \quad i, j = 1,2,3 \ . \tag{2.81}$$

Esta propriedade é verificada rapidamente a seguir

$$\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = (a_i \boldsymbol{e}_i) \otimes \left(b_j \boldsymbol{e}_j\right) = a_i b_j \left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right) = a_i b_j \boldsymbol{E}_{ij} \ . \tag{2.82}$$

Definição 2.31: Espaço tensorial de segunda ordem

O conjunto de todos os tensores de segunda ordem é aqui designado por $\mathcal{T}_3 = \mathcal{V}_3 \otimes \mathcal{V}_3$ e denominado *espaço tensorial de segunda ordem*. $\mathcal{T}_3$ é um espaço vetorial de dimensão $3^2 = 9$, como se pode concluir a partir de (2.82), sendo que as grandezas $\boldsymbol{E}_{ij}$ formam uma base deste espaço.

Definições 2.32: Subespaços do espaço tensorial de segunda ordem

a) O espaço dos tensores de segunda ordem simétricos é designado por $\mathcal{S}_3$.
b) O espaço dos tensores de segunda ordem anti-simétricos é designado por $\mathcal{A}_3$.

Observação 2.11

O espaço $\mathcal{V}_3$ é denominado *espaço tensorial de primeira ordem* e seus elementos são denominados *tensores de primeira ordem* ou vetores.

Propriedade 2.24

O tensor $\boldsymbol{T}$, cujas componentes em uma base ortonormal $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ são T_{ij}, é dado por

$$\boldsymbol{T} = T_{ij} \boldsymbol{E}_{ij} = T_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \ , \tag{2.83}$$

onde

$$T_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{T} \boldsymbol{e}_j \ . \tag{2.84}$$

Propriedades 2.25

Os tensores de segunda ordem têm as seguintes propriedades em relação ao produto diádico:

a) $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{T}\boldsymbol{a}) \otimes \boldsymbol{b}$;
b) $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})\boldsymbol{T} = \boldsymbol{a} \otimes \left(\boldsymbol{T}^T \boldsymbol{b}\right)$;
c) $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})(\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{d})$.

Exemplo 2.7

Para ilustração demonstra-se a Propriedades 2.25b). Seja $\boldsymbol{x}$ um vetor qualquer, então pela Definição 2.30 e a Definição 2.21, tem-se

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})\boldsymbol{T}\boldsymbol{x} &= (\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}))\boldsymbol{a} = \\ &= \left(\boldsymbol{T}^T \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x}\right)\boldsymbol{a} = \\ &= \left(\boldsymbol{a} \otimes \left(\boldsymbol{T}^T \boldsymbol{b}\right)\right)\boldsymbol{x} \ .\end{aligned}$$

Logo a Propriedades 2.25b) vale.

Definição 2.33: Determinante de um tensor de segunda ordem

O *determinante* de um tensor de segunda ordem é dado, em uma base ortonormal, por

$$\det \boldsymbol{T} = \det\left[T_{ij}\right]. \tag{2.85}$$

Observação 2.12

O determinante de um tensor de segunda ordem não depende da base ortonormal onde ele é calculado.

Propriedades 2.26

O determinante de tensores tem as mesmas propriedades dos determinantes das matrizes. Assim

a) $\det \boldsymbol{T}^T = \det \boldsymbol{T}$;

b) $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = (\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{B})$;

Propriedade 2.27

Seja $\boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{e}_i$ um tensor construído com 3 vetores LI indicados por $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{v}_3$. Logo, das Propriedades 2.25, decorre $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{e}_i) = (\boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_i) \otimes \boldsymbol{e}_i$. Logo, com a ajuda das Propriedades 2.26, tem-se

$$\det \boldsymbol{T} = \frac{\det\left[(\boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_i) \otimes \boldsymbol{e}_i\right]}{\det(\boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{e}_i)}. \tag{2.86}$$

Exemplo 2.8: Tensor das tensões

Deduz-se, agora, de forma preliminar, o *tensor das tensões de Cauchy*, que foi o primeiro tensor de segunda ordem descoberto, donde o nome tensor. Considere-se, conforme a Figura 2.2, um tetraedro infinitesimal no interior de um sólido com 3 arestas segundo os vetores da base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$.

Figura 2.2: Tensor das tensões de Cauchy

Nas superfícies infinitesimais de área dS_i, $i = 1,2,3$, cujas normais são os vetores unitários $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1,2,3$, respectivamente, atuam as forças $d\boldsymbol{t}_i$, $i = 1,2,3$, dadas por

$$d\boldsymbol{t}_i = \boldsymbol{t}_{(i)} dS_{(i)} \ , \tag{2.87}$$

onde os parênteses indicam que não há somatória no índice i e $\boldsymbol{t}_i$ são denominados vetores das tensões atuantes sobre as áreas dS_i. Um vetor tensão é denominado também de força superficial ou força por unidade de área. Se $\boldsymbol{t}_i$ é a força por unidade de área que atua sobre dS_i, então $-\boldsymbol{t}_i$ é a força por unidade de área que atua na face cuja normal é $-\boldsymbol{e}_i$, $i = 1,2,3$. Seja $\boldsymbol{t}$ a força por unidade de área que atua na face inclinada com área dS e normal $\boldsymbol{n}$. O equilíbrio das forças atuantes sobre o tetraedro fornece

$$\boldsymbol{t} dS = \boldsymbol{t}_1 dS_1 + \boldsymbol{t}_2 dS_2 + \boldsymbol{t}_3 dS_3 = \boldsymbol{t}_i dS_i \ . \tag{2.88}$$

Mas, como dS_i é a projeção de dS no plano de normal $\boldsymbol{e}_i$, tem-se

$$dS_i = (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{n}) dS \ . \tag{2.89}$$

Introduzindo-se (2.89) em (2.88), tem-se

$$\boldsymbol{t} = (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{n}) \boldsymbol{t}_i = (\boldsymbol{t}_i \otimes \boldsymbol{e}_i) \boldsymbol{n} \ . \tag{2.90}$$

Logo

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \ , \tag{2.91}$$

onde

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}_i \otimes \boldsymbol{e}_i \tag{2.92}$$

é o tensor das tensões de Cauchy. O operador associado é um operador vetorial que associa à normal de uma superfície a força superficial atuante sobre ela. Ao se equacionar o equilíbrio de momentos no tetraedro, verificar-se-á que $\boldsymbol{T}$ é simétrico. Note-se que as colunas da matriz das componentes do tensor das tensões são as componentes de $\boldsymbol{t}_i$.

Propriedades 2.28: Mudança de base

Sejam duas bases ortonormais $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ e $\{\overline{\boldsymbol{e}}_1, \overline{\boldsymbol{e}}_2, \overline{\boldsymbol{e}}_3\}$. Sejam os coeficientes $\overline{m}_{ij} = \overline{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$ de (2.30). Note-se que não há simetria nestes coeficientes, isto é, em geral, $\overline{m}_{ij} \neq \overline{m}_{ji}$. Determine-se, agora, as componentes de um tensor $\boldsymbol{T}$ na base $\{\overline{\boldsymbol{e}}_1, \overline{\boldsymbol{e}}_2, \overline{\boldsymbol{e}}_3\}$ por meio de $\overline{T}_{ij} = \overline{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{T}\overline{\boldsymbol{e}}_j$. Lembrando-se que $\boldsymbol{T} = T_{kl}\boldsymbol{E}_{kl}$, tem-se

$$\overline{T}_{ij} = \overline{\boldsymbol{e}}_i \cdot (T_{kl}\boldsymbol{E}_{kl}) \overline{\boldsymbol{e}}_j = T_{kl} \overline{\boldsymbol{e}}_i \cdot (\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l) \overline{\boldsymbol{e}}_j = T_{kl} (\overline{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{e}_k)\big(\boldsymbol{e}_l \cdot \overline{\boldsymbol{e}}_j\big) \ . \tag{2.93}$$

Logo, tem-se

$$\overline{T}_{ij} = \overline{m}_{ik}\overline{m}_{jl} T_{kl} \ , \tag{2.94}$$

que é a expressão da mudança de base para as componentes de um tensor de segunda ordem.

Exercícios 2.12

Mostre que

$$T_{ij} = \overline{m}_{ki}\overline{m}_{lj} \overline{T}_{kl} \ . \tag{2.95}$$

11 Formas Bilineares e Formas Quadráticas

Definição 2.34: Forma bilinear

Chama-se *forma bilinear* em $\mathcal{V}_3$ a toda aplicação $f : \mathcal{V}_3 \times \mathcal{V}_3 \to \mathbb{R}$ que associa a cada par de vetores de $\mathcal{V}_3$ um e só um número real, de modo que as seguintes propriedades de bilinearidade valham

a) $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) + f(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}),\ \forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \in \mathcal{V}_3$;

b) $f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}),\ \forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \in \mathcal{V}_3$;

c) $f(a\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a},a\boldsymbol{b}) = af(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\ \forall a \in \mathbb{R},\ \forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \mathcal{V}_3$.

Exemplos 2.9

a) $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ é uma forma bilinear;

b) $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot T(\boldsymbol{y})$ é uma forma bilinear;

Propriedades 2.29

a) Uma forma bilinear fica inteiramente caracterizada na base $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ pelo conhecimento dos coeficientes

$$F_{ij} = f\big(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\big). \tag{2.96}$$

A verificação é simples:

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f\big(x_i\boldsymbol{e}_i, y_j\boldsymbol{e}_j\big) = x_i y_j f\big(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\big) = F_{ij}x_i y_j\ . \tag{2.97}$$

b) Dada f, existe um único tensor de segunda ordem $\boldsymbol{F}$ tal que

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{F}\boldsymbol{y}\ . \tag{2.98}$$

Fazendo-se $\boldsymbol{F} = F_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}$, a demonstração é imediata. Há autores que definem tensores de segunda ordem diretamente como formas bilineares.

Definição 2.35: Formas bilineares simétricas

Uma forma bilinear é dita simétrica se

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathcal{V}_3\ . \tag{2.99}$$

Uma conseqüência imediata é que o tensor associado $\boldsymbol{F}$ é simétrico.

Definição 2.36: Forma quadrática

Chama-se *forma quadrática* associada a forma bilinear simétrica f a aplicação $q : \mathcal{V}_3 \to \mathbb{R}$ que a cada vetor $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}_3$ associa o número real dado por

$$q(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}). \tag{2.100}$$

Propriedades 2.30: Forma quadrática

a) Seja o vetor $\alpha\boldsymbol{x}$. Pelas propriedades das formas bilineares tem-se

$$q(\alpha\boldsymbol{x}) = f(\alpha\boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha^2 f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \alpha^2 q(\boldsymbol{x}). \tag{2.101}$$

b) Dada $q(\boldsymbol{x})$, existe um único tensor simétrico $\boldsymbol{F}$ tal que

$$q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} \,. \tag{2.102}$$

c) Uma propriedade importante das formas quadráticas é

$$\frac{\partial q(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = 2F_{ij}x_j \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 q(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j} = 2F_{ij} \,. \tag{2.103}$$

d) Esta propriedade é grafada também da seguinte maneira

$$\frac{\partial q(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = 2\boldsymbol{F}\boldsymbol{x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 q(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^2} = 2\boldsymbol{F} \,. \tag{2.104}$$

Exemplos 2.10

a) A tensão normal sobre um plano de normal $\boldsymbol{n}$ em um ponto de um sólido é dada por $\sigma = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n}$. Como $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}$, tem-se

$$\sigma(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \,, \tag{2.105}$$

que é uma forma quadrática, pois o tensor das tensões de Cauchy é simétrico.

b) Seja a seguinte forma quadrática

$$q = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 10x_2x_3 + 6x_3^2 \,.$$

Então

$$\left[F_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Verifique-se que

$$\left[\frac{\partial q}{\partial x_i}\right] = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \left[\frac{\partial^2 q}{\partial x_i \partial x_j}\right] = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.37: Formas quadráticas positivo-definidas

Uma forma quadrática q é dita *positivo-definida* se

$$q(\boldsymbol{x}) \geq 0 \,, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}_3 \quad \text{e} \quad q(\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \,. \tag{2.106}$$

Exemplo 2.11

A forma quadrática $q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$ é positivo-definida, conforme as propriedades do produto escalar.

Definição 2.38: Tensores positivo-definidos

Um tensor simétrico $\boldsymbol{T}$ é dito *positivo-definido* se a forma quadrática associada também o for.

12 Produto Escalar entre Tensores de Segunda Ordem

Para se definir o produto escalar entre dois tensores de segunda ordem a seguinte definição é necessária.

Definição 2.39: Traço de um tensor

O *traço* de um tensor de segunda ordem é uma aplicação $\mathrm{tr} : \mathcal{V}_3 \otimes \mathcal{V}_3 \to \mathbb{R}$, tal que

$$\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}\,. \tag{2.107}$$

Propriedades 2.31

a) O traço é uma forma bilinear, pois valem as propriedades de bilinearidade do produto escalar entre vetores que consta da definição (2.107).

b) Utilizando as propriedades das formas bilineares e a definição acima, tem-se

$$\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{T}) = \mathrm{tr}\big(T_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\big) = T_{ij}\mathrm{tr}\big(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\big) = T_{ij}\big(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j\big) = T_{ij}\delta_{ij}\ , \tag{2.108}$$

Logo

$$\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{T}) = T_{ii}\ . \tag{2.109}$$

Exercícios 2.13

Mostre as seguintes propriedades do traço de um tensor de segunda ordem:

$$\begin{aligned} &\text{a) } \mathrm{tr}\big(\boldsymbol{A}^T\big) = \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{A});\\ &\text{b) } \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{BA}) \text{ e}\\ &\text{c) } \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{ABC}) = \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{CAB}) = \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{BCA})\,. \end{aligned} \tag{2.110}$$

Definição 2.40: Produto escalar entre dois tensores

O *produto escalar de dois tensores* é uma aplicação de $\mathcal{T}_3 \times \mathcal{T}_3$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada par de tensores $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{T}_3$ um e só um número real definido por

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = \mathrm{tr}\big(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}\big)\,. \tag{2.111}$$

Propriedades 2.32

A definição (2.111) satisfaz as seguintes propriedades do produto escalar

a) $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} : \boldsymbol{A}$;

b) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) : \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} : \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} : \boldsymbol{C}$;

c) $\boldsymbol{A} : (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} : \boldsymbol{C}$;

d) $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{A} \geq 0$ e $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{A} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

Propriedades 2.33

É também fácil mostrar as seguintes propriedades do produto escalar de tensores de segunda ordem:

a) $\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{I} : \boldsymbol{A}$;

b) $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = A_{ij}B_{ij}$;

c) $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = \mathrm{Sym}\,(\boldsymbol{A}) : \mathrm{Sym}\,(\boldsymbol{B}) + \mathrm{Skew}\,(\boldsymbol{A}) : \mathrm{Skew}\,(\boldsymbol{B})$.

Exercícios 2.14

Mostre as Propriedades 2.32 e Propriedades 2.33.

13 Produto Vetorial

Observação 2.13

Embora este texto tenha-se restringido ao espaço vetorial $\mathcal{V}_3$, as definições e resultados apresentados até o momento valem para espaços vetoriais de dimensão n finita qualquer. Nesta seção aborda-se o produto vetorial que faz sentido apenas em $\mathcal{V}_3$. Sua definição é de fundamental importância na Mecânica Clássica.

Propriedade 2.34

Se $\boldsymbol{W}$ é um tensor anti-simétrico, então sua matriz de componentes numa base ortonormal $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ é anti-simétrica e pode ser expressa por

$$[W_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.112}$$

Definição 2.41: Vetor axial

O *vetor axial* de um tensor anti-simétrico $\boldsymbol{W}$ tem, em uma base ortonormal $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, as componentes w_i, $i = 1,2,3$ que constam de (2.112). Logo, pode-se escrever

$$\boldsymbol{w} = w_i \boldsymbol{e}_i \ . \tag{2.113}$$

Observação 2.14

A seguinte notação é empregada para os vetores axiais e seus tensores anti-simétricos associados

$$\boldsymbol{w} = \text{axial}(\boldsymbol{W}) \Leftrightarrow \boldsymbol{W} = \text{Skew}(\boldsymbol{w}) \ . \tag{2.114}$$ [10]

Definição 2.42: Produto vetorial entre dois vetores

O *produto vetorial* entre dois vetores $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}_3$ é grafado por $\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{x}$ e dado por

$$\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{x} \ , \tag{2.115}$$

onde $\boldsymbol{W}$ é o tensor anti-simétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{w}$, i.e. $\boldsymbol{W} = \text{Skew}(\boldsymbol{w})$.

Exemplos 2.12

a) Uma importante aplicação do produto vetorial está na definição de momento de uma força. Define-se momento de uma força $\boldsymbol{f}$ aplicada no ponto X em relação ao ponto O como

$$\boldsymbol{m} = \overrightarrow{OX} \times \boldsymbol{f} \ . \tag{2.116}$$

O ponto O é conhecido como pólo.

b) Outra aplicação importante na Mecânica está na definição de momento angular em relação ao pólo O de uma massa m, posicionada em X com velocidade $\boldsymbol{v}$, dada por:

[10] Observe-se que o operador Skew de $(2.114)_2$ é aplicado sobre vetores, enquanto que o operador Skew de $(2.64)_2$ é aplicado sobre tensores de segunda ordem. No contexto da orientação por objetos, diz-se que foi feita uma sobrecarga de operadores.

$$\boldsymbol{\mu} = \overrightarrow{OX} \times (m\boldsymbol{v}) \,. \tag{2.117}$$

Propriedades 2.35

a) Para quaisquer vetores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, tem-se

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \,, \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0 \,; \tag{2.118}$$

b) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ tem a interpretação geométrica da Figura 2.3 abaixo, ou seja, é ortogonal a $\boldsymbol{a}$ e a $\boldsymbol{b}$, com o sentido dado pela chamada regra da mão direita e tem como magnitude a área do paralelogramo definido por $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. Portanto

$$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \operatorname{sen}\theta \,. \tag{2.119}$$

Figura 2.3: Interpretação geométrica do produto vetorial

Definição 2.43: Vetor dual

O *vetor dual* do tensor $\boldsymbol{T}$ é definido por

$$\operatorname{dual}(\boldsymbol{T}) = \operatorname{axial}(\operatorname{Skew}(\boldsymbol{T})) \,. \tag{2.120}$$

Propriedades 2.36

a) O vetor dual de $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ é dado por

$$\operatorname{dual}(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \,. \tag{2.121}$$

b) Com a ajuda de (2.121), pode-se mostrar que

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}_i \otimes \boldsymbol{e}_i \Rightarrow \operatorname{dual}(\boldsymbol{T}) = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{t}_i \times \boldsymbol{e}_i) \,. \tag{2.122}$$

c) Da mesma forma, pode-se mostrar que

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{a}_i \otimes \boldsymbol{e}_i \\ \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{e}_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{dual}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T\right) = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_i \times \boldsymbol{b}_i) \,. \tag{2.123}$$

d) Note-se que

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T \Leftrightarrow \operatorname{dual}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{o} \,, \tag{2.124}$$

ou seja, o vetor dual de tensores simétricos é o vetor nulo.

Exercícios 2.15

Mostre que:

a) Se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são anti-simétricos, então

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{I} \ , \tag{2.125}$$

onde $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são os vetores axiais de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$. Qual é a expressão para $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}$?

b) Verifique com a ajuda de (2.125) que, se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são anti-simétricos, então

$$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = -2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \ , \tag{2.126}$$

onde $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são os vetores axiais de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$.

c) Com a ajuda de (2.125), verifique que

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \ . \tag{2.127}$$

d) Verifique que

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA} \ , \tag{2.128}$$

onde $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ são os vetores axiais dos tensores anti-simétricos $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$, respectivamente.

e) Verifique que

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{C} = \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} \ , \tag{2.129}$$

onde $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ são os vetores axiais dos tensores anti-simétricos $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$, respectivamente.

Definição 2.44: Produto misto

O *produto misto* de três vetores $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \in \mathcal{V}_3$ resulta em um escalar definido por

$$[\![\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]\!] = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \ . \tag{2.130}$$

Propriedades 2.37

a) O produto misto não depende da posição dos produtos escalar e vetorial:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \ , \quad \forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \in \mathcal{V}_3 \ . \tag{2.131}$$

b) O produto misto obedece a propriedade da permutação cíclica:

$$[\![\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]\!] = [\![\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]\!] = [\![\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\!] \ . \tag{2.132}$$

c) Se $[\![\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]\!] \neq 0$, então $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ são LI.

d) $[\![\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]\!]$ tem a interpretação geométrica da Figura 2.4, ou seja, é o volume do paralelepípedo definido pelos vetores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$.

Figura 2.4: Interpretação geométrica do produto misto

13.1 Relação de Euler

De (2.86) decorre a chamada *relação de Euler*:

$$\det \boldsymbol{T} = \frac{[\![\boldsymbol{Ta},\boldsymbol{Tb},\boldsymbol{Tc}]\!]}{[\![\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]\!]}, \quad \forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \in \mathcal{V}_3 \,\Big|\, [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] \neq 0 \,. \tag{2.133}$$

13.2 Relação de Nanson

A seguinte relação de Nanson[11] vale

$$(\boldsymbol{Ta}) \times (\boldsymbol{Tb}) = \det(\boldsymbol{T})\boldsymbol{T}^{-T}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \,. \tag{2.134}$$

Para se verificar (2.134), verifique-se que de (2.133) tem-se

$$(\det \boldsymbol{T})(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{Ta} \times \boldsymbol{Tb}) \cdot \boldsymbol{Tc} = \boldsymbol{T}^T(\boldsymbol{Ta} \times \boldsymbol{Tb}) \cdot \boldsymbol{c}\,, \quad \forall \boldsymbol{c} \in \mathcal{V}_3 \,. \tag{2.135}$$

Logo

$$(\det \boldsymbol{T})(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{T}^T(\boldsymbol{Ta} \times \boldsymbol{Tb})\,, \tag{2.136}$$

donde decorre (2.134).

Observação 2.15

O tensor $\boldsymbol{T}$ não preserva o produto vetorial, isto é, em geral,

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \neq (\boldsymbol{Ta}) \times (\boldsymbol{Tb}) \,. \tag{2.137}$$

Propriedade 2.38

Se $\boldsymbol{R}$ é um tensor rotação, então $\det \boldsymbol{R} = 1$ e $\boldsymbol{R}^{-T} = \boldsymbol{R}$. Assim de (2.134) vem

$$(\boldsymbol{Ra}) \times (\boldsymbol{Rb}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \,, \tag{2.138}$$

isto é, um tensor rotação preserva o produto vetorial.

14 Rotações

Definição 2.45: Conjunto das Rotações

O conjunto de todos os tensores rotação é designado aqui por $\mathcal{R}_3$.

Propriedade 2.39

Uma rotação θ em torno de um eixo dado pelo vetor unitário $\boldsymbol{e}$ e descrita de acordo com a regra da mão direita pode ser representada pelo tensor rotação $\boldsymbol{R}$ expresso por

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} + \frac{\sin\theta}{\theta}\boldsymbol{\Theta} + \frac{1}{2}\frac{\sin^2\theta/2}{(\theta/2)^2}\boldsymbol{\Theta}^2 \,, \tag{2.139}$$

onde

$$\boldsymbol{\theta} = \text{axial}(\boldsymbol{\Theta}) \,, \quad \boldsymbol{\theta} = \theta\boldsymbol{e} \quad \text{e} \quad \theta = \|\boldsymbol{\theta}\| \,. \tag{2.140}$$

[11] Edward John Nanson (1850-1936)

Observação 2.16

O vetor $\boldsymbol{\theta}$ é conhecido como *vetor das rotações de Euler*. (2.139) é conhecida como *Fórmula de Euler-Rodrigues*.

Propriedade 2.40

Há uma correspondência entre vetores e tensores rotação. Portanto, toda rotação pode ser descrita por apenas 3 parâmetros.

Figura 2.5: Rotação de um vetor

Propriedades 2.41

De (2.139), (2.140) e $\dfrac{1}{2}\dfrac{\operatorname{sen}^2(\theta/2)}{(\theta/2)^2} = \dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}$ decorre

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + \sin\theta(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{a}) + (1-\cos\theta)\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{a}), \tag{2.141}$$

onde $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \mathcal{V}_3$ e $\boldsymbol{R} \in \mathcal{R}_3$. A rotação e as 3 parcelas de (2.141) tem a interpretação geométrica da Figura 2.5.

Observação 2.17

Até primeira ordem em θ, um tensor rotação é dado por

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\Theta}\ . \tag{2.142}$$

Logo

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{a}\ . \tag{2.143}$$

15 Tensores Simétricos

Os tensores de segunda ordem simétricos ocupam uma posição de destaque na Mecânica dos Sólidos Deformáveis. Dedica-se esta seção a eles.

Propriedade 2.42

Todo tensor simétrico de segunda ordem pode ser decomposto na soma de dois tensores, conforme

$$\boldsymbol{T} = \mathrm{Sph}(\boldsymbol{T}) + \mathrm{Dev}(\boldsymbol{T}) , \tag{2.144}$$ [12]

onde $\mathrm{Sph}(\boldsymbol{T})$ é a chamada parcela esférica definida por

$$\mathrm{Sph}(\boldsymbol{T}) = \frac{1}{3}(\boldsymbol{I} : \boldsymbol{T})\boldsymbol{I} \tag{2.145}$$

e $\mathrm{Dev}(\boldsymbol{T})$ é a chamada parcela antiesférica dada por

$$\mathrm{Dev}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{T} - \mathrm{Sph}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{T} - \frac{1}{3}(\boldsymbol{I} : \boldsymbol{T})\boldsymbol{I} . \tag{2.146}$$

15.1 Autovalores e Autovetores

Definição 2.46: Autovalores e autovetores

Dado um tensor de segunda ordem simétrico $\boldsymbol{T}$, escalares $\lambda \in \mathbb{R}$ e vetores $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}_3$, para os quais valha a seguinte relação

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \tag{2.147}$$

são chamados *autovalores* e *autovetores* de $\boldsymbol{T}$.

Observação 2.18

Autovalores e autovetores são chamados também de *valores* e *vetores próprios* ou *principais*.

Observação 2.19

Como

$$\boldsymbol{T}(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha(\boldsymbol{T}\boldsymbol{v}) = \alpha(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda(\alpha\boldsymbol{v}) , \tag{2.148}$$

se $\boldsymbol{v}$ satisfizer (2.147), então $\alpha\boldsymbol{v}$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, também o faz. Portanto, do ponto de vista do operador vetorial associado a $\boldsymbol{T}$, está-se procurando direções dadas por $\boldsymbol{v}$, para as quais o operador preserva a direção.

Propriedade 2.43

De (2.147) obtém-se o seguinte sistema de equações

$$(\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} . \tag{2.149}$$

Este sistema homogêneo terá solução diferente da trivial somente quando

$$\det(\boldsymbol{T} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0 , \tag{2.150}$$

ou seja, quando a matriz do sistema (2.149) for singular.

Definição 2.47: Equação característica

Em $\mathcal{V}_3$, (2.150) fornece a seguinte equação

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 , \tag{2.151}$$

[12] Do inglês "*spherical and deviatoric parts*".

denominada *equação característica* de $\boldsymbol{T}$, onde I_i, $i = 1,2,3$, são coeficientes dados por

$$\begin{aligned} I_1 &= T_{11} + T_{22} + T_{33} \ , \\ I_2 &= T_{11}T_{22} + T_{22}T_{33} + T_{33}T_{11} - T_{12}^2 - T_{23}^2 - T_{31}^2 \quad \text{e} \\ I_3 &= T_{11}T_{22}T_{33} + 2T_{12}T_{23}T_{31} - T_{11}T_{23}^2 - T_{22}T_{31}^2 - T_{33}T_{12}^2 \ . \end{aligned} \tag{2.152}$$

Definição 2.48: Invariantes de um tensor

I_i, $i = 1,2,3$, são denominados *invariantes do tensor* $\boldsymbol{T}$, pois independem da base onde o tensor $\boldsymbol{T}$ é representado.

Observação 2.20

Outras expressões para os invariantes (2.152) são

$$\begin{aligned} I_1 &= \operatorname{tr}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{I} : \boldsymbol{T} \ , \\ I_2 &= \frac{1}{2}\big[(\operatorname{tr}\boldsymbol{T})^2 - \operatorname{tr}\boldsymbol{T}^2\big] = \frac{1}{2}\big[(\boldsymbol{T} : \boldsymbol{T})^2 - (\boldsymbol{I} : \boldsymbol{T})^2\big] \quad \text{e} \\ I_3 &= \det\boldsymbol{T} \ . \end{aligned} \tag{2.153}$$

Propriedade 2.44

Os autovalores e autovetores de um tensor simétrico são reais.

Para se verificar isto, recorre-se ao absurdo, parte-se de (2.147) e admite-se que se tenha obtido autovetores $\boldsymbol{v}$ complexos. Seja $\overline{\boldsymbol{v}}$ o complexo conjugado. Multiplicando-se (2.147) por $\overline{\boldsymbol{v}}$, tem-se

$$\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{v} = \lambda \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v} \ . \tag{2.154}$$

Note-se, entretanto, que

$$\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{T} : (\overline{\boldsymbol{v}} \otimes \boldsymbol{v}) \ . \tag{2.155}$$

Como $\boldsymbol{T}$ é simétrico vale

$$\boldsymbol{T} : (\overline{\boldsymbol{v}} \otimes \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{T} : \operatorname{Sym}(\overline{\boldsymbol{v}} \otimes \boldsymbol{v}) \tag{2.156}$$

Com a ajuda de (2.155) e pode-se reescrever (2.154) como se segue

$$\boldsymbol{T} : \operatorname{Sym}(\overline{\boldsymbol{v}} \otimes \boldsymbol{v}) = \lambda \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v} \ . \tag{2.157}$$

Fazendo-se

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b} \quad \text{e} \quad \overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{a} - i\boldsymbol{b} \ , \tag{2.158}$$

onde i é a unidade imaginária, tem-se que o termo em (2.157)

$$\operatorname{Sym}(\overline{\boldsymbol{v}} \otimes \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{b} \tag{2.159}$$

é real. Além disso

$$\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} \tag{2.160}$$

também é real. Logo, todos os termos de (2.157) são reais e os autovalores, conseqüentemente, também o são. Como os autovalores são reais, o sistema (2.149) é real, e, conseqüentemente, os autovetores também o são.

Observação 2.21: Fórmula de Cardano

Com os também invariantes

$$J_2 = \frac{1}{3} I_1^2 - I_2 \quad \text{e} \quad J_3 = \frac{2}{27} I_1^3 - \frac{1}{3} I_1 I_2 + I_3 \ , \tag{2.161}$$

podem-se encontrar as raízes de (2.151) por meio da seguinte fórmula de Cardano (1542) para equações do terceiro grau

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{3} I_1 + \frac{2}{3}\sqrt{3J_2} \left\{\begin{matrix} \cos\theta \\ \cos(\,\theta - 120^o\,) \\ \cos(\,\theta + 120^o\,) \end{matrix}\right. , \tag{2.162}$$

onde

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}} \right) . \tag{2.163}$$

Observação 2.22

(2.162) fornece os autovalores de $\boldsymbol{T}$ já obedecendo a seguinte ordem

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \ . \tag{2.164}$$

Propriedade 2.45

Autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais entre si.

A verificação é simples: sejam $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dois autovalores distintos e $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ os autovetores associados. Assim

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_2 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 \ .$$

Portanto, tem-se

$$\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 \ .$$

Como $\boldsymbol{T}$ é simétrico

$$\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{v}_2 \ .$$

Portanto,

$$\lambda_1 \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1 = \lambda_2 \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 \ ,$$

ou seja,

$$(\,\lambda_1 - \lambda_2\,)\, \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = 0 \ .$$

Logo, se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = 0$, ou seja, $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ são ortogonais entre si.

15.2 Decomposição espectral de um tensor simétrico

Propriedade 2.46: Base própria

É sempre possível encontrar uma base ortonormal formada por autovetores de $\boldsymbol{T}$. Uma base assim é denominada *base própria* ou *principal* e será aqui designada por $\{\,\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3\,\}$. Quando os três auto-

valores λ_i, $i = 1,2,3$, são distintos entre si a verificação é imediata, pois decorre da Propriedade 2.45.

Definição 2.49: Decomposição espectral de um tensor simétrico

A seguinte expressão é denominada *decomposição espectral* do tensor simétrico $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{T} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \, (\hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_i) \, . \tag{2.165}$$

Propriedades 2.47

a) É fácil verificar que

$$\boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{e}}_j = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \, (\hat{\boldsymbol{e}}_i \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_i)\hat{\boldsymbol{e}}_j = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \big(\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j\big)\hat{\boldsymbol{e}}_i = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \delta_{ij} \hat{\boldsymbol{e}}_i = \lambda_{(j)} \hat{\boldsymbol{e}}_{(j)} \, ,$$

onde os parênteses indicam que a convenção da somatória foi suspensa para aquele índice.

b) Lembrando-se de (2.147), de (2.165) pode-se concluir que

$$\boldsymbol{T} = \lambda_3 \boldsymbol{I} + (\lambda_1 - \lambda_3)(\hat{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_1) + (\lambda_2 - \lambda_3)(\hat{\boldsymbol{e}}_2 \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_2) \, . \tag{2.166}$$

c) Quando apenas um autovalor é distinto, ou seja, quando por exemplo $\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3$, (2.166) fornece

$$\boldsymbol{T} = \lambda_3 \boldsymbol{I} + (\lambda_1 - \lambda_3)(\hat{\boldsymbol{e}}_1 \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_1) \, . \tag{2.167}$$

É fácil verificar que se (2.167) é válida então

$$\boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \lambda_1 \hat{\boldsymbol{e}}_1 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{T}\boldsymbol{v} = \lambda_3 \boldsymbol{v} \, , \quad \forall \boldsymbol{v} \perp \hat{\boldsymbol{e}}_1 \, . \tag{2.168}$$

Logo uma base ortonormal formada por $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ e por dois vetores quaisquer ortogonais entre si e ortogonais a $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ é uma base própria. Neste caso, a base própria não é única.

d) Quando os três autovalores são iguais, isto é, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, (2.166) fornece

$$\boldsymbol{T} = \lambda_3 \boldsymbol{I} \, . \tag{2.169}$$

É fácil verificar que

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{v} = \lambda_3 \boldsymbol{v} \, , \quad \forall \boldsymbol{v} \, . \tag{2.170}$$

Logo qualquer base ortonormal é uma base própria.

Propriedade 2.48

Em uma base própria a matriz das componentes de $\boldsymbol{T}$ é diagonal. A verificação é simples, como pode ser vista a seguir

$$\hat{T}_{ij} = \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{e}}_j = \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \lambda_{(j)} \hat{\boldsymbol{e}}_{(j)} = \lambda_{(j)} \delta_{i(j)} \, . \tag{2.171}$$ [13]

15.3 Máximos e mínimos da forma quadrática associada

Neste item o máximo e o mínimo da forma quadrática

$$q(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \tag{2.172}$$

são examinados, onde $\boldsymbol{n}$ é um vetor unitário, isto é,

[13] Os parênteses em (2.171) suspendem a convenção da somatória.

$$\|\boldsymbol{n}\| = 1\,. \tag{2.173}$$

Na base própria de $\boldsymbol{T}$, tem-se $\boldsymbol{n} = \hat{n}_i \hat{\boldsymbol{e}}_i$. Além disso, utilizando-se a decomposição espectral de $\boldsymbol{T}$, nesta base a forma quadrática $q(\boldsymbol{n})$ é dada por

$$q(\boldsymbol{n}) = \lambda_1 \hat{n}_1^2 + \lambda_2 \hat{n}_2^2 + \lambda_3 \hat{n}_3^2\,. \tag{2.174}$$

Utilizando (2.173), ou seja, $\hat{n}_1^2 + \hat{n}_2^2 + \hat{n}_3^2 = 1$, pode-se escrever

$$q(\boldsymbol{n}) = \lambda_3 + (\lambda_1 - \lambda_3)\hat{n}_1^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)\hat{n}_2^2 = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\hat{n}_2^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)\hat{n}_3^2\,. \tag{2.175}$$

Propriedades 2.49: Máximos e mínimos de uma forma quadrática

Levando-se em conta (2.164), conclui-se que $\min q(\boldsymbol{n}) = \lambda_3$ e ocorre para $\hat{n}_1 = \hat{n}_2 = 0$, ou seja, para $\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{e}}_3$. Da mesma forma, conclui-se que $\max q(\boldsymbol{n}) = \lambda_1$ e ocorre para $\hat{n}_2 = \hat{n}_3 = 0$, ou seja, para $\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{e}}_1$.

Observação 2.23

Note-se também que a forma quadrática (2.174) é positiva definida somente se

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0\,. \tag{2.176}$$

Isto decorre imediatamente de (2.174).

Exemplo 2.13

Seja

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então

$$I_1 = 2\,, \quad J_2 = \frac{7}{3} \quad \text{e} \quad \theta\text{=0,713724379}\,.$$

Logo, de (2.162), tem-se

$$\lambda_1 = 2\,, \quad \lambda_2 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = -1\,.$$

Para se determinar $\hat{\boldsymbol{e}}_1$, utiliza-se as duas primeiras equações de (2.149), obtendo-se

$$\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{e}_3\,.$$

Para se determinar $\hat{\boldsymbol{e}}_2$, utiliza-se as duas últimas equações de (2.149) (Por que?), obtendo-se

$$\hat{\boldsymbol{e}}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}_2\,.$$

Para se determinar $\hat{\boldsymbol{e}}_3$ utiliza-se o produto vetorial $\hat{\boldsymbol{e}}_1 \times \hat{\boldsymbol{e}}_2$, obtendo-se

$$\hat{\boldsymbol{e}}_3 = \frac{\sqrt{6}}{6}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{6}}{6}\boldsymbol{e}_2 - \frac{\sqrt{6}}{3}\boldsymbol{e}_3\,.$$

Na base própria

$$\left[\hat{T}_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercícios 2.16

a) Seja o tensor simétrico $\boldsymbol{T}$, cuja matriz é

$$\left[T_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Determine os autovalores e autovetores de $\boldsymbol{T}$.

b) Seja o tensor $\boldsymbol{T}$, cuja matriz é

$$\left[T_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine os autovalores e autovetores de $\boldsymbol{T}$.

c) Mostre que o tensor $\boldsymbol{T}^{\mathrm{a}} = \mathrm{Dev}(\boldsymbol{T})$ tem os mesmos autovetores que $\boldsymbol{T}$ e que os seus autovalores são dados por

$$\lambda_i^{\mathrm{a}} = \lambda_i - \frac{1}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3). \tag{2.177}$$

16 Tensores de Terceira Ordem

O conceito de tensor pode ser generalizado. Neste item, introduz-se o conceito de tensor de terceira ordem.

Definição 2.50: Tensor de terceira ordem

Chama-se tensor de terceira ordem ao operador linear $\boldsymbol{\mathcal{A}} : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{T}_3$, que a cada vetor $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}_3$ associa um e somente um tensor $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{T}_3$, grafado $\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{x}$, de modo que

a) $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{y}), \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{V}_3;$

b) $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}_3.$

Definição 2.51: Produto tensorial entre um tensor de segunda ordem e um vetor

O produto tensorial entre um tensor de segunda ordem $\boldsymbol{A}$ e um vetor $\boldsymbol{a}$, grafado por $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{a}$, resulta em um tensor de terceira ordem $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ tal que

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{a})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a} : \boldsymbol{x})\boldsymbol{A}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}_3. \tag{2.178}$$

Definição 2.52: Produto tensorial entre um vetor e um tensor de segunda ordem

O produto tensorial entre um vetor $\boldsymbol{b}$ e um tensor de segunda ordem $\boldsymbol{B}$, grafado por $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{b}$, que resulta em um tensor de terceira ordem $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ tal que

$$(\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{B})\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{B} : \boldsymbol{X})\boldsymbol{B}\,, \quad \forall \boldsymbol{X} \in \mathcal{T}_3. \tag{2.179}$$

Observação 2.24

Tendo em vista (2.179), pode–se alternativamente definir um tensor de terceira ordem como um operador linear que associa a um vetor $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}_3$ um e somente um tensor de segunda ordem $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x})$. Note-se que, em geral,

$$\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{a}\,. \tag{2.180}$$

Propriedades 2.50

a) Um tensor de terceira ordem pode ser expresso por

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} = A_{ijk}\left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k\right), \tag{2.181}$$

onde A_{ijk} são as componentes de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ na base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, as quais podem ser obtidas por meio de

$$A_{ijk} = \left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right) : (\boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}}\left(\boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k\right). \tag{2.182}$$

b) As componentes de $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{A}$, onde $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_3$ e $\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}_3$, na base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ são

$$A_{ijk} = a_i A_{jk}\,. \tag{2.183}$$

c) As componentes de $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{a}$, onde $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_3$ e $\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}_3$, na base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ são

$$A_{ijk} = A_{ij} a_k\,. \tag{2.184}$$

Definição 2.53: Transposição de tensor de terceira ordem

O transposto de um tensor de terceira ordem é definido por

$$\boldsymbol{X} : \boldsymbol{\mathcal{A}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}}^T \boldsymbol{X}\,, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}_3, \forall \boldsymbol{X} \in \mathcal{T}_3. \tag{2.185}$$

Propriedades 2.51

a) A partir de (2.185) e (2.182) pode-se concluir que

$$A^T_{ijk} = A_{kij}\,. \tag{2.186}$$

b) Se $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{A}$, onde $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_3$ e $\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}_3$, então

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^T = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{a}\,. \tag{2.187}$$

c) Se $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{a}$, onde $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}_3$ e $\boldsymbol{A} \in \mathcal{T}_3$, então

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^T = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{A}\,. \tag{2.188}$$

Exemplo 2.14: Tensores

Seja o tensor de segunda ordem expresso por $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}_i \otimes \boldsymbol{e}_i$ em uma base ortonormal $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Se $\boldsymbol{T}$ é dado por

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{S}\,, \tag{2.189}$$

onde $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{S}$ são tensores de segunda ordem, sendo $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f}_i \otimes \boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{S}$ simétrico, então

$$\boldsymbol{t}_i = \boldsymbol{F}\boldsymbol{S}\boldsymbol{e}_i = \big(\boldsymbol{f}_j \otimes \boldsymbol{e}_j\big)\boldsymbol{S}\boldsymbol{e}_i = \big(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{S}\boldsymbol{e}_i\big)\boldsymbol{f}_j = S_{ij}\boldsymbol{f}_j \ . \tag{2.190}$$

Portanto, existem três tensores de terceira ordem, dados por

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_i = \mathrm{Sym}\big(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\big) \otimes \boldsymbol{f}_j \ , \tag{2.191}$$

tais que

$$\boldsymbol{t}_i = \boldsymbol{\mathcal{B}}_i^T \boldsymbol{S} \ . \tag{2.192}$$

Suponha-se agora que $\boldsymbol{S}$ seja dado por

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{T} \ , \tag{2.193}$$

então, tem-se que

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\mathcal{B}}_i \boldsymbol{t}_i \ . \tag{2.194}$$

17 Tensores de Quarta Ordem

Neste texto necessita-se da noção de tensor de quarta ordem. Para isso definem-se abaixo operadores tensoriais.

Definição 2.54: Operador tensorial

Chama-se *operador tensorial* em $\mathcal{T}_3$ a toda aplicação $\mathbb{D} : \mathcal{T}_3 \to \mathcal{T}_3$, que a cada tensor $\boldsymbol{X} \in \mathcal{T}_3$ associa um e só um tensor $\mathbb{D}(\boldsymbol{X}) \in \mathcal{T}_3$, de modo que

a) $\mathbb{D}(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}) = \mathbb{D}(\boldsymbol{X}) + \mathbb{D}(\boldsymbol{Y}), \quad \forall \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathcal{T}_3$;

b) $\mathbb{D}(a\boldsymbol{X}) = a\mathbb{D}(\boldsymbol{X}), \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{X} \in \mathcal{T}_3$.

Propriedades 2.52

a) Um operador tensorial $\mathbb{D}$ fica inteiramente caracterizado em uma base $\boldsymbol{E}_{ij}$, $i, j = 1,2,3$, pelo conhecimento dos tensores $\mathbb{D}\big(\boldsymbol{E}_{ij}\big)$. Para se verificar isto, seja $\boldsymbol{X} = X_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}$. Utilizando as propriedades dos operadores tensoriais, tem-se

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{D}\big(X_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}\big) = X_{ij}\mathbb{D}\big(\boldsymbol{E}_{ij}\big) . \tag{2.195}$$

b) Denotando-se as componentes do tensor $\mathbb{D}(\boldsymbol{E}_{kl})$ na base $\boldsymbol{E}_{ij}$, $i, j = 1,2,3$, por D_{ijkl}, de modo que

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{E}_{kl}) = D_{ijkl}\boldsymbol{E}_{ij} \ , \tag{2.196}$$

tem-se

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{X}) = \mathbb{D}(X_{kl}\boldsymbol{E}_{kl}) = X_{kl}\mathbb{D}(\boldsymbol{E}_{kl}) = D_{ijkl}X_{kl}\boldsymbol{E}_{ij} \ . \tag{2.197}$$

c) Logo, se $\boldsymbol{Y} = \mathbb{D}(\boldsymbol{X})$, então as componentes de $\boldsymbol{Y}$ na base $\boldsymbol{E}_{ij} = \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$, $i, j = 1,2,3$, são dadas por

$$Y_{ij} = D_{ijkl}X_{kl} \ . \tag{2.198}$$

D_{ijkl} são as componentes do operador $\mathbb{D}$ na base $\boldsymbol{E}_{ij}$, $i, j = 1,2,3$.

Definição 2.55: Tensor de quarta ordem

Tensores de quarta ordem são entendidos neste texto como operadores tensoriais. Um tensor $\mathbb{D}$ representa um operador tensorial em $\mathcal{T}_3$, grafado por $\mathbb{D}(\boldsymbol{X}) = \mathbb{D}\boldsymbol{X}$.

Definição 2.56: Produto tensorial entre tensores de segunda ordem

O produto tensorial de dois tensores $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in \mathcal{T}_3$, indicado por $\otimes$, gera um *tensor de quarta ordem*, denotado por $\mathbb{D} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$, que representa um operador tensorial $\mathbb{D}$ de tal modo que, se

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{B} : \boldsymbol{X})\boldsymbol{A}\,, \quad \forall \boldsymbol{X} \in \mathcal{T}_3\,, \tag{2.199}$$

então

$$\mathbb{D}\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{B} : \boldsymbol{X})\boldsymbol{A} = \mathbb{D}(\boldsymbol{X})\,. \tag{2.200}$$

Propriedades 2.53

O produto tensorial de dois tensores possui as seguintes propriedades de bilinearidade, que podem ser verificadas facilmente através da definição acima:

a) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \otimes \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{C}, \forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C} \in \mathcal{T}_3$;

b) $\boldsymbol{A} \otimes (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{C}, \forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C} \in \mathcal{T}_3$;

c) $(a\boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \otimes (a\boldsymbol{B}) = a(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}), \forall a \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in \mathcal{T}_3$.

Por causa destas propriedades a nomenclatura de produto fica justificada.

Propriedade 2.54

O produto tensorial de dois tensores fica inteiramente caracterizado em uma base ortonormal $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ pelo conhecimento dos produtos tensoriais dos vetores da base, ou seja, dos tensores

$$\mathbb{E}_{ijkl} = \boldsymbol{E}_{ij} \otimes \boldsymbol{E}_{kl} = \left(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j\right) \otimes (\boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l)\,, \quad i,j,k,l = 1,2,3\,. \tag{2.201}$$

Esta propriedade é verificada rapidamente abaixo

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \left(A_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}\right) \otimes (B_{kl}\boldsymbol{E}_{kl}) = A_{ij}B_{kl}\left(\boldsymbol{E}_{ij} \otimes \boldsymbol{E}_{kl}\right) = A_{ij}B_{kl}\mathbb{E}_{ijkl}\,. \tag{2.202}$$

Definição 2.57: Espaço tensorial de quarta ordem

O conjunto de todos os tensores de quarta ordem é aqui designado por $\mathcal{T}_3^4$ e denominado *espaço tensorial de quarta ordem*. Ele é um espaço vetorial de dimensão $3^4 = 81$, como se pode concluir a partir de (2.202)[14], sendo que as grandezas $\mathbb{E}_{ij}$ formam uma base deste espaço.

Definição 2.58: Transposição de um tensor de quarta ordem

O tensor $\mathbb{D}^T$ é dito o tensor *transposto* de $\mathbb{D}$ se

$$\boldsymbol{X} : \mathbb{D}\boldsymbol{Y} = \mathbb{D}^T\boldsymbol{X} : \boldsymbol{Y}\,, \quad \forall \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\,. \tag{2.203}$$

Exercício 2.17

Mostre que:

[14] Generalizando-se, um espaço tensorial $\mathcal{T}_n^m$ é um espaço vetorial de dimensão n^m.

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{A} \,. \tag{2.204}$$

Definição 2.59: Tensores de quarta ordem simétricos

O tensor $\mathbb{D}$ é *simétrico* se

$$\mathbb{D}^T = \mathbb{D} \,. \tag{2.205}$$

Propriedade 2.55

O tensor $\mathbb{D}$, cujas componentes em uma base ortonormal $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ são D_{ijkl}, é dado por

$$\mathbb{D} = D_{ijkl}\mathbb{E}_{ijkl} \,. \tag{2.206}$$

D_{ijkl} são as componentes do tensor $\mathbb{D}$ na base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$.

Propriedades 2.56

a) As componentes de um tensor $\mathbb{D}$ na base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ são dadas por

$$D_{ijkl} = \boldsymbol{E}_{ij} : \mathbb{D}\boldsymbol{E}_{kl} \,. \tag{2.207}$$

b) Veja que as componentes de $\mathbb{D} = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ em uma base ortonormal são dadas por

$$D_{ijkl} = A_{ij}B_{kl} \,. \tag{2.208}$$

Definição 2.60: Tensor nulo

O tensor $\mathbb{O}$ tal que

$$\mathbb{O}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O} \,, \quad \forall \boldsymbol{X} \in \mathcal{T}_3 \,, \tag{2.209}$$

é denominado *tensor nulo*.

Definição 2.61: Tensor identidade

O tensor $\mathbb{I}$ tal que

$$\mathbb{I}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X} \,, \quad \forall \boldsymbol{X} \in \mathcal{T}_3 \,, \tag{2.210}$$

é denominado *tensor identidade*.

Definição 2.62: Dois novos produtos tensoriais

Podem-se definir mais dois produtos tensoriais entre dois tensores de segunda ordem. Estes produtos tensoriais podem ser úteis em diversos contextos. Os tensores dados pelos produtos $\mathbb{C} = \boldsymbol{A} \underline{\otimes} \boldsymbol{B}$ e $\mathbb{D} = \boldsymbol{A} \bar{\otimes} \boldsymbol{B}$ são tais que, por definição,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\boldsymbol{X} &= (\boldsymbol{A} \underline{\otimes} \boldsymbol{B})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}\boldsymbol{B} \quad \text{e} \\ \mathbb{D}\boldsymbol{X} &= (\boldsymbol{A} \bar{\otimes} \boldsymbol{B})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{B} \,, \end{aligned} \tag{2.211}$$

respectivamente.

Propriedades 2.57

As componentes de $\mathbb{C} = \boldsymbol{A} \underline{\otimes} \boldsymbol{B}$ e $\mathbb{D} = \boldsymbol{A} \bar{\otimes} \boldsymbol{B}$ em uma base ortonormal são respectivamente dadas por

$$C_{ijkl} = A_{ki}B_{lj} \quad \text{e} \quad D_{ijkl} = A_{li}B_{kj} \ . \tag{2.212}$$

Observação 2.25: Tensor identidade

Note-se que

$$\mathbb{I} = \boldsymbol{I} \underline{\otimes} \boldsymbol{I} \ . \tag{2.213}$$

Logo, as componentes de $\mathbb{I}$ em uma base ortonormal são

$$I_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} \ . \tag{2.214}$$

Exercícios 2.18

Mostre que:

$$(\boldsymbol{A} \underline{\otimes} \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T \underline{\otimes} \boldsymbol{B}^T \quad \text{e} \quad (\boldsymbol{A} \bar{\otimes} \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B} \bar{\otimes} \boldsymbol{A} \ . \tag{2.215}$$

Exemplos 2.15

Podem-se definir os tensores simétricos

$$\mathbb{I}_S = \frac{1}{2}(\boldsymbol{I} \underline{\otimes} \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \bar{\otimes} \boldsymbol{I}) \quad \text{e} \quad \mathbb{I}_A = \frac{1}{2}(\boldsymbol{I} \underline{\otimes} \boldsymbol{I} - \boldsymbol{I} \bar{\otimes} \boldsymbol{I}) \ , \tag{2.216}$$

tais que

$$\text{Sym}(\boldsymbol{T}) = \mathbb{I}_S \boldsymbol{T} \quad \text{e} \quad \text{Skew}(\boldsymbol{T}) = \mathbb{I}_A \boldsymbol{T} \ . \tag{2.217}$$

Propriedades 2.58

a) $\mathbb{I}_S$ pode ser utilizado como identidade em $\mathcal{S}_3$, uma vez que

$$\boldsymbol{T} = \mathbb{I}_S \boldsymbol{T} \ , \quad \forall \boldsymbol{T} \in \mathcal{S}_3 \ . \tag{2.218}$$

b) $\mathbb{I}_A$ pode ser utilizado como identidade em $\mathcal{A}_3$, uma vez que

$$\boldsymbol{T} = \mathbb{I}_A \boldsymbol{T} \ , \quad \forall \boldsymbol{T} \in \mathcal{A}_3 \ . \tag{2.219}$$

c) Os tensores de (2.216) têm as seguintes propriedades

$$\mathbb{I}_S^2 = \mathbb{I}_S \ , \quad \mathbb{I}_A^2 = \mathbb{I}_A \quad \text{e} \quad \mathbb{I}_S \mathbb{I}_A = \mathbb{O} \ . \tag{2.220}$$

que, respectivamente, refletem os seguintes fatos:

$$\begin{aligned} &\text{Sym}(\text{Sym}(\boldsymbol{T})) = \text{Sym}(\boldsymbol{T}) \ , \\ &\text{Skew}(\text{Skew}(\boldsymbol{T})) = \text{Skew}(\boldsymbol{T}) \quad \text{e} \\ &\text{Sym}(\text{Skew}(\boldsymbol{T})) = \boldsymbol{O} \ , \quad \forall \boldsymbol{T} \in \mathcal{T}_3. \end{aligned} \tag{2.221}$$

d) De (2.203) e (2.220) decorrem

$$\begin{aligned} &\text{Sym}(\boldsymbol{S}) : \boldsymbol{T} = \boldsymbol{S} : \text{Sym}(\boldsymbol{T}) \ , \quad \forall \boldsymbol{S}, \boldsymbol{T} \in \mathcal{T}_3 \ , \\ &\boldsymbol{S} : \boldsymbol{T} = \text{Sym}(\boldsymbol{S}) : \text{Sym}(\boldsymbol{T}) + \text{Skew}(\boldsymbol{S}) : \text{Skew}(\boldsymbol{T}) \ , \quad \forall \boldsymbol{S}, \boldsymbol{T} \in \mathcal{T}_3 \ , \quad \text{e} \\ &\text{Sym}(\boldsymbol{S}) : \text{Skew}(\boldsymbol{T}) = 0 \ , \quad \forall \boldsymbol{S}, \boldsymbol{T} \in \mathcal{T}_3 \ . \end{aligned} \tag{2.222}$$

Exemplo 2.16

Veja também que

$$\mathrm{Sph}(\boldsymbol{X}) = \left(\frac{1}{3}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{X} \quad \text{e} \quad \mathrm{Dev}(\boldsymbol{X}) = \mathbb{I}_D\boldsymbol{X}\ , \tag{2.223}$$

onde

$$\mathbb{I}_D = \mathbb{I}_S - \frac{1}{3}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I}\ . \tag{2.224}$$

Exemplo 2.17: Material elástico isótropo linear

Sejam $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{E}$ tensores de segunda ordem simétricos de tensão e deformação, respectivamente. Um material é dito *elástico linear* se houver uma aplicação linear que associa a cada estado de deformação um único estado de tensão. Logo existe um tensor de quarta ordem $\mathbb{D}$, denominado tensor dos módulos de rigidez elástica, tal que

$$\boldsymbol{T} = \mathbb{D}\boldsymbol{E}\ . \tag{2.225}$$

Um material elástico linear é dito isótropo se o tensor $\mathbb{D}$ satisfizer a seguinte relação de simetria

$$\boldsymbol{R}^T\left(\mathbb{D}\left(\boldsymbol{R}\boldsymbol{E}\boldsymbol{R}^T\right)\right)\boldsymbol{R} = \mathbb{D}\boldsymbol{E}\ , \quad \forall\boldsymbol{R}\in\mathcal{R}_3\ . \tag{2.226}$$

Exercícios 2.19

a) Demonstre de forma análoga a (2.32) e (2.94) que a mudança de base de tensores de quarta ordem é dada por

$$\bar{D}_{ijkl} = \bar{m}_{im}\bar{m}_{jn}\bar{m}_{ko}\bar{m}_{lp}D_{mnop}\ . \tag{2.227}$$

b) Mostre que o tensor

$$\mathbb{D} = \lambda(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I}) + \mu\mathbb{I}_S\ , \tag{2.228}$$

onde λ e μ são parâmetros do material, descreve um material elástico linear isótropo.

Propriedades 2.59

a) Se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são simétricos, então apenas $\boldsymbol{A}\underline{\otimes}\boldsymbol{B}$ é simétrico.

b) Se $\boldsymbol{A}$ é simétrico, então $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}\bar{\otimes}\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{A}\underline{\otimes}\boldsymbol{A}$ também são.

c) Se $\boldsymbol{A}$ não é simétrico, então apenas $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{A}\bar{\otimes}\boldsymbol{A}$ são simétricos.

d) Sejam $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{E}$ tensores de segunda ordem simétricos de tensão e deformação, respectivamente. O tensor dos módulos de rigidez elástica (2.225) obedece às seguintes relações de simetria

$$\mathbb{D} = \mathbb{I}_S\mathbb{D} = \mathbb{D}\mathbb{I}_S\ . \tag{2.229}$$

Observação 2.26

As simetrias (2.229) são conhecidas como *simetrias menores* de $\mathbb{D}$.

3

Elementos de Cálculo Diferencial

1 Funções

As definições de funções de uma ou mais variáveis reais são apresentadas a seguir.

Definição 3.1: Funções de uma variável real

Seja $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$. Uma *função de uma variável real* de nome f associa a cada elemento de $x \in \Omega$ um único elemento y de $\mathbb{R}$. A notação utilizada é $f : \Omega \to \mathbb{R}$, tal que se $x \in \Omega$ então $y = f(x)$. Ω é denominado *domínio* da função f.

Definição 3.2: Funções de n variáveis reais

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de $\mathbb{R}^n$ (não pode ser uma hiper-superfície). Uma *função de n variáveis reais* f associa a cada elemento de $\boldsymbol{x} \in \Omega$ um único elemento y de $\mathbb{R}$. A notação utilizada é $f : \Omega \to \mathbb{R}$, tal que se $\boldsymbol{x} \in \Omega$ então $y = f(\boldsymbol{x})$. Ω é denominado *domínio* da função f.

Observação 3.1

Para se economizar símbolos adota-se ao longo do texto o mesmo símbolo para o nome da função e para a imagem, com a notação $y = \hat{y}(\boldsymbol{x})$.

2 Diferenciais e Derivadas

Neste item as definições de diferenciais e derivadas são apresentadas de uma forma que facilite a compreensão dos elementos de Cálculo Variacional no Capítulo 5.

Definição 3.3: Diferencial de uma função de uma variável

Seja x a variável da função $f : \Omega = (a,b) \to \mathbb{R}$. Considere-se um acréscimo $dx \in d\Omega \subset \mathbb{R}$ desta variável de modo que $x + dx \in \Omega$. Associado a este acréscimo está o acréscimo da função f em

x dado por $f(x+dx)-f(x)$. Diz-se que f é *diferenciável* em $x \in \Omega$ se existir o seguinte limite

$$\lim_{|dx|\to 0} \frac{f(x+dx)-f(x)-df(x,dx)}{|dx|} = 0\,, \tag{3.1}$$

onde $df : \Omega \times d\Omega \to \mathbb{R}$ é uma função nas duas variáveis reais x e dx, sendo linear em dx, isto é

$$df(x,\alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2) = \alpha_1 df(x,dx_1) + \alpha_2 df(x,dx_2),\ \forall dx_1, dx_2 \in d\Omega, \forall \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{3.2}$$

A função df é denominada *diferencial* de f em x. dx é denominada diferencial de x em x e ao conjunto $d\Omega \subset \mathbb{R}$, ao qual as diferenciais dx em x pertencem, tal que $x+dx \in \Omega$, dá-se o nome de conjunto das diferenciais possíveis de x.

Definição 3.4: Derivada

À função $f' : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$f'(x)dx = df(x,dx), \quad \forall dx \in d\Omega, \tag{3.3}$$

dá-se o nome de *derivada* de f em x.

Observação 3.2

É fácil verificar que

$$f'(x) = df(x,1) = \frac{df}{dx}. \tag{3.4}$$

Esta última expressão justifica a notação criada por Leibniz[15] para a derivada de uma função.

Exemplo 3.1

Seja, por exemplo, a função

$$f(x) = x^2\,.$$

O seu acréscimo em x é dado por

$$f(x+dx)-f(x) = (x+dx)^2 - x^2 = 2xdx + dx^2\,.$$

Logo o limite (3.1) existe se

$$df = 2xdx\,.$$

Finalmente, tem-se

$$f'(x) = 2x\,.$$

Definição 3.5: Diferencial de funções de n variáveis reais

Seja $\boldsymbol{x}$ a variável da função $f : \Omega \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Considere-se um acréscimo $d\boldsymbol{x} \in d\Omega \subset \mathbb{R}^n$ desta variável de modo que $\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x} \in \Omega$. Associado a este acréscimo está o acréscimo da função f em $\boldsymbol{x}$ dado por $f(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})$. Diz-se que f é *diferenciável* em $\boldsymbol{x} \in \Omega$ se existir o seguinte limite

$$\lim_{\|d\boldsymbol{x}\|\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x})-df(\boldsymbol{x},d\boldsymbol{x})}{\|d\boldsymbol{x}\|}\,, \tag{3.5}$$

[15] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

onde $df : \Omega \times \partial\Omega \to \mathbb{R}$ é uma função nas variáveis $\boldsymbol{x}$ e $d\boldsymbol{x}$, sendo linear em $d\boldsymbol{x}$, isto é

$$df(\boldsymbol{x}, \alpha_1 d\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 d\boldsymbol{x}_2) = \alpha_1 df(\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x}_1) + \alpha_2 df(\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x}_2), \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall d\boldsymbol{x}_1, d\boldsymbol{x}_2 \in d\Omega . \quad (3.6)$$

A função df é denominada *diferencial* de f em $\boldsymbol{x}$.

Definição 3.6: Gradiente de uma função

A função vetorial $\nabla f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\nabla f \cdot d\boldsymbol{x} = df, \forall d\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.7)$$

é denominada *gradiente* de f.

Observação 3.3

Outra notação para o gradiente é

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} . \quad (3.8)$$

Exemplo 3.2

Seja, por exemplo, a função

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} .$$

O seu acréscimo em $\boldsymbol{x}$ é dado por

$$f(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{x} + \|d\boldsymbol{x}\|^2 .$$

Logo o limite (3.1) existe se

$$df = 2\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{x} .$$

Finalmente, tem-se

$$\nabla f = 2\boldsymbol{x} .$$

Definição 3.7: Derivada direcional

Seja $\boldsymbol{x}$ a variável da função $f : \Omega \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Considere um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ e uma direção $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ de modo que $\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{\xi} \in \Omega$. Diz-se que f é *diferenciável* em $\boldsymbol{x} \in \Omega$ *na direção de* $\boldsymbol{\xi}$ se existir o seguinte limite

$$Df(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{\xi}] = \lim_{|\alpha| \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{\xi}) - f(\boldsymbol{x})}{|\alpha|} . \quad (3.9)$$

A função $Df(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{\xi}]$ é denominada *derivada* de f *em* $\boldsymbol{x}$ *na direção de* $\boldsymbol{\xi}$. Se esta derivada for linear em $\boldsymbol{\xi}$, tem-se que

$$df(\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x}) = Df(\boldsymbol{x})[d\boldsymbol{x}] . \quad (3.10)$$

Observação 3.4

Seja a função de uma variável real

$$\varphi(\alpha) = f(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{\xi}) , \quad (3.11)$$

então (3.9) determina que

$$Df(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{\xi}] = \varphi'(0)\,. \tag{3.12}$$

Esta é a maneira mais prática de se calcular a derivada direcional de uma função de n variáveis reais.

Exemplo 3.3

Seja, por exemplo, a função

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}\,.$$

Assim

$$\varphi(\alpha) = (\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{\xi})\cdot(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} + 2\alpha\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi} + \alpha^2\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}$$

e

$$Df(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{\xi}] = \varphi'(0) = 2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}\,.$$

3 Extremos

Definição 3.8: Mínimo de uma função

Diz-se que uma função $f:\Omega\to\mathbb{R}$ tem um *mínimo local* em $\boldsymbol{x}_0$ se existir uma vizinhança de $\boldsymbol{x}_0$ dada por $\mathcal{V}(\boldsymbol{x}_0) = \{\boldsymbol{x} \mid d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0) < h\}$, na qual

$$f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}_0), \quad \forall \boldsymbol{x}\in\mathcal{V}(\boldsymbol{x}_0)\,. \tag{3.13}$$

Diz-se que este mínimo é *global* se

$$f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}_0), \quad \forall \boldsymbol{x}\in\Omega\,. \tag{3.14}$$

Diz-se que o mínimo é *estrito* se

$$f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x}_0), \quad \forall \boldsymbol{x}\in\mathcal{V}(\boldsymbol{x}_0)\,. \tag{3.15}$$

Observação 3.5

Diz-se que um máximo ou mínimo local de uma função é um *extremo* da função e o correspondente $\boldsymbol{x}_0$ é um *extremante*.

Observação 3.6

Se a função $f:\Omega\to\mathbb{R}$ tem um máximo local em $\boldsymbol{x}_0$, então a função $(-f)$ tem um mínimo local em $\boldsymbol{x}_0$. Portanto basta estudar-se o caso dos mínimos.

3.1 Condições Necessárias para Extremos

Uma função $f:\Omega\to\mathbb{R}$ tem um *extremo* em $\boldsymbol{x}_0$ se

$$df(\boldsymbol{x}_0, d\boldsymbol{x}) = 0, \quad \forall d\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\,. \tag{3.16}$$

Pontos $\boldsymbol{x}_0$ onde (3.16) ocorre são chamados de *pontos estacionários*. Correspondentemente, diz-se que f é *estacionária* em $\boldsymbol{x}_0$. A condição acima é apenas necessária pois (3.16) pode caracterizar também um ponto de inflexão (se $n=1$) ou de sela (se $n>1$). Além disso (3.16) é uma condição necessária apenas para funções lisas ou diferenciáveis.

Observação 3.7

Se $n = 1$ a condição (3.16) acima pode ser colocada da seguinte forma

$$f'(x_0) = 0\,. \tag{3.17}$$

Observação 3.8

Se $n > 1$ a condição (3.16) acima pode ser colocada da seguinte forma

$$\nabla f = \boldsymbol{o}\,. \tag{3.18}$$

3.2 Condições para mínimos locais

Formulam-se a seguir algumas condições necessárias e suficientes para mínimos locais de funções. Para isso necessita-se do conceito de segunda derivada de uma função.

Definição 3.9: Segunda derivada

A função $D^2 f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{\xi}]$ abaixo é denominada *segunda derivada* de f *em* $\boldsymbol{x}$

$$D^2 f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{\xi}] = D(Df(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{\xi}])[\boldsymbol{\xi}]\,. \tag{3.19}$$

Outra notação é

$$d^2 f(\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x}) = D^2 f(\boldsymbol{x})[d\boldsymbol{x}]\,. \tag{3.20}$$

Observação 3.9

Se a seguinte função de uma variável real for definida

$$\varphi(\alpha) = f(\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{\xi})\,, \tag{3.21}$$

então (3.19) determina que

$$D^2 f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{\xi}] = \varphi''(0)\,. \tag{3.22}$$

Esta é a maneira mais prática de se calcular a segunda derivada de uma função de n variáveis reais.

Exemplo 3.4

Seja, por exemplo, a função

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}\,.$$

Assim

$$\varphi(\alpha) = (\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{\xi}) \cdot (\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} + 2\alpha\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\xi} + \alpha^2 \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}$$

e

$$D^2 f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{\xi}] = \varphi''(0) = 2\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}\,.$$

Definição 3.10: Matriz Hessiana

A matriz simétrica $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ tal que

$$d^2 f(\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x}) = d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{H} d\boldsymbol{x} \quad \text{ou} \quad D^2 f(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{\xi}] = \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{H}\boldsymbol{\xi} \tag{3.23}$$

é denominada *Hessiana* de f.

Exemplo 3.5

Seja, por exemplo, a função do Exemplo 3.4 acima. A Hessiana é dada por $\boldsymbol{H} = 2\boldsymbol{I}$, onde $\boldsymbol{I}$ é a matriz identidade.

3.2.1 Condição necessária para mínimo local de uma função

Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tem um *mínimo local* em $\boldsymbol{x}_0$ se

$$df(\boldsymbol{x}_0, d\boldsymbol{x}) = 0, \quad \forall d\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad d^2 f(\boldsymbol{x}_0, d\boldsymbol{x}) \geq 0, \quad \forall d\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{3.24}$$

A condição acima é apenas necessária, pois pode caracterizar também um ponto de inflexão (se $n = 1$) ou de sela (se $n > 1$).

Observação 3.10

Quando $n = 1$ a condição (3.24) pode ser expressa como

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad f''(x_0) \geq 0\,. \tag{3.25}$$

3.2.2 Condição suficiente para mínimo local de uma função

Se

$$df(\boldsymbol{x}_0, d\boldsymbol{x}) = 0, \quad \forall d\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad d^2 f(\boldsymbol{x}_0, d\boldsymbol{x}) > 0, \quad \forall d\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o} \in \mathbb{R}^n\,, \tag{3.26}$$

então a função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tem um *mínimo local* em $\boldsymbol{x}_0$.

Observação 3.11

Quando $n = 1$ a condição (3.26) pode ser expressa como

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad f''(x_0) > 0\,. \tag{3.27}$$

4 Convexidade

As condições da seção anterior exigem um grau de continuidade nem sempre disponível. Uma condição mais abrangente para a existência de um mínimo local é a convexidade.

Definição 3.11: Convexidade de um domínio

Ω é *convexo* se

$$(1-\theta)\boldsymbol{x}_a + \theta\boldsymbol{x}_b \in \Omega, \quad \forall \boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{x}_b \in \Omega \text{ e } \theta \in [0,1]. \tag{3.28}$$

Figura 3.1: Domínio convexo e domínio não convexo

Definição 3.12: Convexidade de uma função

Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita *convexa* se Ω for convexo e

$$f((1-\theta)\boldsymbol{x}_a + \theta\boldsymbol{x}_b) \leq (1-\theta)f(\boldsymbol{x}_a) + \theta f(\boldsymbol{x}_b), \quad \forall \boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{x}_b \in \Omega \text{ e } \theta \in [0,1]. \tag{3.29}$$

Se

$$f((1-\theta)\boldsymbol{x}_a + \theta\boldsymbol{x}_b) < (1-\theta)f(\boldsymbol{x}_a) + \theta f(\boldsymbol{x}_b), \quad \forall \boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{x}_b \in \Omega \text{ e } \theta \in [0,1], \tag{3.30}$$

ela é dita *estritamente convexa*.

Observação 3.12

Funções convexas possuem pelo menos um mínimo global. Quando $\Omega = \mathbb{R}^n$ e elas são estritamente convexas este mínimo não só existe como é único, conforme a Figura 3.2

Figura 3.2: Função convexa e estritamente convexa

4.1.1 Condição necessária e suficiente para a convexidade de uma função

Uma função diferenciável $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é convexa se e somente se

$$f(\boldsymbol{x}_b) - f(\boldsymbol{x}_a) \geq df(\boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{x}_b - \boldsymbol{x}_a), \quad \forall \boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{x}_b \in \Omega\,. \tag{3.31}$$

Uma função diferenciável $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é estritamente convexa se e somente se

$$f(\boldsymbol{x}_b) - f(\boldsymbol{x}_a) > df(\boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{x}_b - \boldsymbol{x}_a), \quad \forall \boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{x}_b \in \Omega\,. \tag{3.32}$$

Exemplo 3.6

A função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{com } a > 0,$$

é estritamente convexa, pois

$$f(x_b) - f(x_a) - df(x_a, x_b - x_a) = a(x_b - x_a)^2 \geq 0.$$

Logo f tem um único mínimo em $\mathbb{R}$.

5 Elementos de análise tensorial

5.1 Campos tensoriais

Definição 3.13: Referencial geométrico

Ao conjunto $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, com O pertencente ao espaço afim Euclidiano de dimensão 3, aqui indicado por $\mathcal{E}_3$, e com $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ sendo uma base ortonormal do espaço vetorial Euclidiano de dimensão 3, aqui indicado por $\mathcal{V}_3$, dá-se o nome de *referencial geométrico*.

Definição 3.14: Sistema de coordenadas cartesianas

A posição de um ponto $X \in \mathcal{E}_3$ pode ser descrita pelo vetor posição dado por

$$\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX} \,. \tag{3.33}$$

Na base do referencial geométrico, $\boldsymbol{x}$ pode ser representado por

$$\boldsymbol{x} = x_i \boldsymbol{e}_i \,, \tag{3.34}$$

onde as componentes x_i são denominadas de *coordenadas cartesianas* de X. O referencial geométrico estabelece, portanto, o que se chama um *sistema de coordenadas cartesianas*.

Definição 3.15: Campo escalar

Seja V uma região de $\mathcal{E}_3$. Um *campo escalar* é uma aplicação $\hat{u} : V \to \mathbb{R}$, isto é, $\hat{u}$ associa a cada ponto X de V um único número real u.

Observação 3.13

Um campo escalar pode ser expresso por meio de

$$u = \hat{u}(\boldsymbol{x}) \tag{3.35}$$

ou por

$$u = \hat{u}(x_i) \,. \tag{3.36}$$

Exemplo 3.7

Seja V a região ocupada por um sólido; a aplicação $\theta = \hat{\theta}(\boldsymbol{x})$ que associa a cada ponto material sua temperatura θ é um campo escalar.

Definição 3.16: Campo vetorial

Seja V uma região de $\mathcal{E}_3$. Um *campo vetorial* é uma aplicação $\hat{\boldsymbol{v}} : V \to \mathcal{V}_3$, isto é, $\hat{\boldsymbol{v}}$ associa a cada ponto X de V um único vetor $\boldsymbol{v}$.

Observação 3.14

Um campo vetorial pode ser expresso por meio de

$$\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) \tag{3.37}$$

ou, lembrando-se que na base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ se tem $\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{e}_i$,

$$v_i = \hat{v}_i\left(x_j\right) . \tag{3.38}$$

Exemplo 3.8

Seja V a região ocupada por um sólido; a aplicação $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$ que associa a cada partícula seu deslocamento $\boldsymbol{u}$ é um campo vetorial.

Definição 3.17: Campo tensorial

Seja V uma região de $\mathcal{E}_3$. Um *campo tensorial* é uma aplicação $\hat{\boldsymbol{T}} : V \to \mathcal{T}_3$, onde $\mathcal{T}_3$ é o conjunto dos tensores de segunda ordem de dimensão 3, isto é, $\hat{\boldsymbol{T}}$ associa a cada ponto X de V um único tensor de segunda ordem $\boldsymbol{T}$.

Observação 3.15

Um campo tensorial pode ser expresso por meio de

$$\boldsymbol{T} = \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{x}) \tag{3.39}$$

ou, lembrando-se que na base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ se tem $\boldsymbol{T} = T_{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$,

$$T_{ij} = \hat{T}_{ij}(x_k)\,. \tag{3.40}$$

Exemplo 3.9

Seja V a região ocupada por um sólido; a aplicação $\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x})$ que associa a cada partícula seu tensor das deformações $\boldsymbol{E}$ é um campo tensorial.

Observação 3.16

É uma prática comum, para simplificar a notação, confundir-se o nome de uma aplicação com o seu valor como indicado abaixo

$$(\cdot) = \widehat{(\cdot)}\,. \tag{3.41}$$

5.2 Operadores Diferenciais

Definição 3.18: Derivada parcial

A derivada de um campo tensorial de qualquer ordem em relação à coordenada cartesiana x_i é denominada derivada parcial e é indicada da seguinte forma

$$\frac{\partial(\bullet)}{\partial x_i} = (\bullet)_{,i}\,. \tag{3.42}$$

Definição 3.19: Gradiente de um campo escalar

Ao vetor

$$\boldsymbol{v} = \nabla u \tag{3.43}$$

dá-se o nome de gradiente do campo escalar $u(\boldsymbol{x})$.

Observação 3.17

O gradiente $\boldsymbol{v}$ de um campo escalar $u(\boldsymbol{x})$ é também indicado como se segue

$$\boldsymbol{v} = u_{,i}\boldsymbol{e}_i\,. \tag{3.44}$$

O gradiente de um campo escalar forma um campo vetorial.

Definição 3.20: Gradiente de um campo vetorial

Ao tensor de segunda ordem

$$\nabla \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{,i} \otimes \boldsymbol{e}_i \tag{3.45}$$

dá-se o nome de gradiente do campo vetorial $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$.

Observação 3.18

O gradiente de um campo vetorial $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ pode também ser indicado por

$$\nabla \boldsymbol{v} = v_{i,j} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \ . \tag{3.46}$$

O gradiente de um campo vetorial forma um campo tensorial de segunda ordem.

Definição 3.21: Divergente de um campo vetorial

Ao escalar

$$\mathrm{div} \boldsymbol{v} = \mathrm{tr}\,(\nabla \boldsymbol{v}) \tag{3.47}$$

dá-se o nome de divergente do campo vetorial $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$.

Observação 3.19

O divergente de um campo vetorial $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ pode ser indicado por

$$\mathrm{div} \boldsymbol{v} = v_{i,i} \ . \tag{3.48}$$

O divergente de um campo vetorial forma um campo escalar.

Exemplo 3.10

Note-se que

$$\mathrm{div} \boldsymbol{x} = \mathrm{tr} \boldsymbol{I} = 3 \ . \tag{3.49}$$

Definição 3.22: Divergente de um campo tensorial

Seja um tensor de segunda ordem $\boldsymbol{T}$ expresso por

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}_i \otimes \boldsymbol{e}_i \ . \tag{3.50}$$

Ao vetor

$$\mathrm{div} \boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}_{i,i} \tag{3.51}$$

dá-se o nome de divergente do campo tensorial $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$.

Observação 3.20

O divergente de um campo tensorial $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ pode ser indicado por

$$\mathrm{div} \boldsymbol{T} = T_{ij,j} \boldsymbol{e}_i \ . \tag{3.52}$$

O divergente de um campo tensorial forma um campo vetorial.

Observação 3.21

Note-se também que

$$\mathrm{div} \boldsymbol{T}^T = T_{ij,i} \boldsymbol{e}_j \ . \tag{3.53}$$

É claro que

$$\operatorname{div}\boldsymbol{T} = \operatorname{div}\boldsymbol{T}^T \ , \quad \forall \boldsymbol{T} \in \mathcal{S}_3 \ . \tag{3.54}$$

Definição 3.23: Laplaciano de um campo escalar

Seja um campo escalar $u(\boldsymbol{x})$. Ao escalar

$$\nabla^2 u = \operatorname{div}\Big(\nabla u\Big) , \tag{3.55}$$

dá-se o nome de Laplaciano de $u(\boldsymbol{x})$.

Observação 3.22

O Laplaciano de um campo escalar é também um campo escalar e pode ser indicado por

$$\nabla^2 u = u_{,ii} \ . \tag{3.56}$$

Definição 3.24: Laplaciano de um campo vetorial

Seja um campo vetorial $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$. Ao vetor

$$\nabla^2 \boldsymbol{v} = \operatorname{div}(\nabla \boldsymbol{v}) , \tag{3.57}$$

dá-se o nome de Laplaciano de $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$.

Observação 3.23

O Laplaciano de um campo vetorial $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ é um campo vetorial que pode ser expresso por

$$\nabla^2 \boldsymbol{v} = v_{i,jj}\boldsymbol{e}_i \ . \tag{3.58}$$

Propriedades 3.1

- Sejam um campo tensorial $\boldsymbol{T}$ e um campo vetorial $\boldsymbol{v}$. Então

  $$\operatorname{div}\big(\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{v}\big) = \boldsymbol{T} : \nabla\boldsymbol{v} + \operatorname{div}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v} \ . \tag{3.59}$$

  (3.59) é muito importante na Mecânica dos Sólidos Deformáveis. Para verificá-la, considere-se que

  $$\operatorname{div}\big(\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{v}\big) = \big(T_{ij}v_i\big)_{,j} = T_{ij}v_{i,j} + T_{ij,j}v_i = \boldsymbol{T} : \nabla\boldsymbol{v} + \operatorname{div}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v} \ . \tag{3.60}$$

- Seja, agora, um campo tensorial simétrico $\boldsymbol{T}$. Então, de acordo com as Propriedades 2.33 e (3.59), tem-se

  $$\boldsymbol{T} : \nabla\boldsymbol{v} = \boldsymbol{T} : \operatorname{Sym}(\nabla\boldsymbol{v}) \tag{3.61}$$

  e

  $$\operatorname{div}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{T} : \operatorname{Sym}(\nabla\boldsymbol{v}) + \operatorname{div}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v} \ . \tag{3.62}$$

5.3 Integrais de Volume

O Teorema do Divergente é muito conhecido por seus casos particulares, a saber: integração por partes em uma dimensão, Teorema de Green no plano e Teorema de Gauss no espaço. Ele é formulado aqui sem demonstração, a qual pode ser encontrada em qualquer bom livro de Cálculo ou Análise.

5.3.1 Teorema do Divergente

Seja V uma região regular do espaço afim euclidiano $\mathcal{E}_3$, isto é, um subconjunto conexo de $\mathcal{E}_3$ limitado por um número finito de superfícies lisas, e denomine-se a superfície externa desta região por S, conforme a Figura 3.3. Então, para um campo vetorial $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$, vale a seguinte identidade

$$\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{v}dV = \int_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS \ , \tag{3.63}$$

onde dV e dS são os elementos infinitesimais de volume e área, respectivamente, $\boldsymbol{n}$ é o vetor unitário normal à superfície S, orientado para fora.

Observação 3.24

Em notação indicial, tem-se

$$\int_V v_{i,i}dV = \int_S v_i n_i dS \ . \tag{3.64}$$

Figura 3.3: Teorema do divergente

5.3.2 Corolários

Para um campo tensorial $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$, tem-se

$$\int_S \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}dS = \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{T}dV \ . \tag{3.65}$$

Para se verificar isso, utiliza-se a notação indicial e (3.64) como abaixo

$$\int_S \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}dS = \int_S T_{ij}n_j dS = \int_V T_{ij,j}dV = \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{T}dV \ . \tag{3.66}$$

Exemplo 3.11

Com a ajuda de (3.49), verifica-se que o volume da região V pode ser calculado por meio de

$$V = \frac{1}{3}\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{x}dV = \frac{1}{3}\int_S (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n})dS \ . \tag{3.67}$$

Propriedades 3.2

- É fácil verificar que

$$\int_S (\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{v}dS = \int_V \boldsymbol{T} : \nabla\boldsymbol{v}dV + \int_V \mathrm{div}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}dV \ . \tag{3.68}$$

  Para isso, utiliza-se (3.59) e (3.63) como abaixo

$$\int_S (\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{v}dS = \int_S \left(\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{v}\right)\cdot\boldsymbol{n}dS =$$
$$= \int_V \operatorname{div}\left(\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{v}\right)dV = \tag{3.69}$$
$$= \int_V \boldsymbol{T} : \nabla\boldsymbol{v}dV + \int_V \operatorname{div}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}dV \ .$$

- É também fácil verificar que

$$\int_S (\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{v}dS = \int_V \boldsymbol{T} : \operatorname{Sym}(\nabla\boldsymbol{v})dV + \int_V (\operatorname{div}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v})dV \ , \tag{3.70}$$

para tensores $\boldsymbol{T}$ simétricos. Para isso utiliza-se (3.61) e (3.63).

- Seja $\boldsymbol{T}$ um campo tensorial e $\boldsymbol{v}$ um campo vetorial. Então

$$\int_S \boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})dS = \int_V \left(\boldsymbol{v}\times\operatorname{div}\boldsymbol{T} + 2\operatorname{dual}\left(\boldsymbol{T}(\nabla\boldsymbol{v})^T\right)\right)dV \ , \tag{3.71}$$

onde o dual de um tensor é dado por **(2.120)**. Para se verificar (3.71), introduz-se $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{t}_i \otimes \boldsymbol{e}_i$ no membro esquerdo, aplica-se o Teorema do Divergente e utiliza-se **(2.123)**, como se segue

$$\int_S \boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})dS = \int_S \boldsymbol{v}\times[(\boldsymbol{t}_i\otimes\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{n}]dS =$$
$$= \int_S [(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{t}_i)\otimes\boldsymbol{e}_i]\boldsymbol{n}dS =$$
$$= \int_V \operatorname{div}[(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{t}_i)\otimes\boldsymbol{e}_i]dV =$$
$$= \int_V (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{t}_i)_{,i}\,dV = \tag{3.72}$$
$$= \int_V \left[\left(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{t}_{i,i}\right) + \left(\boldsymbol{v}_{,i}\times\boldsymbol{t}_i\right)\right]dS =$$
$$= \int_V \left(\boldsymbol{v}\times\operatorname{div}(\boldsymbol{t}_i\otimes\boldsymbol{e}_i) - \left(\boldsymbol{t}_i\times\boldsymbol{v}_{,i}\right)\right)dV =$$
$$= \int_V \left(\boldsymbol{v}\times\operatorname{div}\boldsymbol{T} + 2\operatorname{dual}\left(\boldsymbol{T}(\nabla\boldsymbol{v})^T\right)\right)dV \ .$$

- Quando $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}$, de (3.71) e $\nabla\boldsymbol{x} = \boldsymbol{I}$ decorre

$$\int_S \boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})dS = \int_V (\boldsymbol{x}\times\operatorname{div}\boldsymbol{T} + 2\boldsymbol{\tau})dV \ , \tag{3.73}$$

onde $\boldsymbol{\tau} = \operatorname{dual}(\boldsymbol{T})$.

- Seja $\boldsymbol{T}$ um campo tensorial simétrico. Então, de (3.73), tem-se

$$\int_S \boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})dS = \int_V \boldsymbol{x}\times\operatorname{div}\boldsymbol{T}dV \ , \tag{3.74}$$

uma vez que o vetor dual de tensores simétricos é nulo, isto é $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{o}$, conforme **(2.124)**. A recíproca também é verdadeira, isto é, se (3.74) vale, então $\boldsymbol{T}$ é simétrico.

- De maneira semelhante, se

$$\int_S \boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})dS = \int_V \boldsymbol{v}\times\operatorname{div}\boldsymbol{T}dV \ , \tag{3.75}$$

então decorre de (3.72) que $\boldsymbol{T}(\nabla\boldsymbol{v})^T$ é simétrico.

4
Elementos de Equações Diferenciais

1 Equações Diferenciais Ordinárias

1.1 Introdução

Neste texto entra-se em contacto com algumas equações diferenciais ordinárias. Como estas equações são importantes em vários campos da Mecânica dos Sólidos, em especial na Teoria da Viscoelasticidade e na Dinâmica, parece oportuna uma pequena introdução ao seu estudo.

Definição 4.1: Equação diferencial ordinária

Uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma equação na qual a incógnita é uma função de uma variável e onde comparecem também as derivadas da função incógnita até ordem k. Diz-se então que a equação é de *ordem* k.

Exemplos 4.1

a) EDO de primeira ordem ($k = 1$)

$$\frac{dy}{dx} + xy + x^2 = 0 \; ; \tag{4.1}$$

b) EDO de segunda ordem ($k = 2$)

$$ay'' + by' + cy + d = 0 \; ; \tag{4.2}$$

c) EDO de primeira ordem ($k = 1$)

$$\dot{u} + f(u,t) = 0 \; ; \tag{4.3}$$

d) EDO de segunda ordem ($k = 2$)

$$\ddot{u} + a\dot{u} + bu + c = 0 \; ; \tag{4.4}$$

e) EDO de primeira ordem ($k = 1$)

$$uu' + u^2 = 0 \, . \tag{4.5}$$

Definição 4.2: Equação diferencial ordinária

Seja $\mathcal{B}$ um aberto de $\mathbb{R}^{k+2}$ e seja uma função $F : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$. A equação

$$F\left(x, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots \frac{d^ku}{dx^k}\right) = 0 \tag{4.6}$$

é uma *equação diferencial ordinária* (EDO) de ordem k.

Definição 4.3: Solução de uma EDO

Uma *solução* de uma EDO dada por (4.6) é uma função $u : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que

a) $u, u', u'', \ldots u^k$ são contínuas em (a,b);

b) $\left\{x, u, u', u', \ldots u^k\right\} \in \mathcal{B}, \forall x \in (a,b)$;

c) $F\left(x, u, u', u', \ldots u^k\right) = 0$.

Definição 4.4: EDO normal

Uma EDO é dita *normal* se puder ser colocada na seguinte forma

$$u^k = f\left(x, u, u', u'', \ldots u^{k-1}\right). \tag{4.7}$$

Neste Capítulo apenas EDO's normais serão tratadas.

Definição 4.5: EDO linear

Uma EDO normal é dita *linear* se tiver a seguinte forma

$$u^k + a_1(x)u^{k-1} + a_2(x)u^{k-2} + \cdots + a_k(x)u = b(x). \tag{4.8}$$

Definição 4.6: EDO linear homogênea

Uma EDO linear dada por (4.8) é dita homogênea se $b(x) = 0$.

Propriedades 4.1

Para uma EDO linear vale a superposição dos efeitos, isto é, se $u_1(x)$ é solução de (4.8) com $b(x) = b_1(x)$ e $u_2(x)$ é solução de (4.8) com $b(x) = b_2(x)$, então $u_1(x) + u_2(x)$ é solução de (4.8) com $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$.

Observação 4.1

Pode-se generalizar as definições acima ao se admitir que no lugar de u seja um vetor $\boldsymbol{u}$ com n componentes $\{u_1, u_2, \ldots u_n\}$. No lugar de F tem-se uma função vetorial $\boldsymbol{F}$ de n componentes e $\boldsymbol{F}\left(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}', \ldots \boldsymbol{u}^k\right) = 0$ descreve um sistema de n equações diferenciais ordinárias de ordem k.

Definição 4.7: Sistema de equações diferenciais ordinárias

Seja $\mathcal{B}$ um aberto de $\mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k+1 \text{ vezes}}$ e seja uma função $\boldsymbol{F} : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$. A equação

$$\boldsymbol{F}\left(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}', \ldots \boldsymbol{u}^k\right) = 0 \tag{4.9}$$

é um *sistema de equações diferenciais ordinárias* (SEDO) de ordem k.

Definição 4.8: Solução de um SEDO

Uma solução de uma SEDO dado por (4.9) é uma função vetorial $\boldsymbol{u} : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ tal que

- $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}'', \ldots \boldsymbol{u}^k$ são contínuas em (a,b);
- $\left\{x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}', \ldots \boldsymbol{u}^k\right\} \in \mathcal{B}, \forall x \in (a,b)$;
- $\boldsymbol{F}\left(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}', \ldots \boldsymbol{u}^k\right) = 0$.

Definição 4.9: SEDO's normais

Um SEDO é dito *normal* se puder ser colocado na seguinte forma

$$\boldsymbol{u}^k = f\left(x, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}', \ldots \boldsymbol{u}^{k-1}\right). \tag{4.10}$$

Observação 4.2

Neste Capítulo apenas SEDO's normais serão tratados.

Definição 4.10: SEDO's lineares

Um SEDO normal é dito linear se tiver a seguinte forma

$$\boldsymbol{u}^k + \boldsymbol{A}_1(x)\boldsymbol{u}^{k-1} + \boldsymbol{A}_2(x)\boldsymbol{u}^{k-2} + \cdots + \boldsymbol{A}_k(x)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}(x), \tag{4.11}$$

onde $\boldsymbol{A}_i(x)$, $i = 1,2\ldots k$, são matrizes quadradas de ordem n.

Definição 4.11: SEDO's lineares homogêneas

Um SEDO linear dado por (4.11) é dito homogêneo se $\boldsymbol{b}(x) = 0$.

Propriedades 4.2: Superposição dos efeitos

Para um SEDO linear vale a superposição dos efeitos, isto é, se $\boldsymbol{u}_1(x)$ é solução de (4.11) com $\boldsymbol{b}(x) = \boldsymbol{b}_1(x)$ e $\boldsymbol{u}_2(x)$ é solução de (4.11) com $\boldsymbol{b}(x) = \boldsymbol{b}_2(x)$, então $\boldsymbol{u}_1(x) + \boldsymbol{u}_2(x)$ é solução de (4.11) com $\boldsymbol{b}(x) = \boldsymbol{b}_1(x) + \boldsymbol{b}_2(x)$.

Exemplo 4.2: sistema mecânico de duas massas

Considere-se o sistema mecânico da Figura 4.1, onde u_i é o deslocamento da massa m_i submetida à força f_i e k_i são os coeficientes de rigidez das molas.

Figura 4.1: Sistema mecânico de duas massas

As equações do movimento das duas massas são

$$\begin{aligned} m_1\ddot{u}_1 &= -k_1 u_1 + k_2(u_2 - u_1) + f_1 \quad \text{e} \\ m_2\ddot{u}_2 &= -k_2(u_2 - u_1) + f_2 \quad . \end{aligned} \tag{4.12}$$

Definindo-se as seguintes matrizes

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \tag{4.13}$$

as EDO's (4.12) podem ser colocadas na seguinte forma matricial

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(t)\,. \tag{4.14}$$

Note-se que o SEDO (4.14) é linear e normal pois

$$\ddot{\boldsymbol{u}} = -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{f}(t)\,. \tag{4.15}$$

1.2 Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Uma EDO de primeira ordem na forma normal pode ser escrita como se segue

$$u' = f(x,u)\,, \tag{4.16}$$

enquanto que um SEDO de primeira ordem na forma normal se escreve

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{u})\,. \tag{4.17}$$

O estudo dos SEDO's de primeira ordem é muito importante, pois toda EDO normal de ordem k pode ser transformada num SEDO de primeira ordem de dimensão k. Para se mostrar isto, considere-se

$$u^k = f\left(x, u, u', \ldots, u^{k-1}\right) \tag{4.18}$$

e os vetores

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u \\ u' \\ \vdots \\ u^{k-1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} u' \\ u'' \\ \vdots \\ f\left(x, u, u', \ldots, u^{k-1}\right) \end{bmatrix}. \tag{4.19}$$

Logo (4.18) pode ser transformado em (4.17).

Exemplos 4.3

Considere-se a EDO

$$y''' + (1+x)y'y'' + 3y^2 = e^x\,.$$

Fazendo

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} y' \\ y'' \\ -(1+x)y'y'' - 3y^2 + e^x \end{bmatrix},$$

obtém-se o SEDO (4.17).

Propriedades 4.3

Pode-se generalizar esta transformação para sistemas de equações diferenciais de ordem superior a um. Todo SEDO de ordem k e dimensão n pode ser transformado num sistema de nk EDO's de primeira ordem.

Exemplo 4.4

Considere-se o SEDO dado por (4.14). Definindo-se as matrizes

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \dot{\boldsymbol{u}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{b}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{f}(t) \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

(4.15) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\dot{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{b}(t)\,. \tag{4.21}$$

Definição 4.12: Trajetórias

Seja uma EDO de primeira ordem na forma normal conforme (4.16) e sejam $y(x)$ soluções dela. Os gráficos destas soluções no plano (x,y) são denominados *trajetórias*. A declividade das trajetórias é dada por $f(x,y)$, conforme a Figura 4.2.

Figura 4.2: Trajetórias

Definição 4.13: EDO's autônomas

Considere uma EDO de primeira ordem onde a variável independente é o tempo t. Assim no lugar de (4.16) tem-se

$$\dot{u} = f(u,t)\,. \tag{4.22}$$

Uma EDO como (4.22) é dita *autônoma* se f não depender de t, isto é, se

$$\dot{u} = f(u)\,. \tag{4.23}$$

Um SEDO

$$\dot{\boldsymbol{u}} = f(\boldsymbol{u},t)\,, \tag{4.24}$$

por sua vez, é dito *autônomo* se f não depender de t, isto é, se

$$\dot{\boldsymbol{u}} = f(\boldsymbol{u})\,. \tag{4.25}$$

Propriedades 4.4

Um SEDO de dimensão n não autônomo pode ser transformado num SEDO de dimensão $n+1$ autônomo ao se definir os vetores

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ t \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{g}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}, t) \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4.26}$$

Assim escreve-se (4.24) da seguinte forma

$$\dot{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{w}) . \tag{4.27}$$

Definição 4.14: Órbitas

Seja $\boldsymbol{u}$ uma solução de (4.25). O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ destas soluções é chamado de *espaço de fase* e os seus gráficos de *órbitas*. Quando $n = 2$ o espaço de fase é denominado *plano de fase*.

Exemplo 4.5

Seja um oscilador simples regido pela seguinte EDO autônoma

$$\ddot{u} + \frac{k}{m} u = 0 . \tag{4.28}$$

O SEDO de primeira ordem associado é

$$\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} , \tag{4.29}$$

onde

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{k}{m} & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.30}$$

As órbitas deste sistema, conforme a Figura 4.3, são elipses no plano de fase pois o movimento de um oscilador simples é um movimento harmônico simples (MHS).

Figura 4.3: Órbitas de um movimento harmônico simples

Definição 4.15: Problemas de Valor Inicial

Seja um SEDO de primeira ordem dado por

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{u}) . \tag{4.31}$$

Resolver um *Problema de Valor Inicial* (PVI) significa encontrar a solução $\boldsymbol{u}(x)$ de (4.31) que satisfaça a *condição inicial*

$$\boldsymbol{u}(x_0) = \boldsymbol{u}_0 . \tag{4.32}$$

Propriedades 4.5: Teorema de Existência e Unicidade

Apresenta-se sem demonstração o seguinte teorema de existência e unicidade. Seja um SEDO de primeira ordem na forma normal

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{u}), \tag{4.33}$$

definido em $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, onde n é a dimensão de $\boldsymbol{u}$. Se $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfizer as seguintes condições:

a) f_i, $i = 1,2\ldots n$, é contínua em relação a u_i, $i = 1,2\ldots n$, em Ω e

b) $\dfrac{\partial f_i}{\partial u_j}$, $i, j = 1,2\ldots n$, é contínua em relação a u_k, $k = 1,2\ldots n$, em Ω,

então existe uma única solução $\boldsymbol{u}(x)$ de (4.33) que satisfaz a condição inicial

$$\boldsymbol{u}(x_0) = \boldsymbol{u}_0 . \tag{4.34}$$

Exemplo 4.6

Considere-se a EDO

$$y' = \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} . \tag{4.35}$$

Logo

$$f(x,y) = \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y^{-\frac{1}{3}} . \tag{4.36}$$

Note-se que f é contínua mas $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é descontínua para $y = 0$. Logo não se pode garantir a existência e a unicidade de solução em PVI's que incluam no domínio Ω a reta $y = 0$. A equação (4.35) possui soluções do tipo

$$y = 0 \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{8}(x - c)^3 , \tag{4.37}$$

onde se percebe a perda da unicidade.

1.3 Solução de EDO's Lineares de Primeira Ordem

1.3.1 Solução Analítica de EDO's Lineares de Primeira Ordem

Solução geral de EDO's lineares de 1ª ordem homogêneas

Seja uma EDO linear de primeira ordem dada por

$$\frac{du}{dx} + a(x)u = b(x) . \tag{4.38}$$

A EDO homogênea associada é

$$\frac{du}{dx} + a(x)u = 0 , \tag{4.39}$$

que pode ser colocada na seguinte forma

$$\frac{1}{u} du = -a(x) dx . \tag{4.40}$$

Esta, por sua vez, integrada fornece

$$\ln u = -\int a(x)dx \,. \tag{4.41}$$

Assim, tem-se

$$u = e^{-\int a(x)dx} \,. \tag{4.42}$$

Logo a função

$$\varphi(x) = e^{-\int a(x)dx} \tag{4.43}$$

é solução de (4.39), como também as funções

$$u_h(x) = C\varphi(x)\,, \quad C \in \mathbb{R}, \tag{4.44}$$

o são. (4.44) é denominada *solução geral da EDO homogênea* (4.39).

Exemplos 4.7

Considere-se

$$u' + \text{sen}x u = 0 \,.$$

Como $a(x) = \text{sen}x$, então

$$u_h = Ce^{-\cos x} \,.$$

Considere-se

$$u' + au = 0 \,.$$

Então

$$u_h = Ce^{-ax} \,.$$

Propriedade 4.6

Seja u_p uma solução particular qualquer de (4.38). Então

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) \tag{4.45}$$

é necessariamente solução de (4.38), como é fácil verificar. (4.45) é denominada *solução geral da EDO* (4.38).

Obtenção de uma solução particular

Resta, agora, desenvolver um método para a determinação de uma solução particular de (4.38). Supondo-se inicialmente que u_p tenha a seguinte forma

$$u_p(x) = \mu(x)\varphi(x)\,, \tag{4.46}$$

onde $\mu(x)$ é uma função contínua, por diferenciação tem-se

$$u_p'(x) = \mu(x)\varphi'(x) + \mu'(x)\varphi(x)\,. \tag{4.47}$$

Introduzindo-a em (4.38), tem-se

$$\mu(x)\varphi'(x) + \mu'(x)\varphi(x) + a(x)\mu(x)\varphi(x) = b(x)\,, \tag{4.48}$$

ou

$$\mu(x)[\varphi'(x) + a(x)\varphi(x)] + \mu'(x)\varphi(x) = b(x)\,. \tag{4.49}$$

Como $\varphi(x)$ é solução de (4.39), o termo entre colchetes em (4.49) é nulo e

$$\mu'(x) = \frac{b(x)}{\varphi(x)} = b(x)e^{\int a(x)dx} . \tag{4.50}$$

Integrando-se (4.50), resulta

$$\mu(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx . \tag{4.51}$$

Portanto, a solução particular é dada por

$$u_p = \left[\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx\right]e^{-\int a(x)dx} \tag{4.52}$$

e a solução geral por

$$u = \left[\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + C\right]e^{-\int a(x)dx} . \tag{4.53}$$

Exemplos 4.8

Considere-se a EDO linear a coeficiente constante abaixo

$$u' + au = b . \tag{4.54}$$

A solução geral é

$$u(x) = \left[\int b(x)e^{ax}dx + C\right]e^{-ax} . \tag{4.55}$$

Método da variação dos parâmetros

Considere-se a EDO linear a coeficiente constante (4.54) com

$$b(x) = e^{\alpha x}\left(p_r(x)\cos\beta x + q_s(x)\text{sen}\beta x\right) , \tag{4.56}$$

onde $p_r(x)$ e $q_s(x)$ são polinômios de grau r e s, respectivamente. Uma forma prática de se encontrar a solução particular para EDO's dadas por (4.54) com (4.56) é o chamado *método da variação dos parâmetros* que consiste em adotar uma solução particular da forma

$$u_p = x^m e^{\alpha x}\left(\tilde{p}_n(x)\cos\beta x + \tilde{q}_n(x)\text{sen}\beta x\right) , \tag{4.57}$$

onde

$$m = \begin{cases} 0 , & \text{se } \alpha \neq -a \quad \text{e} \\ 1 , & \text{se } \alpha = -a . \end{cases} \tag{4.58}$$

Além disso $\tilde{p}_n(x)$ e $\tilde{q}_n(x)$ são polinômios de grau

$$n = \max(r, s) , \tag{4.59}$$

cujos coeficientes são determinados pela substituição de (4.57) em (4.54) .

Exemplos 4.9

a) Para exemplificar, considere-se a EDO

$$u' + u = 2x^2 + x + 1 .$$

Assim, $\alpha = \beta = m = 0$ e $p_r(x) = 2x^2 + x + 1$. Logo, $n = 1$ e

$$u_p = ax^2 + bx + c .$$

Introduzindo-se na EDO, obtém-se

$$2ax + b + ax^2 + bx + c = 2x^2 + x + 1 .$$

Logo $a = 2, 2a + b = 1$ e $b + c = 1$. Assim $a = 2, b = -3$ e c=4. A solução geral da EDO é então

$$u(x) = Ce^{-x} + 2x^2 - 3x + 4 .$$

b) Considere-se a EDO linear com coeficientes constantes abaixo

$$u' - u = e^x + e^{-2x} \cos x .$$

Pela superposição dos efeitos, pode-se encontrar a solução particular para $b(x) = e^x$ e somar com a solução particular para $b(x) = e^{-2x} \cos x$. Assim, para $b(x) = e^x$, tem-se $\alpha = m = 1, \beta = 0$ e $p_r(x) = 1$. Logo $n = 0$ e $u_p = xe^x$. Para $b(x) = e^{-2x} \cos x$ tem-se $\alpha = -2, \beta = 1, m = 0$ e $n = 0$. Portanto,

$$u_p = ae^{-2x} \cos x + be^{-2x} \text{sen} x .$$

Introduzindo-se na EDO

$$-2ae^{-2x} \cos x - ae^{-2x} \text{sen} x - 2be^{-2x} \text{sen} x + be^{-2x} \cos x = e^{-2x} \cos x .$$

Logo $b - 2a = 1$ e $a + 2b = 0$. Por conseguinte, $a = -\frac{2}{5}$ e $b = \frac{1}{5}$. A solução geral da EDO é então

$$u(x) = Ce^x + xe^x - \frac{2}{5} e^{-2x} \cos x + \frac{1}{5} e^{-2x} \text{sen} x .$$

Solução geral de PVI's lineares de primeira ordem

Seja um PVI linear de primeira ordem dado por

$$u' + a(x)u = b(x), \quad \text{com } u(x_0) = u_0 . \tag{4.60}$$

Uma das formas de resolvê-lo é encontrar a solução geral da equação diferencial e depois calcular a constante C impondo a condição inicial.

Exemplo 4.10

Considere-se o seguinte PVI

$$u'' + 2xu = x \quad \text{com} \quad u(0) = \frac{3}{2} .$$

A solução da equação homogênea associada é

$$u_h = Ce^{\int -2xdx} = Ce^{-x^2} ,$$

enquanto que a solução particular é dada por

$$u_p = e^{-x^2} \int xe^{\int 2xdx} dx = e^{-x^2} \int xe^{x^2} dx = e^{-x^2} \frac{1}{2} e^{x^2} = \frac{1}{2} .$$

A solução geral é

$$u(x) = Ce^{-x^2} + \frac{1}{2} .$$

Impondo-se a condição inicial, tem-se

$$u(0) = C + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

e assim $C = 1$. Logo a solução do PVI é

$$u(x) = e^{-x^2} + \frac{1}{2}.$$

Observação 4.3

Outra forma de se encontrar a solução geral de um PVI linear é considerar a condição inicial desde o começo da dedução da solução da EDO. Para isso impõe-se que

$$u_h(x_0) = u_0 \quad \text{e} \quad u_p(x) = 0, \tag{4.61}$$

pois a assim a condição inicial estará automaticamente satisfeita. Desta forma, integrando-se (4.40) chega-se em

$$u_h(x) = u_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi}. \tag{4.62}$$

Da mesma forma, no lugar de (4.51), tem-se

$$\mu(x) = \int_{x_0}^{x} b(\eta) e^{\int_{x_0}^{\eta} a(\xi)d\xi} d\eta. \tag{4.63}$$

A solução geral do PVI (4.60) é então

$$u(x) = \left[\int_{x_0}^{x} b(\eta) e^{\int_{x_0}^{\eta} a(\xi)d\xi} d\eta + u_0\right] e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi}. \tag{4.64}$$

Quando a for constante, de (4.64) resulta

$$u(x) = \left[\int_{x_0}^{x} b(\eta) e^{a(\eta - x_0)} d\eta + u_0\right] e^{-a(x-x_0)}. \tag{4.65}$$

Exemplo 4.11

Considere-se o seguinte PVI

$$u'' + 2xu = x \quad \text{com} \quad u(0) = \frac{3}{2}.$$

Com a ajuda de (4.64), tem-se

$$u(x) = \left[\int_{0}^{x} \eta e^{\int_{0}^{\eta} 2\xi d\xi} d\eta + \frac{3}{2}\right] e^{-\int_{0}^{x} 2\xi d\xi},$$

donde

$$u(x) = \left[\int_{x_0}^{x} \eta e^{\eta^2} d\eta + \frac{3}{2}\right] e^{-x^2} = e^{-x^2} + \frac{1}{2}.$$

1.3.2 Solução Numérica de EDO's de Primeira Ordem

Seja uma EDO de primeira ordem dada por

$$u' = f(x, u). \tag{4.66}$$

No caso de (4.66) ser linear, escreve-se aqui

$$u' = A(x)u + b(x) . \tag{4.67}$$

Para ambos os casos, supõe-se uma condição inicial dada por

$$u(x_0) = u_0 . \tag{4.68}$$

Para se obter soluções numéricas dos PVI's acima, divide-se o intervalo (x_0, x_f) onde se deseja a solução, em $n+1$ segmentos de comprimento h, marcando-se os pontos $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots x_f\}$. Adotando-se a seguinte notação

$$(\bullet)(x_i) = (\bullet)_i , \tag{4.69}$$

tem-se

$$x_{i+1} - x_i = h . \tag{4.70}$$

O valor de h é arbitrário, sendo escolhido conforme as necessidades de precisão da solução aproximada obtida. Quanto menor h mais precisa será a solução numérica obtida.
Investigam-se aqui soluções numéricas, nas quais o valor u_{i+1} é determinado a partir de u_i. São os chamados métodos de passo único. Desta forma, a partir da condição inicial (4.68), obtém-se em cada passo um novo valor de u_i, $i = 1, 2, \ldots$.

Para se gerar métodos numéricos, considere-se a integração de (4.66) num intervalo (x_i, x_{i+1}) dada por

$$u_{i+1} = u_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,u)\,dx . \tag{4.71}$$

Como u não é conhecida, a integração de (4.71) não pode ser efetuada, é claro. No entanto, pode-se tentar aproximar a integral de (4.71).

Método de Euler explícito

O *método de Euler explícito* corresponde a substituir a integral (4.71) por um retângulo de lados $h = x_{i+1} - x_i$ e $f(x_i, u_i)$, ou seja,

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_i, u_i) . \tag{4.72}$$

Quando a EDO é linear e dada por (4.67), tem-se

$$u_{i+1} = u_i + h(A_i u_i + b_i) . \tag{4.73}$$

Método de Euler implícito

O *método de Euler implícito* corresponde a substituir a integral (4.71) por um retângulo de lados $h = x_{i+1} - x_i$ e $f(x_{i+1}, u_{i+1})$, ou seja,

$$u_{i+1} = u_i + hf(x_{i+1}, u_{i+1}) . \tag{4.74}$$

(4.74) representa uma equação não-linear em u_{i+1} que tem de ser resolvida em cada passo. Quando a EDO é linear e dada por (4.67), tem-se

$$u_{i+1} = u_i + h(A_{i+1} u_{i+1} + b_{i+1}) , \tag{4.75}$$

donde

$$u_{i+1} = \frac{1}{1 - hA_{i+1}}(u_i + hb_{i+1}) . \tag{4.76}$$

Método do ponto médio

O Método do Ponto Médio corresponde a substituir a integral (4.71) por um retângulo de lados $h = x_{i+1} - x_i$ e $f\left(x_{i+1/2}, u_{i+1/2}\right)$, onde

$$x_{i+1/2} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}) \quad \text{e} \quad u_{i+1/2} = \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1}), \tag{4.77}$$

ou seja,

$$u_{i+1} = u_i + hf\left(x_{i+1/2}, u_{i+1/2}\right). \tag{4.78}$$

(4.78) representa uma equação não-linear em u_{i+1} que tem de ser resolvida em cada passo. Quando a EDO é linear e dada por (4.67), tem-se

$$u_{i+1} = u_i + h\left(A_{i+1/2}u_{i+1/2} + b_{i+1/2}\right), \tag{4.79}$$

donde

$$u_{i+1} = \frac{1}{1 - \frac{h}{2}A_{i+1/2}}\left[\left(1 + \frac{h}{2}A_{i+1/2}\right)u_i + hb_{i+1}\right]. \tag{4.80}$$

Observação 4.4

Às vezes o Método do Ponto Médio é chamado de *Método do Trapézio*.

Exercícios 4.1

a) Resolva o PVI do Exemplo 4.10 e do Exemplo 4.11 pelo Método de Euler explícito com $h = 0{,}001$ e $h = 0{,}1$. Compare com a solução analítica.
b) Resolva o PVI do Exemplo 4.10 e do Exemplo 4.11 pelo Método de Euler implícito com $h = 0{,}001$ e $h = 0{,}1$. Compare com a solução analítica.
c) Resolva o PVI do Exemplo 4.10 e do Exemplo 4.11 pelo Método do Ponto Médio com $h = 0{,}001$ e $h = 0{,}1$. Compare com a solução analítica.

1.4 Solução de SEDO's Lineares de Primeira Ordem

1.4.1 Solução Analítica de SEDO's Lineares de Primeira Ordem

Método de Frobenius[16]

Seja uma EDO linear de primeira ordem dada por

$$u' = A(x)u + b(x). \tag{4.81}$$

Considere-se a condição inicial

$$u(x_0) = u_0. \tag{4.82}$$

De acordo com (4.64), a solução de (4.81) com (4.82) é

$$u(x) = e^{\int_{x_0}^{x} A(\xi)d\xi}\left[\int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{\eta} -A(\xi)d\xi} b(\eta)\,d\eta + u_0\right]. \tag{4.83}$$

Seja um SEDO linear de primeira ordem dado por

[16] Georg Frobenius (1849-1917)

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}(x)\,. \tag{4.84}$$

Seja, também, a seguinte condição inicial

$$\boldsymbol{u}(x_0) = \boldsymbol{u}_0\,. \tag{4.85}$$

Uma forma de se resolver o PVI acima é generalizar para forma matricial a expressão (4.83), ou seja,

$$\boldsymbol{u}(x) = e^{\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{A}(\xi)d\xi}\left[\int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{\eta}-\boldsymbol{A}(\xi)d\xi}\boldsymbol{b}(\eta)\,d\eta + \boldsymbol{u}_0\right]. \tag{4.86}$$

Este método é denominado *Método de Frobenius*. Quando a matriz $\boldsymbol{A}$ é constante, de (4.86) resulta

$$\boldsymbol{u}(x) = e^{\boldsymbol{A}(x-x_0)}\left[\int_{x_0}^{x} e^{-\boldsymbol{A}(\eta-x_0)}\boldsymbol{b}(\eta)\,d\eta + \boldsymbol{u}_0\right]. \tag{4.87}$$

Para a compreensão de (4.86) e (4.87), e lembrando que

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{4!}y^4 + \cdots, \tag{4.88}$$

é necessário introduzir a seguinte definição de exponenciação de uma matriz

$$e^{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{Y} + \frac{1}{2}\boldsymbol{Y}^2 + \frac{1}{3!}\boldsymbol{Y}^3 + \frac{1}{4!}\boldsymbol{Y}^4 + \cdots \tag{4.89}$$

Exemplo 4.12: Integrais de Duhamel

Considere-se a vibração forçada de um oscilador simples, cuja equação do movimento é dada por

$$m\ddot{u} + ku = f(t) \tag{4.90}$$

ou

$$\ddot{u} + \frac{k}{m}u = \frac{1}{m}f(t)\,. \tag{4.91}$$

Pode-se transformar (4.91) no SEDO abaixo

$$\ddot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}(t)\,, \tag{4.92}$$

onde

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m}f(t) \end{bmatrix}. \tag{4.93}$$

De (4.87) resulta

$$\boldsymbol{u}(t) = e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-\boldsymbol{A}(\eta-t_0)}\boldsymbol{b}(\eta)\,d\eta + \boldsymbol{u}_0\right]. \tag{4.94}$$

De acordo com (4.89) tem-se

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)} &= \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}(t-t_0) + \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2(t-t_0)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3(t-t_0)^3 + \frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4(t-t_0)^4 + \cdots \end{aligned} \tag{4.95}$$

É fácil verificar que

$$\boldsymbol{A}^{2i} = \left(\frac{k}{m}\right)^i(-1)^i\,\boldsymbol{I} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{A}^{2i+1} = \left(\frac{k}{m}\right)^i(-1)^i\,\boldsymbol{A}\,, \quad i = 1,2,\ldots \tag{4.96}$$

Logo

$$
\begin{aligned}
e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)} &= \left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}\right)(t-t_0)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{k}{m}\right)^2(t-t_0)^4+\cdots\right]\boldsymbol{I}+ \\
&+\left[(t-t_0)-\frac{1}{3!}\left(\frac{k}{m}\right)(t-t_0)^3+\cdots\right]\boldsymbol{A}\,.
\end{aligned}
\tag{4.97}
$$

Notando-se que

$$
\begin{aligned}
&\cos\omega(t-t_0)=1-\frac{1}{2}\omega^2(t-t_0)^2+\frac{1}{4!}\omega^4(t-t_0)^4+\cdots \quad \text{e} \\
&\text{sen}\omega(t-t_0)=\omega(t-t_0)-\frac{1}{3!}\omega^3(t-t_0)^3+\cdots,
\end{aligned}
\tag{4.98}
$$

tem-se de (4.97)

$$
e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}=\cos\omega(t-t_0)\boldsymbol{I}+\frac{1}{\omega}\text{sen}\omega(t-t_0)\boldsymbol{A}\,, \tag{4.99}
$$

onde

$$
\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\,. \tag{4.100}
$$

De forma análoga, tem-se

$$
e^{-\boldsymbol{A}(\eta-t_0)}=\cos\omega(\eta-t_0)\boldsymbol{I}-\frac{1}{\omega}\text{sen}\omega(\eta-t_0)\boldsymbol{A}\,. \tag{4.101}
$$

Introduzindo-se $\boldsymbol{A}$ de (4.93) em (4.99) e (4.101), tem-se

$$
\begin{aligned}
&e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}=\begin{bmatrix}\cos\omega(t-t_0) & \frac{1}{\omega}\text{sen}\omega(t-t_0)\\ -\omega\text{sen}\omega(t-t_0) & \cos\omega(t-t_0)\end{bmatrix} \quad \text{e} \\
&e^{-\boldsymbol{A}(\eta-t_0)}=\begin{bmatrix}\cos\omega(\eta-t_0) & -\frac{1}{\omega}\text{sen}\omega(\eta-t_0)\\ \omega\text{sen}\omega(\eta-t_0) & \cos\omega(\eta-t_0)\end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{4.102}
$$

Desta forma, de (4.94) vem

$$
\begin{bmatrix}u(t)\\ \dot{u}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\omega(t-t_0) & \frac{1}{\omega}\text{sen}\omega(t-t_0)\\ -\omega\text{sen}\omega(t-t_0) & \cos\omega(t-t_0)\end{bmatrix}\left[\int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\omega}\text{sen}\omega(\eta-t_0)\frac{1}{m}f(\eta)\\ \cos\omega(\eta-t_0)\frac{1}{m}f(\eta)\end{bmatrix}d\eta+\begin{bmatrix}u_0\\ \dot{u}_0\end{bmatrix}\right].
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \int_{t_0}^{t}[-\cos\omega(t-t_0)\text{sen}\omega(\eta-t_0)+\text{sen}\omega(t-t_0)\cos\omega(\eta-t_0)]\frac{1}{\omega m}f(\eta)\,d\eta+ \\
&\quad + u_0\cos\omega(t-t_0)+\frac{1}{\omega}\dot{u}_0\text{sen}\omega(t-t_0) \\
\dot{u}(t) &= \int_{t_0}^{t}[\text{sen}\omega(t-t_0)\text{sen}\omega(\eta-t_0)+\cos\omega(t-t_0)\cos\omega(\eta-t_0)]\frac{1}{m}f(\eta)\,d\eta+ \\
&\quad - \omega u_0\text{sen}\omega(t-t_0)+\dot{u}_0\cos\omega(t-t_0)\,.
\end{aligned}
$$

Simplificando-se as expressões trigonométricas, tem-se

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \frac{1}{\omega m}\int_{t_0}^{t} f(\eta)\,\mathrm{sen}\omega(t-\eta)\,d\eta + u_0\cos\omega(t-t_0) + \frac{1}{\omega}\dot{u}_0\mathrm{sen}\omega(t-t_0) \\
\dot{u}(t) &= \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} f(\eta)\cos\omega(t-\eta)\,d\eta - \omega u_0\mathrm{sen}\omega(t-t_0) + \dot{u}_0\cos\omega(t-t_0)\,,
\end{aligned}
\tag{4.103}
$$

que são conhecidas na Dinâmica por *integrais de Duhamel*.

Método da variação dos parâmetros

Considere-se a seguinte EDO linear de ordem k a coeficientes constantes

$$
u^k + a_1 u^{k-1} + \cdots + a_{k-1}u' + a_k u = b(x)\,. \tag{4.104}
$$

No entanto, em vez de se proceder com um sistema de EDO's na forma de (4.84), pode ser mais conveniente generalizar o *método da variação dos parâmetros*. Para isso, considere-se a equação

$$
\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_{k-1}\lambda + a_k = 0\,. \tag{4.105}
$$

A ela dá-se o nome de *equação característica*. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ as p raízes distintas de (4.105), cada uma com multiplicidade m_i, $i = 1, 2 \ldots p$, de modo que $m_1 + m_2 + \ldots + m_p = k$. A solução geral da EDO homogênea associada com (4.104) é dada por

$$
u_h(x) = \sum_{i=1}^{k} C_i\varphi_i(x)\,, \tag{4.106}
$$

onde C_i são constantes e $\varphi_i(x)$ são funções determinadas de acordo com as raízes da equação característica conforme as seguintes regras:

a) se λ for uma raiz real de multiplicidade m, então as m funções $\varphi_i(x)$ associadas são

$$
\left\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots x^{m-1}e^{\lambda x}\right\}; \tag{4.107}
$$

b) se λ for uma raiz complexa de multiplicidade m, então as $2m$ funções $\varphi_i(x)$ associadas com a raiz $\lambda = \mu + i\nu$ são

$$
\left\{e^{\mu x}\cos\nu x, xe^{\mu x}\cos\nu x, \ldots x^{m-1}e^{\mu x}\cos\nu x, e^{\mu x}\mathrm{sen}\nu x, xe^{\mu x}\mathrm{sen}\nu x, \ldots x^{m-1}e^{\mu x}\mathrm{sen}\nu x\right\}. \tag{4.108}
$$

Quando $b(x)$ for dado por

$$
b(x) = e^{\alpha x}\left(p_r(x)\cos\beta x + q_s(x)\mathrm{sen}\beta x\right), \tag{4.109}
$$

onde $p_r(x)$ e $q_s(x)$ são polinômios de grau r e s, respectivamente, a solução particular tem a seguinte forma

$$
u_p = x^m e^{\alpha x}\left(\tilde{p}_n(x)\cos\beta x + \tilde{q}_n(x)\mathrm{sen}\beta x\right), \tag{4.110}
$$

onde $\tilde{p}_n(x)$ e $\tilde{q}_n(x)$ são polinômios de grau

$$
n = \max(r, s)\,, \tag{4.111}
$$

cujos coeficientes são determinados pela substituição de (4.110) em (4.104) . Em (4.110) m é a multiplicidade da raiz $\alpha + i\beta$ da equação característica. Se $\alpha + i\beta$ não for raiz dela adota-se $m = 0$.

Exemplo 4.13

Considere-se

$$u'' + 3u' = 3xe^{-3x} \ .$$

A equação característica é

$$\lambda^2 + 3\lambda = 0 \ ,$$

cujas raízes são 0 e –3, ambas com multiplicidade $m = 1$. Logo

$$u_h = C_1 + C_2 e^{-3x} \quad \text{e} \quad u_p = xe^{-3x}(a + bx) \ .$$

Por substituição, tem-se

$$e^{-3x}\left[9bx^2 + (9a - 12b)x + 2b - 6a\right] + 3e^{-3x}\left[-3bx^2 + (2b - 3a)x + a\right] = 3xe^{-3x} \ .$$

Logo $a = -\dfrac{1}{3}$ e $b = -\dfrac{1}{2}$. Assim a solução geral da EDO $u'' + 3u' = 3xe^{-3x}$ é

$$u(x) = C_1 + \left(C_2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2\right)e^{-3x} \ .$$

Método da decomposição modal

Quando $\boldsymbol{A}$ em (4.92) for constante e simétrica o método da decomposição modal é muito conveniente. Ele consiste em se fatorizar a matriz quadrada $\boldsymbol{A}$, cuja dimensão é n, da seguinte forma

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^T \ , \tag{4.112}$$

onde $\boldsymbol{\Lambda}$ é uma matriz diagonal com os autovalores $\lambda_i, i = 1,2\ldots n$, de $\boldsymbol{A}$, os quais são reais conforme a Propriedades 2.41 do Capítulo 2, e $\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal, cujas colunas são os autovetores unitários $\boldsymbol{v}_i$ de $\boldsymbol{A}$. Introduzindo-se (4.112) em (4.92), pré-multiplicando-se por $\boldsymbol{V}^T$ e considerando-se a sua ortogonalidade, obtém-se

$$\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{c} \ , \tag{4.113}$$

onde

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{u} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{c} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{b} \ . \tag{4.114}$$

O sistema (4.113) tem cada linha i dada por

$$w_i' = \lambda_i w_i + c_i \ , \tag{4.115}$$

que é uma EDO de primeira ordem que pode ser resolvida independentemente das demais. Uma vez obtidas as componentes de $\boldsymbol{w}$, o vetor $\boldsymbol{u}$ é obtido por meio de

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{w} \ . \tag{4.116}$$

Este método é muito utilizado na Dinâmica Linear, pois apenas um pequeno número de autovalores e autovetores precisam ser determinados para se ter uma boa representação do problema de valor inicial.

1.4.2 Solução Numérica de SEDO's de Primeira Ordem

Seja um SEDO de primeira ordem dada por

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{u}) \ . \tag{4.117}$$

No caso de (4.117) ser linear, escreve-se aqui

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}(x) \ . \tag{4.118}$$

Para ambos os casos, supõem-se uma condição inicial dada por

$$\boldsymbol{u}(x_0) = \boldsymbol{u}_0 \ . \tag{4.119}$$

Para se obter soluções numéricas dos PVI's acima, divide-se o intervalo (x_0, x_f) onde se deseja a solução, em $n+1$ segmentos de comprimento h, marcando-se os pontos $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots x_f\}$. Adotando-se a seguinte notação

$$(\bullet)(x_i) = (\bullet)_i \ , \tag{4.120}$$

tem-se

$$x_{i+1} - x_i = h \ . \tag{4.121}$$

O valor de h é arbitrário, sendo escolhido conforme as necessidades de precisão da solução aproximada obtida. Quanto menor h mais precisa será a solução numérica obtida.
Investigam-se aqui soluções numéricas, nas quais o valor $\boldsymbol{u}_{i+1}$ é determinado a partir de $\boldsymbol{u}_i$. São os chamados métodos de passo único. Desta forma, a partir da condição inicial (4.119), obtém-se em cada passo um novo valor de u_i, $i = 1,2,\ldots$.

Para se gerar métodos numéricos, considere-se a integração de (4.117) num intervalo (x_i, x_{i+1}) dada por

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{u})\, dx \ . \tag{4.122}$$

Como $\boldsymbol{u}$ não é conhecida, a integração de (4.122) não pode ser efetuada, é claro. No entanto, pode-se tentar aproximar a integral de (4.122).

Método de Euler explícito

O método de Euler explícito corresponde a substituir a integral (4.122) por

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i + h\boldsymbol{f}(x_i, \boldsymbol{u}_i) \ . \tag{4.123}$$

Quando a EDO é linear e dada por (4.118), tem-se

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i + h(\boldsymbol{A}_i u_i + \boldsymbol{b}_i) \ . \tag{4.124}$$

Método de Euler implícito

O método de Euler implícito corresponde a substituir a integral (4.122) por

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i + h\boldsymbol{f}(x_{i+1}, \boldsymbol{u}_{i+1}) \ . \tag{4.125}$$

(4.125) representa uma equação não-linear em $\boldsymbol{u}_{i+1}$ que tem de ser resolvida em cada passo. Quando a EDO é linear e dada por (4.118), tem-se

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i + h(\boldsymbol{A}_{i+1}\boldsymbol{u}_{i+1} + \boldsymbol{b}_{i+1}) \ , \tag{4.126}$$

donde

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = (\boldsymbol{I} - h\boldsymbol{A}_{i+1})^{-1}(\boldsymbol{u}_i + h\boldsymbol{b}_{i+1}) \ . \tag{4.127}$$

Método do ponto médio

O método do ponto médio corresponde a substituir a integral (4.122) por

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i + h\boldsymbol{f}\left(x_{i+1/2}, \boldsymbol{u}_{i+1/2}\right) , \tag{4.128}$$

onde

$$x_{i+1/2} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{u}_{i+1}) \,. \tag{4.129}$$

(4.128) representa uma equação não-linear em $\boldsymbol{u}_{i+1}$ que tem de ser resolvida em cada passo. Quando a EDO é linear e dada por (4.118), tem-se

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i + h\big(\boldsymbol{A}_{i+1/2}\boldsymbol{u}_{i+1/2} + \boldsymbol{b}_{i+1/2}\big) \,, \tag{4.130}$$

donde

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = \left(\boldsymbol{I} - \frac{h}{2}\boldsymbol{A}_{i+1/2}\right)^{-1}\left[\left(\boldsymbol{I} + \frac{h}{2}\boldsymbol{A}_{i+1/2}\right)\boldsymbol{u}_i + h\boldsymbol{b}_{i+1/2}\right] . \tag{4.131}$$

2 Equações Diferenciais Parciais

2.1 Introdução

Neste texto entra-se em contacto com algumas equações diferenciais a derivadas parciais. Como estas equações são importantes na Mecânica dos Sólidos Deformáveis, é oportuna uma pequena introdução ao seu estudo.

Definição 4.16: Equação diferencial parcial

Uma equação diferencial a derivadas parciais, ou simplesmente equação diferencial parcial (EDP) é uma equação na qual a incógnita é uma função de várias variáveis e onde comparecem também as derivadas da função incógnita até ordem k . Diz-se então que a equação é de ordem k .

Exemplos 4.14

a) Equação da onda em uma dimensão ($k = 2$), com c sendo a velocidade de propagação da onda,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \,. \tag{4.132}$$

b) Equação da onda em duas dimensões ($k = 2$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \,. \tag{4.133}$$

c) Equação da onda em n dimensões ($k = 2$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 u = 0 \,. \tag{4.134}$$

d) Equação de Laplace ($k = 2$)

$$\nabla^2 u = 0 \,. \tag{4.135}$$

e) Equação de Poisson ($k = 2$)

$$\nabla^2 u = f \,. \tag{4.136}$$

f) Equação de Helmholtz ($k = 2$)

$$\nabla^2 u - \lambda u = 0 \,. \tag{4.137}$$

g) Equação bi-harmônica ($k = 4$)

$$\nabla^4 u = 0 \,. \tag{4.138}$$

h) Equação da difusão ($k = 2$) em n dimensões

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k\nabla^2 u = 0 \,. \tag{4.139}$$

i) Equação de Lagrange para placas isótropas homogêneas ($k = 4$)

$$\nabla^4 u + \frac{q}{D} = 0 \,. \tag{4.140}$$

Definição 4.17: Equação diferencial parcial de segunda ordem

Pode-se agora tornar esta definição mais precisa. Considerando, por simplicidade, EDP's de segunda ordem, seja $\mathcal{B}$ um aberto de $\mathbb{R}^p$ e seja uma função $F : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$. A equação

$$F\left(x_1, x_2, \ldots x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) = 0 \,, \tag{4.141}$$

onde $p = 1 + 2n + n(n+1)/2$, é uma equação diferencial parcial (EDP) de segunda ordem.

Definição 4.18: Solução de uma EDP de segunda ordem

Uma solução desta equação, no sentido clássico, é uma função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$, tal que

a) $u, \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ e $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ são contínuas em Ω ;

b) $x_1, x_2, \ldots x_n, u, \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots \dfrac{\partial u}{\partial x_n}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \in \mathcal{B}, \forall x_i \in \Omega$;

c) $F\left(x_1, x_2, \ldots x_n, u, \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots \dfrac{\partial u}{\partial x_n}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) = 0$.

Observação 4.5

Uma solução de (4.132) é

$$u(x) = \text{sen}(x - ct) \,. \tag{4.142}$$

Já a equação (4.137) tem como uma solução o par

$$\lambda = n \quad \text{e} \quad u(x) = e^{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)} \,. \tag{4.143}$$

A equação (4.137) é denominada um *autoproblema*, e o par acima é um par formado por um *autovalor* e um *autovetor* do autoproblema.

Definição 4.19: EDP de segunda ordem quase-linear

Uma EDP de segunda ordem é dita quase-linear se tiver a seguinte forma

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1, x_2, \ldots x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = 0 \,. \tag{4.144}$$

Definição 4.20: EDP de segunda ordem linear

Uma EDP de segunda ordem é dita linear se tiver a seguinte forma

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1,x_2,\ldots x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,x_2,\ldots x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \\ + a(x_1,x_2,\ldots x_n)u + b(x_1,x_2,\ldots x_n) = 0\,. \tag{4.145}$$

Definição 4.21: EDP de segunda ordem linear e homogênea

Uma EDP linear dada por (4.145) é dita *homogênea* se $b = 0$. Logo uma EDP linear homogênea de segunda ordem tem a seguinte forma

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1,x_2,\ldots x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,x_2,\ldots x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x_1,x_2,\ldots x_n)u = 0\,. \tag{4.146}$$

Propriedade 4.7

Para uma EDP linear vale a superposição dos efeitos, isto é, se u_1 é solução de (4.145) com $b = b_1$ e u_2 é solução de (4.145) com $b = b_2$, então $u_1 + u_2$ é solução de (4.145) com $b = b_1 + b_2$.

Propriedade 4.8

Note-se que em (4.144) ou (4.145) pode-se sempre supor que

$$a_{ji} = a_{ji}\,. \tag{4.147}$$

De fato, se não houvesse a simetria poder-se-ia escrever, com a convenção da somatória,

$$a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2}\big(a_{ij} + a_{ji}\big)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2}\big(a_{ij} - a_{ji}\big)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\,.$$

Como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\,,$$

a segunda parcela se anula e

$$a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2}\big(a_{ij} + a_{ji}\big)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\,.$$

Definição 4.22: Sistema de equações diferenciais ordinárias

Pode-se generalizar as definições acima ao se substituir u por um vetor $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ com n componentes. No lugar de F tem-se uma função vetorial $\boldsymbol{F}$, também de n componentes, e

$$\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\nabla\boldsymbol{u},\nabla^2\boldsymbol{u}\big) = 0 \tag{4.148}$$

descreve um sistema de n equações diferenciais parciais de segunda ordem.

Exemplos 4.15

a) Equações de Lamé-Navier ($k = 2$)

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}\,, \tag{4.149}$$

onde $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$.

b) Equações de Lamé-Navier ou da onda em meios elásticos isótropos e homogêneos

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{b} = \rho\ddot{\boldsymbol{u}}\,, \tag{4.150}$$

onde $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$.

2.2 Classificação de EDP's quase-lineares de 2ª ordem

Definição 4.23: Forma característica

Seja uma EDP quase-linear de segunda ordem, conforme (4.144). Define-se como forma característica no ponto $\boldsymbol{x}$ a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = a_{ij}\xi_i\xi_j = \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi} \ . \tag{4.151}$$

Em (4.151), $\boldsymbol{A}$ representa a matriz cujos elementos são a_{ij} e $\boldsymbol{\xi}$ é o vetor cujos elementos são ξ_i.

Definição 4.24: Classificação de uma EDP quase-linear de 2ª ordem

Observe-se que $\boldsymbol{A}$ é simétrica. Logo ela possui n autovalores reais. Pode-se, portanto, classificar as EPD's quase-lineares de segunda ordem em um ponto $\boldsymbol{x}$ através dos sinais dos autovetores de $\boldsymbol{A}$. Assim, diz-se que uma EDP, em um ponto $\boldsymbol{x}$, é

a) *elíptica*, se todos autovalores de $\boldsymbol{A}$ forem não nulos e de mesmo sinal;
b) *hiperbólica*, se todos autovalores de $\boldsymbol{A}$ forem não nulos e não forem de mesmo sinal. Uma EDP hiperbólica pode ser:
   (i) *hiperbólico-elíptica*, se um autovalor tiver um sinal e os demais autovalores tiverem o sinal oposto;
   (ii) *ultra-hiperbólica* nos demais casos;
c) *parabólica,* se pelo menos um autovalor for nulo. Uma EDP parabólica pode ser:
   (i) *parabólico-elíptica,* se os autovalores não nulos forem do mesmo sinal;
   (ii) *parabólico-hiperbólica*, nos demais casos.

Exemplos 4.16

a) A equação da onda em uma dimensão, dada por (4.132) é hiperbólico-elíptica.
b) A equação da onda em uma dimensão, dada por (4.133) é hiperbólico-elíptica.
c) A equação da onda em uma dimensão, dada por (4.134) é hiperbólico-elíptica.
d) A equação de Laplace, dada por (4.135), é elíptica.
e) A equação da difusão, dada por (4.139), é parabólico-elíptica.
f) A equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f = 0 \ . \tag{4.152}$$

é elíptica para $x > 0$, parabólica para $x = 0$ e hiperbólica para $x < 0$.

Definição 4.25: Características de uma EDP

Seja $Q(\boldsymbol{x})$ a forma característica de uma EDP quase-linear de segunda ordem. Seja $S \subset \Omega$ uma superfície lisa de dimensão $n-1$. Indicando por $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x})$ o vetor normal a S em $\boldsymbol{x}$, diz-se que S é uma característica da EDP em $\boldsymbol{x}$ se

$$Q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}) = 0 \ . \tag{4.153}$$

Quando $n = 2$, a característica da EDP é denominada curva característica.

Exemplo 4.17

A equação da onda em uma dimensão, dada por (4.132), é hiperbólica. A forma característica é dada por (4.151), com $x_1 = t$, $x_2 = x$ e

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{bmatrix}. \tag{4.154}$$

A característica pode ser determinada através de (4.153), ou seja,

$$(\eta_1)^2 - c^2(\eta_2)^2 = (\eta_1 + c\eta_2)(\eta_1 - c\eta_2) = 0\,. \tag{4.155}$$

Portanto

$$\eta_1 = c\eta_2 \quad \text{e} \quad \eta_1 = -c\eta_2\,. \tag{4.156}$$

Logo as curvas características são retas com normais $(c,1)$ e $(-c,1)$, ou seja, retas com equações

$$x + ct = 0 \quad \text{e} \quad x - ct = 0\,. \tag{4.157}$$

Exemplo 4.18

A equação de Laplace em duas dimensões, dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \tag{4.158}$$

é elíptica. A forma característica é dada por (4.151), com $x_1 = x$, $x_2 = y$ e

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.159}$$

A característica pode ser determinada através de (4.153), sendo dada por

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 = 0\,, \tag{4.160}$$

que leva a

$$\eta_1 = \eta_2 = 0\,. \tag{4.161}$$

Logo, não existem curvas características. Esta é uma propriedade geral das EDP's elípticas.

Exemplos 4.19

A equação da difusão em uma dimensão dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,. \tag{4.162}$$

é parabólica. A forma característica é dada por (4.151), com $x_1 = x$, $x_2 = t$ e

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.163}$$

A característica pode ser determinada através de (4.153), sendo dada por

$$k\eta_1^2 = 0\,, \tag{4.164}$$

que leva a

$$\eta_1 = 0\,. \tag{4.165}$$

Logo, as curvas características são retas com normal $(0,1)$, ou seja, retas paralelas ao eixo x.

2.3 Equação de Euler

Definição 4.26: Equação de Euler

A EDP linear homogênea de segunda ordem abaixo é chamada de *equação de Euler*

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2c\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,. \tag{4.166}$$

Propriedades 4.9

Ela é elíptica se $ab - c^2 > 0$, parabólica se $ab - c^2 = 0$ e hiperbólica se $ab - c^2 < 0$.
Para se encontrar soluções da equação de Euler (4.166) introduz-se a seguinte transformação linear de variáveis

$$\xi = x + py \quad \text{e} \quad \eta = x + qy\,. \tag{4.167}$$

Aplicando-se duas vezes a regra da cadeia, obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\,,\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= p^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2pq\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + q^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \quad \text{e}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= p\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (p+q)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + q\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\,.
\end{aligned} \tag{4.168}$$

Introduzindo-se (4.168) em (4.166), tem-se

$$\left(a + 2cp + bp^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2[a + c(p+q) + bpq]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \left(a + 2cq + bq^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0\,. \tag{4.169}$$

Escolhendo p e q de modo que sejam raízes da equação

$$a + 2c\lambda + b\lambda^2 = 0\,, \tag{4.170}$$

ou seja,

$$p = \frac{-c + \sqrt{c^2 - ab}}{b} \quad \text{e} \quad p = \frac{-c - \sqrt{c^2 - ab}}{b}\,, \tag{4.171}$$

(4.169) fornece então

$$\frac{4}{b}\left(ab - c^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0\,. \tag{4.172}$$

Portanto, desde que (4.166) não seja parabólica e $b \neq 0$, a transformação (4.167) leva a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0\,. \tag{4.173}$$

A solução geral de (4.173) é

$$u = f(\xi) + g(\eta)\,, \tag{4.174}$$

onde f e g são funções contínuas quaisquer de uma variável, com primeira derivada contínua. De (4.174) e (4.167) vem

$$u = f(x + py) + g(x + qy)\,. \tag{4.175}$$

Quando (4.166) é parabólica, define-se no lugar de (4.167) a seguinte transformação

$$\xi = x + py \quad \text{e} \quad \eta = y\,. \tag{4.176}$$

Aplicando-se duas vezes a regra da cadeia, obtém-se

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\,,\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = p^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2p\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \quad \text{e}\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = p\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\,.
\end{aligned} \tag{4.177}$$

Introduzindo-se (4.177) em (4.166), tem-se

$$\left(a + 2cp + bp^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2(c + bp)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (2c + b)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0\,. \tag{4.178}$$

Escolhendo-se p de modo que

$$p = -\frac{c}{b}\,, \tag{4.179}$$

ele será a raiz dupla da equação (4.170), pois $ab - c^2 = 0$ e os dois primeiros termos de (4.178) se anulam. (4.178) fornece, então,

$$(2c + b)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0\,. \tag{4.180}$$

Portanto, a transformação (4.176) leva a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0\,. \tag{4.181}$$

A solução geral de (4.181) é

$$u = f(\xi) + \eta g(\xi)\,, \tag{4.182}$$

onde f e g são funções contínuas quaisquer de uma variável, com primeira derivada contínua. De (4.182) e (4.176) vem

$$u = f(x + py) + \eta g(x + py)\,. \tag{4.183}$$

Exemplos 4.20

a) Considere-se a equação da onda em uma dimensão

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,. \tag{4.184}$$

Logo $a = -k^2$, $c = 0$ e $b = 1$. Assim $p = k$, $q = -k$ e

$$u(x,t) = f(x - kt) + g(x + kt) \tag{4.185}$$

é a solução geral. A solução geral é a superposição de duas ondas de formato f e g, deslocando-se com velocidades k e $-k$, respectivamente.

b) Considere-se a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,. \tag{4.186}$$

Logo $a = b = 1$ e $c = 0$. Assim $p = i$, $q = -i$ e

$$u(x,y) = f(x+iy) + g(x-iy)\,. \tag{4.187}$$

A solução geral é a superposição de duas funções de variável complexa $f(z)$ e $g(\overline{z})$. O fato de surgirem argumentos complexos é uma propriedade geral das equações elípticas.

c) Considere-se a equação parabólica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,. \tag{4.188}$$

Logo $a = 1$, $b = 4$ e $c = 2$. Assim $p = -\frac{1}{2}$ e

$$u(x,y) = f\left(x - \frac{1}{2}y\right) + yg\left(x - \frac{1}{2}y\right) \tag{4.189}$$

é a solução geral de (4.188).

2.4 Problemas de Valor no Contorno

Nos exemplos anteriores mostrou-se que é relativamente fácil se encontrar soluções gerais de EDP's. No entanto, na prática, a solução de uma EDP deve ser encontrada em um domínio Ω em cuja fronteira Γ condições de contorno devem ser satisfeitas. A determinação das funções incógnitas das soluções gerais é feita de modo a satisfazer estas condições de contorno. Embora as soluções gerais sejam formalmente simples, satisfazer as condições de contorno não é nada trivial. Ao conjunto formado pela EDP, pelo domínio e pelas condições de contorno dá-se o nome de Problema de Valor no Contorno (PVC).

Exemplos 4.21

a) Seja Ω um aberto conexo de $\mathbb{R}^2$ e seja Γ a sua fronteira ou contorno. Ao problema de encontrar a solução de

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \\ &u = \overline{u} \quad \text{em } \Gamma \end{aligned} \tag{4.190}$$

dá-se o nome de *problema de Dirichlet*. Pode-se demonstrar que o PVC (4.190) tem solução única desde que $\overline{u}$ seja contínua na fronteira Γ.

b) Seja Ω um aberto conexo de $\mathbb{R}^2$ e seja Γ a sua fronteira ou contorno. Ao problema de encontrar a solução de

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \\ &\frac{\partial u}{\partial n} = \varphi \quad \text{em } \Gamma \end{aligned} \tag{4.191}$$

dá-se o nome de *problema de Neumann*. Pode-se demonstrar que o PVC (4.191) tem solução única a menos de uma constante.

c) Seja Ω um aberto conexo de $\mathbb{R}^2$ e seja $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\varphi$ a sua fronteira ou contorno. Ao problema de encontrar a solução de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{em } \Omega \,,$$
$$u = \overline{u} \quad \text{em } \Gamma_u \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi \quad \text{em } \Gamma_\varphi \tag{4.192}$$

dá-se o nome de *problema misto*. Pode-se demonstrar que o PVC (4.192) tem solução única desde que $\overline{u}$ seja contínua na fronteira Γ_u e que $\Gamma_u \neq \varnothing$.

d) Seja $\Omega = (a,b) \times (0,\infty)$ um retângulo infinito de $\mathbb{R}^2$ e seja Γ a sua fronteira ou contorno formado pelas retas $x = a$, $x = b$ e $t = 0$. Considere o problema de encontrar a solução de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{em } \Omega \,,$$
$$u(a,t) = \overline{u}_a(t) \quad \text{e} \quad u(b,t) = \overline{u}_b(t) \,, \tag{4.193}$$
$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{e} \quad \dot{u}(x,0) = \dot{u}_0(x) \,.$$

Pode-se demonstrar que (4.193) tem solução única. (4.193) é chamado de Problema de Valor Inicial (PVI).

Observação 4.6

Uma generalização do problema c) dos Exemplos 4.21 acima é o problema estático da Teoria Linear da Elasticidade, enquanto que uma generalização do problema d) dos Exemplos 4.21 é o problema dinâmico da Teoria Linear da Elasticidade.

2.5 Método das Diferenças Finitas

Nos exemplos a seguir mostra-se como um PVC pode ser resolvido de forma aproximada com a ajuda do Método das Diferenças Finitas (MDF).

Exemplos 4.22

a) Considere-se o seguinte PVC

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + f(x) = 0 \quad \text{em } (a,b) \,, \quad \text{com } u(a) = u(b) = 0 \,. \tag{4.194}$$

Para se aplicar o MDF, divide-se o intervalo (a,b) em $n+1$ segmentos de comprimento h, marcando-se os pontos $\{x_0 = a, x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1} = b\}$. Adotando-se a seguinte notação

$$(\bullet)(x_i) = (\bullet)_i \,, \tag{4.195}$$

examinem-se as seguintes expansões em séries de Taylor

$$u_{i+1} = u_i +_i hu' + \frac{1}{2_i} h^2 u'' + \frac{1}{6} h^3 u_i''' + O\left(h^4\right) \quad \text{e}$$
$$u_{i+1} = u_i - hu_i' + \frac{1}{2} h^2 u_i'' - \frac{1}{6} h^3 u_i''' + O\left(h^4\right). \tag{4.196}$$

Por adição vem

$$u_i'' = \frac{1}{h^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + O\left(h^2\right). \tag{4.197}$$

(4.197) sugere substituir a EDO de (4.194) por

$$\frac{1}{h^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + f_i = 0\,, \quad i = 1,2,\ldots n\,. \tag{4.198}$$

Com as condições de contorno de (4.194) tem-se um sistema de n equações lineares dado por

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}\,, \tag{4.199}$$

onde

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}. \tag{4.200}$$

b) Considere-se o seguinte PVI

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(x) = 0 \quad \text{em } (a,b)\,, \\ &\text{com } u(a,t) = u(b,t) = 0 \text{ e } u(x,0) = 0\,. \end{aligned} \tag{4.201}$$

Utilizando-se (4.197) novamente, tem-se

$$\dot{\boldsymbol{u}} - k\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(t)\,, \tag{4.202}$$

onde

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}. \tag{4.203}$$

(4.202) é um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e pode ser resolvido por meio dos métodos apresentados na Seção 4. A condição inicial de (4.202) é $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{o}$, conforme (4.201).

c) Considere-se o seguinte PVI

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(x) = 0 \quad \text{em } (a,b)\,, \\ &\text{com } u(a,t) = u(b,t) = 0 \text{ e } u(x,0) = \dot{u}(x,0) = 0\,. \end{aligned} \tag{4.204}$$

Utilizando-se (4.197) novamente, tem-se

$$\dot{\boldsymbol{u}} + c^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(t)\,, \tag{4.205}$$

onde

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}. \tag{4.206}$$

(4.205) é um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem e pode ser resolvido por meio dos métodos apresentados na Seção 1.4.2. A condição inicial de (4.205) é $\boldsymbol{u}(0) = \dot{\boldsymbol{u}}(0) = \boldsymbol{o}$, conforme (4.204).

5

Elementos de Cálculo Variacional

Neste Capítulo os conceitos do Cálculo Diferencial tradicional são generalizados para espaços vetoriais de dimensão infinita, como aqueles formados por funções de uma ou mais variáveis reais. Conhecido como Cálculo Variacional, trata-se de uma parte da Matemática que geralmente não é abordada em cursos de graduação de Engenharia.

1 Funcionais

Espaços vetoriais de funções, ou seja, espaços vetoriais de dimensão infinita serão abordados nesta seção com um maior detalhe. Para isto introduz-se o conceito de espaços normados.

Definição 5.1: Norma de um vetor

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial. Diz-se que $\|\bullet\| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ é uma *norma* se:

a) $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall f \in \mathcal{V}$;

b) $\|f\| \geq 0, \forall f \in \mathcal{V}$;

c) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \forall f, g \in \mathcal{V}$ (desigualdade triangular).

Exemplos 5.1

a) Para o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ a expressão

$$\|v\|_p = \sqrt[p]{|v_1|^p + |v_2|^p + \cdots + |v_n|^p} \tag{5.1}$$

define uma família de normas, à qual pertencem as seguintes normas

$$\begin{aligned} \|v\|_1 &= |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| \,, \\ \|v\|_2 &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} \quad \text{e} \\ \|v\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |v_i| \,. \end{aligned} \tag{5.2}$$

b) $\mathbb{L}_2(a,b)$ é o espaço vetorial das funções $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, para as quais a integral $\int_a^b f^2 dx$ existe e é finita. A norma natural de $\mathbb{L}_2(a,b)$ é

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2 dx}\ . \tag{5.3}$$

O espaço $\mathbb{L}_2(a,b)$ contém funções contínuas em (a,b). Funções descontínuas em um número finito de pontos também pertencem a $\mathbb{L}_2(a,b)$. Funções ilimitadas em a, b ou em um número finito de pontos, mas com a integral (5.3) finita também pertencem a $\mathbb{L}_2(a,b)$. Funções descontínuas em um número finito de pontos, mas com a integral (5.3) finita, serão chamadas aqui informalmente de funções "quase-sempre" contínuas.

c) $\mathcal{C}_k(a,b)$ é o espaço vetorial das funções limitadas e contínuas até a derivada de ordem k em (a,b). Por limitada entende-se que a função e suas derivadas até ordem k têm sempre valores finitos em seu campo de definição. A norma natural de $\mathcal{C}_k(a,b)$ é

$$\|f\| = \max_{a<x<b}\left(f(x) + f'(x) + \cdots + f^k(x)\right). \tag{5.4}$$

(5.4) faz sentido justamente porque as funções de $\mathcal{C}_k(a,b)$ são limitadas.

Definição 5.2: Espaço Vetorial Normado

Diz-se que $\mathcal{V}$ é um *espaço vetorial normado* se for dotado de uma definição de norma de acordo com a definição acima.

Definição 5.3: Distância

A *distância* entre f e g pertencentes a $\mathcal{V}$ é definida por

$$d(f,g) = \|f-g\|\,. \tag{5.5}$$

Observação 5.1

Em $\mathbb{L}_2(a,b)$, com a norma dada por (5.3), então f e g são quase-sempre idênticas, isto é, são idênticas com exceção de um número finito de pontos. Em $\mathcal{C}_0(a,b)$, se $d(f,g)=0$, com a norma dada por (5.4), então f e g são idênticas.

Definição 5.4: Seqüência Convergente

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial. Seja $\langle v_k\rangle = \{v_1, v_2, \ldots v_k, v_{k+1}, \ldots\}$ uma seqüência de elementos (vetores) de $\mathcal{V}$. Diz-se que $\langle v_k\rangle$ é uma *seqüência convergente* se existir $\overline{v}\in\mathcal{V}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} v_k = \overline{v}\ . \tag{5.6}$$

Definição 5.5: Seqüência de Cauchy

Diz-se que $\langle v_k\rangle$ é uma *seqüência de Cauchy* se dado $\varepsilon>0$ existir N tal que

$$n>N \text{ e } m>N \Rightarrow d(v_n, v_m) < \varepsilon\ . \tag{5.7}$$

Observação 5.2

É fácil mostrar que toda seqüência convergente é uma seqüência de Cauchy.

Definição 5.6: Completividade

Diz-se que um espaço vetorial normado $\mathcal{V}$ é *completo* se toda seqüência de Cauchy feita com elementos de $\mathcal{V}$ convergir para um elemento de $\mathcal{V}$

Definição 5.7: Espaços de Banach

Um espaço vetorial normado completo é denominado *espaço de Banach*.

Exemplos 5.2

- Seja o espaço vetorial dos números racionais dado por $\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = p/q,\ p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^* \right\}$. $\mathbb{Q}$ não é completo. Por exemplo, a seqüência definida por $v_k = 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!}$ não converge para um elemento de $\mathbb{Q}$ e sim para a base natural dos logaritmos: $e \approx 2{,}71828 \notin \mathbb{Q}$. Ao se completar $\mathbb{Q}$ obtém-se o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.
- Seja $\mathcal{C}_0(a,b)$ o conjunto das funções contínuas e limitadas no intervalo (a,b). $\mathcal{C}_0(a,b)$ com a norma definida por (5.4) não é completo, pois existem seqüências de funções contínuas que convergem para funções descontínuas em um número finito de pontos. A seguinte série de Fourier, que é uma seqüência de funções contínuas e limitadas, converge para a função da onda quadrada, que é quase-sempre contínua

$$f_k(t) = \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{4}{\pi} \frac{1}{2i-1} \operatorname{sen}\left((2i-1) \frac{2\pi}{T} t \right) \right].$$

A Figura 5.1 mostra a série de Fourier para $k = 8$.

Figura 5.1: Série de Fourier da onda quadrada

Observação 5.3

Em espaços de funções a noção de convergência depende da definição da norma. Definições muito exigentes como (5.4) podem dificultar a aproximação de funções por outras, como será visto no Capítulo 13, a seguir.

Definição 5.8: Normas Equivalentes

Para se comparar duas normas, introduz-se a seguinte definição. Duas normas $\|\bullet\|_a$ e $\|\bullet\|_b$ são ditas equivalentes se existirem constantes k_a e k_b tais que

$$\|f\|_a \leq k_a \|f\|_b \quad \text{e} \quad \|f\|_b \leq k_b \|f\|_a \,, \quad \forall f \,. \tag{5.8}$$

Observação 5.4

É possível demonstrar que num espaço vetorial de dimensão finita todas as normas são equivalentes. Isto significa que em $\mathbb{R}^n$, por exemplo, todas as normas (5.1) são equivalentes. Portanto, em $\mathbb{R}^n$ os conceitos de convergência e completividade são equivalentes para estas normas. Já em espaços vetoriais de dimensão infinita, como espaços de funções, nem todas as normas são equivalentes. Os conceitos de distância, convergência e completividade dependem da norma empregada. Pode-se mostrar, por exemplo, que as normas

$$\|f\| = \int_a^b f^2 dx \quad \text{e} \quad \|f\| = \int_a^b c(x) f^2 dx,\, c \in \mathbb{L}_2(a,b),\, c(x) > 0 \,, \tag{5.9}$$

são equivalentes. Já as normas

$$\|f\| = \int_a^b f^2 dx \quad \text{e} \quad \|f\| = \int_a^b \left[f^2 + \left(f'\right)^2 \right] dx \tag{5.10}$$

não são equivalentes.

Definição 5.9: Produto Escalar

Por conveniência repete-se a seguinte definição do item 26 (Definição 2.8: Produto escalar). Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial. Diz-se que $\langle \bullet,\bullet \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ é um *produto escalar* se:

a) $\langle f,g \rangle = \langle g,f \rangle,\, \forall f,g \in \mathcal{V}$;

b) $\langle \alpha f,g \rangle = \langle f,\alpha g \rangle = \alpha \langle f,g \rangle,\, \forall \alpha \in \mathbb{R},\, \forall f,g \in \mathcal{V}$;

c) $\langle f+h,g \rangle = \langle f,g \rangle + \langle h,g \rangle,\, \forall f,g,h \in \mathcal{V}$;

d) $\langle f,f \rangle \geq 0,\, \forall f \in \mathcal{V},\, \langle f,f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$.

Propriedades 5.1

Um espaço normado é facilmente obtido a partir de um espaço vetorial dotado de produto escalar. Basta introduzir a norma

$$\|f\| = \langle f,f \rangle \tag{5.11}$$

Este fato já foi verificado em (2.7), no Capítulo 2.

Definição 5.10: Espaços de Hilbert

Um espaço vetorial de dimensão infinita dotado de produto escalar, normado por meio de (5.11) e completo para esta norma é denominado *espaço de Hilbert*.

Observação 5.5

$\mathbb{R}^n$ é um espaço dotado do produto escalar definido por

$$\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

e é completo para a norma (5.11). No entanto, como sua dimensão é finita, ele não é um espaço de Hilbert.

Definição 5.11: Espaços de Sobolev

Seja $\mathcal{H}_k(a,b)$ o espaço de Hilbert das funções $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ de uma variável real e dotado do seguinte produto escalar

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b \big(fg + f'g' + f''g'' + \cdots + f^k g^k\big)\,dx\,. \tag{5.12}$$

Os espaços $\mathcal{H}_k(a,b)$ são chamados *espaços de Sobolev*.

Observação 5.6

O espaço $\mathcal{H}_k(a,b)$ contém funções contínuas até a derivada de ordem k, assim como funções contínuas até a derivada de ordem $k-1$ e com derivada de ordem k quase-sempre contínua.

Propriedades 5.2

Os espaços de Sobolev de (5.12) têm evidentemente as seguintes propriedades

a) $\mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}_l\,,\quad k \geq l\,;$

b) $\mathcal{H}_0(a,b) = \mathbb{L}_2(a,b)\,.$

Observação 5.7

Os espaços de Sobolev para funções de uma variável real podem ser generalizados para funções de n variáveis reais. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma região regular aberta, isto é, limitada por um número finito de superfícies lisas. Define-se então o produto escalar por meio de

$$\langle f,g\rangle = \int_\Omega \big(fg + f_{,i_1}g_{,i_1} + f_{,i_1i_2}g_{,i_1i_2} + \cdots + f_{,i_1i_2\cdots i_k}g_{,i_1i_2\cdots i_k}\big)\,d\Omega\,, \tag{5.13}$$

onde $(\bullet)_{,i_1i_2\cdots i_k} = \dfrac{\partial^k(\bullet)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}$ e a convenção da somatória sobre índices repetidos de 1 a n foi utilizada. O espaço de Hilbert para o produto escalar (5.13) e correspondente norma é denominado espaço de Sobolev de ordem n, sendo grafado por $\mathcal{H}_k(\Omega)$.

Observação 5.8

A questão da continuidade das funções em espaços de Sobolev de ordem n é objeto de um celebrado teorema de Sobolev. Demonstra-se que, se Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $k > \dfrac{n}{2} + m$, então $\mathcal{H}_k \subset \mathcal{C}_m$. Para $n=1$, ou seja, em um intervalo $(a,b)\subset\mathbb{R}$, tem-se que $\mathcal{H}_k \subset \mathcal{C}_{k-1}$, $k \geq 1$. Portanto, para $n=1$, tem-se que $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{C}_1$. Já para $n=2$ e $n=3$, tem-se $\mathcal{H}_k \subset \mathcal{C}_{k-2}$, $k \geq 2$. Isto significa que, em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{H}_2 \not\subset \mathcal{C}_1$. Logo, em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{H}_2$ contém funções contínuas, mas com primeira derivada descontínua. Portanto, teorias que utilizam $\mathcal{H}_2$ em duas dimensões $(n=2)$ requerem um certo cuidado. Este é o caso da teoria de placas de Lagrange-Kirchhoff e de cascas de Kirchhoff-Love.

Definição 5.12: Funcionais

Seja $\mathcal{D} \subset \mathcal{V}$, onde $\mathcal{V}$ é um espaço vetorial de funções. Chama-se *funcional* a aplicação F que associa a cada elemento de $f \in \mathcal{D}$ um único elemento y de $\mathbb{R}$. A notação utilizada é $F:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$, tal que, se $f \in \mathcal{D}$, então $y = F(f)$. $\mathcal{D}$ é denominado *domínio* do funcional F.

Exemplos 5.3

a) O funcional $A : \mathcal{C}_0(a,b) \to \mathbb{R}$ dado por

$$A(f) = \int_a^b f dx \tag{5.14}$$

fornece a área sob a curva da função f.

b) O funcional $S : \mathcal{C}_1(a,b) \to \mathbb{R}$ dado por

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} dx \tag{5.15}$$

fornece o comprimento do arco da curva da função f entre a e b.

c) O funcional $U_{\text{int}} : \mathcal{H}_2(0,\ell) \to \mathbb{R}$ dado por

$$U_{\text{int}} = \int_0^\ell \frac{1}{2} EI (v'')^2 \, dx \,, \tag{5.16}$$

fornece a energia de deformação de uma viga de comprimento ℓ, módulo de elasticidade E e inércia I. $v(x)$ é o deslocamento transversal da viga. Note-se que $E(x)$ e $I(x)$ podem pertencer a $\mathbb{L}_2(0,\ell)$.

d) O funcional $U : \mathcal{H}_2(0,\ell) \to \mathbb{R}$ dado por

$$U = \int_0^\ell \left[\frac{1}{2} EI (v'')^2 - pv \right] dx \,, \tag{5.17}$$

fornece a energia potencial de uma viga de comprimento ℓ, módulo de elasticidade E e inércia I sujeita ao carregamento transversal distribuído $p(x)$ e sem carregamentos nas extremidades. $v(x)$ é o deslocamento transversal da viga. Note-se que $E(x)$, $I(x)$ e $p(x)$ podem pertencer a $\mathbb{L}_2(0,\ell)$.

Definição 5.13: Ordem de um Funcional

Chama-se *ordem* de um funcional a maior ordem de diferenciação da função que consta de sua definição.

Exemplos 5.4

A ordem do funcional (5.14) é 0, do funcional (5.15) é 1 e dos funcionais (5.16) e (5.17) é 2.

Definição 5.14: Funcionais Lineares

Um funcional é dito *linear* se ele for uma forma linear.

Definição 5.15: Funcionais Quadráticos

Um funcional é dito *quadrático* se ele for uma forma quadrática.

Exemplos 5.5

O funcional (5.14) é linear, o funcional (5.15) não é linear nem quadrático, o funcional (5.16) é quadrático e o funcional (5.17) é a soma de um funcional quadrático e um linear.

Observação 5.9

No Cálculo Variacional trabalha-se não só com funcionais de funções de uma variável real, como os dados por (5.14) a (5.17) mas também com funcionais de funções de n variáveis reais como, por

exemplo, o funcional $V : \mathcal{C}_0(\Omega) \to \mathbb{R}$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é o domínio das funções de duas variáveis, dado por

$$V = \int_\Omega f(x_1, x_2)\, d\Omega \tag{5.18}$$

V mede o volume sob o gráfico de funções contínuas de duas variáveis reais no domínio Ω.

Observação 5.10

No Cálculo Variacional trabalha-se também com funcionais de várias funções como, por exemplo, o funcional $F : \mathcal{C}_0(\Omega) \times \mathcal{C}_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$F = \int_\Omega fg d\Omega\,, \tag{5.19}$$

onde $f, g \in \mathcal{C}_0(\Omega)$. Note-se que neste caso F é uma forma bilinear.

Observação 5.11

No Cálculo Variacional trabalha-se com funcionais de funções vetoriais de n variáveis reais como, por exemplo, o funcional $U_{\text{int}} : \mathcal{H}_1(V) \times \mathcal{H}_1(V) \times \mathcal{H}_1(V) \to \mathbb{R}$, onde $V \subset \mathbb{R}^3$ é uma região do espaço físico tridimensional, dado por

$$U_{\text{int}} = \int_V \frac{1}{2} D_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} dV\,. \tag{5.20}$$

$\boldsymbol{u} = u_i \boldsymbol{e}_i$ é o vetor deslocamento e $U_{\text{int}}(\boldsymbol{u})$ é a energia de deformação de um sólido na Teoria Linear da Elasticidade que ocupa a região V do espaço físico tridimensional. U_{int} é quadrático.

2 Variações

Definição 5.16: Derivada de Fréchet

Seja $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ um funcional. Considere uma função $\delta f \in \delta\mathcal{D} \subset \mathcal{V}$ de modo que $f + \delta f \in \mathcal{D}$. A função δf é denominada *variação* de f e $\delta\mathcal{D}$ é o *espaço das variações admissíveis*. Associado com esta variação está o acréscimo do funcional F em f dado por $F(f + \delta f) - F(f)$. Diz-se que F é *diferenciável segundo Fréchet* em $f \in \mathcal{D}$ se existir o seguinte limite

$$\lim_{\|\delta f\| \to 0} \frac{F(f + \delta f) - F(f) - \delta F(f, \delta f)}{\|\delta f\|} = 0\,, \tag{5.21}$$

onde $\delta F : \mathcal{D} \times \delta\mathcal{D} \to \mathbb{R}$ é um funcional em f e δf, sendo linear em δf, isto é

$$\begin{gathered} \delta F(f, \alpha_1 \delta f_1 + \alpha_2 \delta f_2) = \alpha_1 df(f, \delta f_1) + \alpha_2 df(f, \delta f_2), \\ \forall \delta f_1, \delta f_2 \in \delta\mathcal{D}, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\,. \end{gathered} \tag{5.22}$$

O funcional δF é denominado *variação* ou *derivada de Fréchet* de F em f.

Exemplo 5.6

Seja o funcional quadrático $F : \mathcal{H}_1(a, b) \to \mathbb{R}$ dado por

$$F = \int_a^b \left[(f')^2 + f + 1 \right] dx\,.$$

Assim

$$F(f+\delta f)-F(f)=\int_a^b\Big[\Big((f'+\delta f')^2+f+\delta f+1\Big)-\Big((f')^2+f+1\Big)\Big]dx=$$
$$=\int_a^b\big(2f'\delta f'+\delta f\big)dx\,.$$

Logo

$$\delta F(f,\delta f)=\int_a^b\big(2f'\delta f'+\delta f\big)dx\,.$$

Definição 5.17: Derivada de Gâteaux

Seja $F:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ um funcional. Considere-se um escalar α e uma função η de modo que $f+\alpha\eta\in\mathcal{D}$. Diz-se que F é *diferenciável segundo Gâteaux* em $f\in\mathcal{D}$ se existir o seguinte limite

$$DF(f)[\eta]=\lim_{|\alpha|\to 0}\frac{F(f+\alpha\eta)-F(f)}{|\alpha|}\,. \tag{5.23}$$

O funcional $DF(f)[\eta]$ é denominado *variação* ou *derivada de Gâteaux* de F em f. Se $DF(f)[\eta]$ for linear em η, tem-se que

$$\delta F(f,\delta f)=DF(f)[\delta f]\,. \tag{5.24}$$

Observação 5.12

Seja a função de uma variável real

$$\varphi(\alpha)=F(f+\alpha\eta)\,, \tag{5.25}$$

então (5.23) determina que

$$DF(f)[\eta]=\varphi'(0)\,. \tag{5.26}$$

Esta é a maneira mais prática de se calcular a derivada de Gâteaux de um funcional.

Exemplos 5.7

a) Seja o funcional quadrático $F:\mathcal{H}_1(a,b)\to\mathbb{R}$ dado por

$$F=\int_a^b\Big[(f')^2+f+1\Big]dx\,.$$

Assim

$$\varphi(\alpha)=\int_a^b\Big[(f'+\alpha\eta')^2+f+\alpha\eta+1\Big]dx$$

e

$$DF(f)[\eta]=\varphi'(0)=\int_a^b\big(2f'\eta'+\eta\big)dx\,.$$

Logo

$$\delta F(f,\delta f)=\int_a^b\big(2f'\delta f'+\delta f\big)dx\,.$$

b) Seja o funcional $v:\mathcal{H}_1(a,b)\to\mathbb{R}$ dado por

$$v(f)=\int_a^b\Big[1+(f')^3\Big]dx\,.$$

Assim

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b \Big(1 + \big(f' + \alpha\eta'\big)^3\Big)dx \ ,$$

$$\varphi'(\alpha) = \int_a^b \Big(1 + 3\big(f' + \alpha\eta'\big)^2 \eta'\Big)dx \quad \text{e}$$

$$Dv(f)[\eta] = \varphi'(0) = \int_a^b 3\big(f'\big)^2 \eta' dx \ .$$

Logo

$$\delta v(f,\delta f) = \int_a^b 3\big(f'\big)^2 \delta f' dx \ .$$

c) Seja o funcional da Teoria das Charneiras Plásticas $v : \mathcal{H}_1(a,b) \to \mathbb{R}$ dado por

$$v(f) = \int_a^b \left[1 + \left(\frac{f'}{f}\right)^2\right]dx \ .$$

Assim

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b \left[1 + \left(\frac{f' + \alpha\eta'}{f + \alpha\eta}\right)^2\right]dx \ ,$$

$$\varphi'(\alpha) = \int_a^b 2\frac{f' + \alpha\eta'}{f + \alpha\eta}\frac{(f + \alpha\eta)\eta' - \big(f' + \alpha\eta'\big)\eta}{(f + \alpha\eta)^2}dx \quad \text{e}$$

$$Dv(f)[\eta] = \varphi'(0) = \int_a^b 2\Big[f^{-2}f'\eta' - f^{-3}\big(f'\big)^2\eta\Big]dx \ .$$

Logo

$$\delta v(f,\delta f) = \int_a^b 2\Big(f^{-2}f'\delta f' - f^{-3}\big(f'\big)^2\delta f\Big)dx \ .$$

2.1 Funcionais de primeira ordem

Considere-se o funcional de primeira ordem genérico abaixo

$$v(f) = \int_a^b \phi\big(f', f, x\big)dx \ . \tag{5.27}$$

Assim

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b \phi\big(f' + \alpha\eta', f + \alpha\eta, x\big)dx$$

e

$$Dv(f)[\eta] = \varphi'(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial\phi}{\partial f'}\eta' + \frac{\partial\phi}{\partial f}\eta\right)dx \ .$$

Logo

$$\delta v(f,\delta f) = \int_a^b \left(\frac{\partial\phi}{\partial f'}\delta f' + \frac{\partial\phi}{\partial f}\delta f\right)dx \ .$$

Integrando-se a primeira parcela por partes, tem-se

$$\delta v(f,\delta f) = \int_a^b \left(\frac{\partial\phi}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\phi}{\partial f'}\right)\delta f dx + \left(\frac{\partial\phi}{\partial f'}\delta f\right)_a^b . \tag{5.28}$$

Observação 5.13

Em (5.28) introduziu-se a notação usual do Cálculo Integral

$$(\bullet)_a^b = (\bullet)(b) - (\bullet)(a)\,. \tag{5.29}$$

Exemplos 5.8

a) Seja o funcional $v : \mathcal{H}_1(a,b) \to \mathbb{R}$ dado por

$$v(f) = \int_a^b \left(1 + (f')^3\right) dx\,.$$

Assim

$$\frac{\partial \phi}{\partial f} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial f'} = 3(f')^2, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \phi}{\partial f'}\right) = 6f''f'$$

e

$$\delta v(f,\delta f) = -\int_a^b 6f''f'\delta f dx + \left[3(f')^2\,\delta f\right]_a^b.$$

b) Seja o funcional da Teoria das Charneiras Plásticas $v : \mathcal{H}_1(a,b) \to \mathbb{R}$ dado por

$$v(f) = \int_a^b \left[1 + \left(\frac{f'}{f}\right)^2\right] dx\,, \quad f \neq 0\,.$$

Assim

$$\frac{\partial \phi}{\partial f} = -2f^{-3}(f')^2, \quad \frac{\partial \phi}{\partial f'} = 2f^{-2}f', \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \phi}{\partial f'}\right) = 2f^{-2}f'' - 4f^{-3}(f')^2$$

e

$$\delta v(f,\delta f) = \int_a^b 2f^{-3}\left[(f')^2 - ff''\right]\delta f dx + \left[2f^{-2}f'\delta f\right]_a^b.$$

2.2 Funcionais de segunda ordem

Considere-se o funcional de segunda ordem genérico abaixo

$$v(f) = \int_a^b \phi(f'', f', f, x) dx\,. \tag{5.30}$$

Assim

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b \phi(f'' + \alpha\eta'', f' + \alpha\eta', f + \alpha\eta, x)\, dx$$

e

$$Dv(f)[\eta] = \varphi'(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial \phi}{\partial f''}\eta'' + \frac{\partial \phi}{\partial f'}\eta' + \frac{\partial \phi}{\partial f}\eta\right) dx\,.$$

Logo

$$\delta v(f,\delta f) = \int_a^b \left(\frac{\partial \phi}{\partial f''}\delta f'' + \frac{\partial \phi}{\partial f'}\delta f' + \frac{\partial \phi}{\partial f}\delta f\right) dx\,.$$

Integrando-se a primeira parcela e a segunda parcela por partes, tem-se

$$\delta v(f,\delta f) = \int_a^b \left(-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \phi}{\partial f''}\right)\delta f' - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \phi}{\partial f'}\right)\delta f + \frac{\partial \phi}{\partial f}\delta f\right) dx + \left(\frac{\partial \phi}{\partial f''}\delta f'\right)_a^b + \left(\frac{\partial \phi}{\partial f'}\delta f\right)_a^b.$$

Integrando-se a primeira parcela por partes novamente, tem-se

$$\delta v(f,\delta f) = \int_a^b \left(\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial \phi}{\partial f''} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial f'} + \frac{\partial \phi}{\partial f} \right) \delta f dx + \left(\frac{\partial \phi}{\partial f''}\delta f' \right)_a^b + \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial f'} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial f''} \right) \delta f \right]_a^b . \quad (5.31)$$

Exemplos 5.9

Seja o funcional quadrático da energia potencial de uma viga dado por

$$U = \int_0^\ell \left(\frac{1}{2} EI \left(v'' \right)^2 - pv \right) dx . \quad (5.32)$$

Assim

$$\delta U(v,\delta v) = \int_a^b \left(\left(EIv'' \right)'' - p \right) \delta v dx + \left(EIv''\delta v' \right)_a^b - \left[\left(EIv'' \right)' \delta v \right]_a^b . \quad (5.33)$$

Exemplos 5.10

a) Considere-se, agora, o caso de funcionais de funções de n variáveis reais. Seja $F : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um funcional genérico de primeira ordem dado por

$$F = \int_\Omega \phi\left(f_{,i}, f, \boldsymbol{x} \right) d\Omega . \quad (5.34)$$

Aplicando-se a fórmula da derivada de Gâteaux, tem-se

$$\delta F(f,\delta f) = \int_\Omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial f_{,i}} \delta f_{,i} + \frac{\partial \phi}{\partial f} \delta f \right) d\Omega . \quad (5.35)$$

Empregando-se o teorema do divergente no primeiro integrando, obtém-se

$$\delta F(f,\delta f) = \int_\Omega \left(-\left(\frac{\partial \phi}{\partial f_{,i}} \right)_{,i} + \frac{\partial \phi}{\partial f} \right) \delta f d\Omega + \int_\Gamma \left(\frac{\partial \phi}{\partial f_{,i}} \right) n_i \delta f d\Gamma , \quad (5.36)$$

onde Γ é o contorno de Ω e n_i são as componentes do vetor unitário $\boldsymbol{n}$ normal a Γ. Em notação tensorial, tem-se

$$\delta F(f,\delta f) = \int_\Omega \left(-\mathrm{div}\left(\frac{\partial \phi}{\partial (\nabla f)} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial f} \right) \delta f d\Omega + \int_\Gamma \left(\frac{\partial \phi}{\partial (\nabla f)} \right) \cdot \boldsymbol{n} \delta f d\Gamma . \quad (5.37)$$

b) Seja o seguinte funcional $F : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^3$,

$$F = \int_\Omega \frac{1}{2} \left(A_{ij} f_{,i} f_{,j} - f^2 \right) d\Omega . \quad (5.38)$$

Assim

$$\delta F(f,\delta f) = \int_\Omega \left(-\left(A_{ij} f_{,j} \right)_{,i} + f \right) \delta f d\Omega + \int_\Gamma A_{ij} f_{,j} n_i \delta f d\Gamma . \quad (5.39)$$

2.3 Equação de Euler-Lagrange

Definição 5.18: Derivada Funcional

Seja $F : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ um funcional. Seja Γ o contorno de Ω. Chama-se *derivada funcional* de F a função $\dfrac{\delta\phi}{\delta f}$ tal que

$$\delta F(f, \delta f) = \int_\Omega \frac{\delta\phi}{\delta f} \delta f d\Omega \,, \quad \forall \delta f \mid f = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma \,. \tag{5.40}$$

Exemplos 5.11

a) Considere-se o funcional de primeira ordem genérico abaixo

$$v(f) = \int_a^b \phi\big(f', f, x\big) dx \,. \tag{5.41}$$

Assim, com a ajuda de (5.28), tem-se

$$\frac{\delta\phi}{\delta f} = \frac{\partial\phi}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\phi}{\partial f'} \,. \tag{5.42}$$

b) Considere-se o funcional de segunda ordem genérico abaixo

$$v(f) = \int_a^b \phi\big(f'', f', f, x\big) dx \,. \tag{5.43}$$

Assim, com a ajuda de (5.31), tem-se

$$\frac{\delta\phi}{\delta f} = \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial\phi}{\partial f''} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\phi}{\partial f'} + \frac{\partial\phi}{\partial f} \,. \tag{5.44}$$

c) Considere-se, agora, o caso de funcionais de funções de n variáveis reais. Seja $F : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um funcional genérico de primeira ordem dado por

$$F = \int_\Omega \phi(\nabla f, f, \boldsymbol{x}) d\Omega \,. \tag{5.45}$$

Assim, com a ajuda de (5.37), tem-se

$$\frac{\delta\phi}{\delta f} = -\text{div}\left(\frac{\partial\phi}{\partial(\nabla f)}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial f} \,. \tag{5.46}$$

Definição 5.19: Equação de Euler-Lagrange

Seja $F : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ um funcional. Chama-se *Equação de Euler-Lagrange*[17] associada a F a equação diferencial

$$\frac{\delta\phi}{\delta f} = 0 \quad \text{em } \Omega \,. \tag{5.47}$$

Exemplos 5.12

a) Considere-se o funcional de primeira ordem genérico abaixo

[17] Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

$$v(f) = \int_a^b \phi(f', f, x) dx \,. \tag{5.48}$$

Assim a equação de Euler-Lagrange é dada por

$$\frac{\partial \phi}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial f'} = 0 \,. \tag{5.49}$$

b) Considere-se o funcional de segunda ordem genérico abaixo

$$v(f) = \int_a^b \phi(f'', f', f, x) dx \,. \tag{5.50}$$

Assim a equação de Euler-Lagrange é dada por

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial \phi}{\partial f''} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial f'} + \frac{\partial \phi}{\partial f} = 0 \,. \tag{5.51}$$

c) Considere-se, agora, o caso de funcionais de funções de n variáveis reais. Seja $v : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um funcional genérico de primeira ordem dado por

$$v = \int_\Omega \phi(\nabla f, f, \boldsymbol{x}) d\Omega \,. \tag{5.52}$$

Assim a equação de Euler-Lagrange é dada por

$$-\mathrm{div}\left(\frac{\partial \phi}{\partial(\nabla f)}\right) + \frac{\partial \phi}{\partial f} = 0 \,. \tag{5.53}$$

3 Extremos

Esta seção é totalmente análoga a do Cálculo Diferencial apresentadas no Capítulo 4.

Definição 5.20: Mínimo de um funcional

Diz-se que um funcional $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ tem um *mínimo local* em f_0 se existir uma vizinhança de f_0 dada por $\mathcal{V}(f_0) = \{ f \in \mathcal{D} \mid d(f, f_0) < h \}$, na qual

$$F(f) \geq F(f_0), \quad \forall f \in \mathcal{V}(f_0) \,. \tag{5.54}$$

Diz-se que este mínimo é *global* se

$$F(f) \geq F(f_0), \quad \forall f \in \mathcal{V} \,. \tag{5.55}$$

Diz-se que o mínimo é *estrito* se

$$F(f) > F(f_0), \quad \forall f \in \mathcal{V}(f_0) \,. \tag{5.56}$$

Observação 5.14

Se o funcional $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ tem um máximo local em f_0, então o funcional $-F$ tem um mínimo local em f_0. Portanto, basta estudar-se o caso dos mínimos.

Observação 5.15

Diz-se que um máximo ou mínimo local de um funcional é um *extremo* e a correspondente função f_0 é um *extremante*.

3.1 Condições Necessárias para Extremos

Formulam-se, agora, condições necessárias para extremos de funcionais.

Condição necessária para extremo de um funcional

Um funcional $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ tem um *extremo* em f_0 se

$$\delta F(f_0, \delta f) = 0, \quad \forall df \in \delta\mathcal{H} . \tag{5.57}$$

Pontos f_0 onde (5.57) ocorre são chamados de *pontos estacionários*. Correspondentemente, diz-se que F é *estacionária* em f_0. A condição acima é apenas necessária pois (5.57) pode também caracterizar um ponto de inflexão ou de sela. Além disso (5.57) é uma condição necessária apenas para funcionais lisos ou diferenciáveis.

Lema Fundamental do Cálculo Variacional

Seja agora a seguinte proposição conhecida como *Lema Fundamental do Cálculo Variacional*.

$$\int_\Omega fg d\Omega = 0, \quad \forall g \in \mathbb{L}_2(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad f \equiv 0 \quad \text{em } \Omega . \tag{5.58}$$

A demonstração desta proposição pode ser feita por redução ao absurdo.

Exemplos 5.13

a) Considere-se o funcional de primeira ordem genérico abaixo

$$v(f) = \int_a^b \phi(f', f, x) dx . \tag{5.59}$$

Como já foi visto

$$\delta v(f, \delta f) = \int_a^b \left(\frac{\partial \phi}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial f'} \right) \delta f dx + \left(\frac{\partial \phi}{\partial f'} \delta f \right)_a^b . \tag{5.60}$$

A condição (5.57) fornece então

$$\int_a^b \left(\frac{\partial \phi}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial f'} \right) \delta f dx + \left(\frac{\partial \phi}{\partial f'} \delta f \right)_a^b = 0, \quad \forall \delta f \in \delta\mathcal{D}. \tag{5.61}$$

De (5.61) decorrem

$$\begin{aligned} &\int_a^b \left(\frac{\partial \phi}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial f'} \right) \delta f dx = 0, \quad \forall \delta f \in \delta\mathcal{D}, \quad \text{e} \\ &\left(\frac{\partial \phi}{\partial f'} \delta f \right)_a^b = 0, \quad \forall \delta f \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.62}$$

Da primeira condição de (5.62) e com a ajuda de (5.58) tem-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial f'} = 0 \quad \text{em } (a, b) , \tag{5.63}$$

ou seja, a equação de Euler-Lagrange. A solução de (5.63) é um ponto estacionário de v. Para se resolver (5.63) são necessárias condições de contorno. Estas condições já estão, no entanto, expressas pela segunda condição de (5.62). Dela tem-se que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \phi}{\partial f'}(a) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta f(a) = 0 \quad \text{e} \\ &\frac{\partial \phi}{\partial f'}(b) = 0 \quad \text{ou} \quad \delta f(b) = 0 \,. \end{aligned} \tag{5.64}$$

Seja $x = a$ e suponha, por exemplo, que

$$f(a) = y_a \,. \tag{5.65}$$

Logo, pode-se restringir o domínio $\mathcal{D}$ do funcional v ao conjunto dado por

$$\mathcal{D} = \{ f \in \mathcal{H}_1(a,b) \mid f(a) = y_a \} \,. \tag{5.66}$$

$\mathcal{D}$ não é um espaço vetorial, pois a soma de dois elementos seus não resulta em um elemento do conjunto, a não ser que $y_a = 0$. Como f e $f + \delta f$ devem pertencer a $\mathcal{D}$, conclui-se que

$$\delta f(a) = 0 \,. \tag{5.67}$$

Note-se que δf não pertence então a $\mathcal{D}$ mas sim a um conjunto similar a ele, onde (5.67) é válida, dado por

$$\delta\mathcal{D} = \{ \delta f \in \mathcal{H}_1(a,b) \mid \delta f(a) = 0 \} \,. \tag{5.68}$$

Ao contrário de $\mathcal{D}$, $\delta\mathcal{D}$ é um espaço vetorial. Se, em $x = a$, a condição (5.65) não for imposta, resta então colocar

$$\frac{\partial \phi}{\partial f'}(a) = 0 \,. \tag{5.69}$$

O mesmo vale para $x = b$. Resumindo, as condições de contorno da equação (5.63) são

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \phi}{\partial f'}(a) = 0 \quad \text{ou} \quad f(a) = y_a \quad \text{e} \\ &\frac{\partial \phi}{\partial f'}(b) = 0 \quad \text{ou} \quad f(b) = y_b \,. \end{aligned} \tag{5.70}$$

Condições de contorno do tipo à direita de (5.70) são chamadas de essenciais e condições do tipo à esquerda de (5.70) são chamadas de *naturais*.

b) Considere-se o funcional de segunda ordem genérico abaixo

$$v(f) = \int_a^b \phi\big(f'', f', f, x\big) dx \,. \tag{5.71}$$

Como já foi visto

$$\delta v(f, \delta f) = \int_a^b \left(\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial \phi}{\partial f''} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial f'} + \frac{\partial \phi}{\partial f} \right) \delta f dx + \left(\frac{\partial \phi}{\partial f''} \delta f' \right)_a^b + \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial f'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial f''} \right) \delta f \right]_a^b . \tag{5.72}$$

A condição (5.57) fornece então

$$\int_a^b \left(\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial \phi}{\partial f''} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial f'} + \frac{\partial \phi}{\partial f} \right) \delta f dx + \left(\frac{\partial \phi}{\partial f''} \delta f' \right)_a^b + \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial f'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial f''} \right) \delta f \right]_a^b = 0, \forall \delta f \in \delta\mathcal{D}. \tag{5.73}$$

De (5.73) decorrem

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \left(\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial \phi}{\partial f''} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial f'} + \frac{\partial \phi}{\partial f} \right) \delta f dx = 0, \quad \forall \delta f \in \delta \mathcal{D}, \\
&\left(\frac{\partial \phi}{\partial f''} \delta f' \right)_a^b = 0, \quad \forall \delta f \in \mathbb{R} \quad \text{e} \\
&\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial f'} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial f''} \right) \delta f \right]_a^b = 0, \quad \forall \delta f \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
\tag{5.74}
$$

Da primeira condição de (5.74) e com a ajuda de (5.58) tem-se

$$
\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial \phi}{\partial f''} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial f'} + \frac{\partial \phi}{\partial f} = 0 \quad \text{em } (a,b)\,, \tag{5.75}
$$

ou seja, a equação de Euler-Lagrange. A solução de (5.75) é um ponto estacionário de v. Para se resolver (5.75) são necessárias condições de contorno. Estas condições já estão, no entanto, expressas pela segunda e terceira condição de (5.74). Dela tem-se que as condições de contorno da equação (5.75) são

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \phi}{\partial f''}(a) = 0 \quad \text{ou} \quad f'(a) = y'_a, \\
&\frac{\partial \phi}{\partial f''}(b) = 0 \quad \text{ou} \quad f'(b) = y'_b, \\
&\left(\frac{\partial \phi}{\partial f'} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial f''} \right)(a) = 0 \quad \text{ou} \quad f(a) = y_a, \\
&\left(\frac{\partial \phi}{\partial f'} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \phi}{\partial f''} \right)(b) = 0 \quad \text{ou} \quad f(b) = y_b\,.
\end{aligned}
\tag{5.76}
$$

Condições de contorno do tipo à direita de (5.76) são chamadas de *essenciais* e condições do tipo à esquerda de (5.76) são chamadas de *naturais*.

c) Considere-se, agora, o caso de funcionais de funções de n variáveis reais. Seja $v : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um funcional genérico de primeira ordem dado por

$$
v = \int_\Omega \phi\big(f_{,i}, f, \boldsymbol{x}\big) d\Omega\,. \tag{5.77}
$$

Aplicando-se a fórmula da derivada de Gâteaux, tem-se

$$
\delta v(f, \delta f) = \int_\Omega \left(-\text{div}\left(\frac{\partial \phi}{\partial(\nabla f)} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial f} \right) \delta f d\Omega + \int_\Gamma \left(\frac{\partial \phi}{\partial(\nabla f)} \right) \cdot \boldsymbol{n} \delta f d\Gamma\,. \tag{5.78}
$$

A equação de Euler-Lagrange é dada por

$$
-\text{div}\left(\frac{\partial \phi}{\partial(\nabla f)} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial f} = 0 \quad \text{em } \Omega\,. \tag{5.79}
$$

As condições de contorno são

$$
\left(\frac{\partial \phi}{\partial(\nabla f)} \right) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ em } \Gamma_n \quad \text{ou} \quad f = \overline{y} \text{ em } \Gamma_e\,, \tag{5.80}
$$

com $\Gamma_e \cup \Gamma_n = \Gamma$ e $\Gamma_e \cap \Gamma_n = \varnothing$. Condições de contorno do tipo à direita de (5.80) são chamadas de *essenciais* e condições do tipo à esquerda de (5.80) são chamadas de *naturais*.

Observação 5.16

Generalizando, pode-se dizer que um funcional F de ordem k tem como domínio o conjunto das funções pertencentes a $\mathcal{H}_k(\Omega)$ que satisfazem as condições de contorno essenciais prescritas. Estas

condições de contorno essenciais envolvem a função e suas derivadas até ordem $k-1$. A variação do funcional igualada a zero resulta, então, em uma equação de Euler-Lagrange de ordem $2k$ e, também, nas condições de contorno naturais. Estas, por sua vez, envolvem derivadas da função até ordem $2k-1$.

Exemplos 5.14

a) Seja o funcional da Teoria das Charneiras Plásticas $v : \mathcal{H}_1(a,b) \to \mathbb{R}$ dado por

$$v(f) = \int_a^b \left[1 + \left(\frac{f'}{f}\right)^2\right] dx ,$$

com as condições de contorno

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(1) = 2 .$$

Assim, como já foi visto,

$$\delta v(f,\delta f) = \int_a^b 2f^{-3}\left((f')^2 - ff''\right)\delta f dx + \left[2f^{-2}f'\delta f\right]_a^b .$$

Logo, a equação de Euler-Lagrange é

$$2f^{-3}\left((f')^2 - ff''\right) = 0 .$$

Portanto

$$(f')^2 - ff'' = 0 \quad \text{em } (0,1).$$

A solução desta equação diferencial é

$$f(x) = e^{(\ln 2)x} .$$

Este problema não tem condições de contorno naturais.

b) Seja o funcional dado por

$$U = \int_0^\ell \left(\frac{1}{2}EI(v'')^2 - pv\right) dx , \tag{5.81}$$

com as condições de contorno

$$v(0) = v'(0) = 0 . \tag{5.82}$$

Logo, a equação de Euler-Lagrange é

$$(EIv'')'' - p = 0 \quad \text{em } (0,\ell) \tag{5.83}$$

e as condições de contorno naturais são

$$EIv''(\ell) = 0 \quad \text{e} \quad (EIv'')'(\ell) = 0 , \tag{5.84}$$

que correspondem a momento fletor e cortante nulos em $x = \ell$. O funcional acima fornece a equação de equilíbrio de uma viga em balanço engastada em $x = 0$ e sob carregamento transversal $p(x)$, assim como, as condições de contorno naturais na extremidade livre.

c) Seja o seguinte funcional

$$v = \int_\Omega \left(pf + \frac{1}{2}\nabla f \cdot \nabla f\right) d\Omega , \tag{5.85}$$

com a condição de contorno

$$f = 0 \quad \text{em } \Gamma_e \,. \tag{5.86}$$

Logo a equação de Euler-Lagrange é

$$\nabla^2 f - p = 0 \quad \text{em } \Omega \tag{5.87}$$

e as condições de contorno naturais são

$$\nabla f \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_n \,. \tag{5.88}$$

3.2 Condições necessárias e suficientes para mínimos locais

Formulam-se a seguir algumas condições necessárias e suficientes para mínimos locais de funcionais. Para isso necessita-se do conceito de segunda variação ou derivada de um funcional.

Definição 5.21: Segunda variação de funcionais

O funcional $D^2F(f)[\eta]$ abaixo é denominado *segunda variação* de F

$$D^2F(f)[\eta] = D(DF(f)[\eta])[\eta] \,. \tag{5.89}$$

Outra notação é

$$\delta^2 F(f, \delta f) = D^2F(f)[\delta f] \,. \tag{5.90}$$

Observação 5.17

Se for definida a função de uma variável real

$$\varphi(\alpha) = F(f + \alpha\eta) \,, \tag{5.91}$$

então (5.89) determina que

$$D^2F(f)[\eta] = \varphi''(0) \,. \tag{5.92}$$

Esta é a maneira mais prática de se calcular a segunda derivada de Gâteaux de um funcional.

Exemplo 5.15

Seja o funcional $F : \mathcal{H}_1(a,b) \to \mathbb{R}$ dado por

$$F = \int_a^b \left[(f')^2 + f + 1 \right] dx \,.$$

Assim

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b \left[(f' + \alpha\eta')^2 + f + \alpha\eta + 1 \right] dx$$

e

$$D^2F(f)[\eta] = \varphi''(0) = \int_a^b 2\eta'\eta' dx \,.$$

Logo

$$\delta^2 F(f, \delta f) = \int_a^b 2(\delta f')^2 \, dx \,.$$

Condição necessária para mínimo local de um funcional

Um funcional $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ tem um *mínimo local* em f_0 se

$$\begin{aligned} \delta F(f_0, \delta f) = 0, \quad \forall \delta f \in \delta\mathcal{D} \quad \text{e} \\ \delta^2 F(f_0, \delta f) \geq 0, \quad \forall \delta f \in \delta\mathcal{D}. \end{aligned} \tag{5.93}$$

Condição suficiente para mínimo local de um funcional

Se

$$\begin{aligned} \delta F(f_0, \delta f) = 0, \quad \forall \delta f \in \delta\mathcal{D} \quad \text{e} \\ \delta^2 F(f_0, \delta f) > 0, \quad \forall \delta f \neq 0 \in \delta\mathcal{D}, \end{aligned} \tag{5.94}$$

então o funcional $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ tem um *mínimo local* em f_0 .

Exemplo 5.16

Seja o funcional dado por

$$U = \int_0^\ell \left(\frac{1}{2} EI \left(v'' \right)^2 - pv \right) dx \,, \tag{5.95}$$

com as condições de contorno essenciais

$$v(0) = v'(0) = 0 \,. \tag{5.96}$$

A equação de Euler-Lagrange é

$$\left(EIv'' \right)'' - p = 0 \quad \text{em } (0,\ell) \tag{5.97}$$

e as condições de contorno naturais são

$$EIv''(\ell) = 0 \quad \text{e} \quad \left(EIv'' \right)'(\ell) = 0 \,, \tag{5.98}$$

que correspondem a momento fletor e cortante nulos em $x = \ell$. O funcional acima fornece a equação de equilíbrio de uma viga em balanço engastada em $x = 0$ e sob carregamento transversal $p(x)$, assim como, as condições de contorno naturais na extremidade livre. A solução de (5.97) é candidata a extremante de (5.95). Como

$$\delta^2 U(v, \delta v) = \int_0^\ell EI \left(\delta v'' \right)^2 dx > 0, \quad \forall \delta v \neq 0, \tag{5.99}$$

pode-se concluir que a solução de (5.97) representa um mínimo local de U .

4 Convexidade

As condições da seção anterior exigem um grau de continuidade nem sempre disponível. Uma condição mais abrangente para a existência de um mínimo local é a convexidade, definida a seguir.

Definição 5.22: Convexidade de Funcionais

O domínio $\mathcal{D}$ de um funcional é *convexo* se

$$(1-\theta) f_a + \theta f_b \in \mathcal{D}, \quad \forall f_a, f_b \in \mathcal{D} \text{ e } \theta \in [0,1]. \tag{5.100}$$

Um funcional $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ é dito *convexo* se $\mathcal{D}$ for convexo e se

$$F((1-\theta) f_a + \theta f_b) \leq (1-\theta) F(f_a) + \theta F(f_b), \quad \forall f_a, f_b \in \mathcal{D} \text{ e } \theta \in [0,1]. \tag{5.101}$$

Se

$$F((1-\theta)f_a + \theta f_b) < (1-\theta)F(f_a) + \theta F(f_b), \quad \forall f_a, f_b \in \mathcal{D} \text{ e } \theta \in [0,1], \tag{5.102}$$

ele é dito *estritamente convexo*.

Observação 5.18

Funcionais convexos possuem pelo menos um mínimo. Quando $\mathcal{D}$ for um espaço de Hilbert e F for estritamente convexo este mínimo não só existe como é único.

Condição necessária e suficiente para a convexidade de um funcional diferenciável

Um funcional diferenciável $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ é convexo se e somente se

$$F(f_b) - F(f_a) \geq \delta F(f_a, f_b - f_a), \quad \forall f_a, f_b \in \mathcal{D}\,. \tag{5.103}$$

Uma funcional diferenciável $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ é estritamente convexo se e somente se

$$F(f_b) - F(f_a) > \delta F(f_a, f_b - f_a), \quad \forall f_a, f_b \in \mathcal{D}\,. \tag{5.104}$$

Exemplo 5.17

O funcional dado por

$$U = \int_0^\ell \left(\frac{1}{2} EI\left(v''\right)^2 - pv\right) dx$$

é estritamente convexo, pois

$$U(v_b) - U(v_a) - \delta U(v_a, v_b - v_a) = \int_0^\ell EI\left(v_b'' - v_a''\right)^2 dx \geq 0\,.$$

Logo, U tem um único mínimo em $\mathcal{H}_2(0,\ell)$.

6

Cinemática dos Sólidos Deformáveis

1 Meio Contínuo

A Mecânica Newtoniana[18] trata originalmente do movimento de pontos materiais, que representam uma abstração do mundo concreto. O conceito de ponto material é aplicado com sucesso, por exemplo, na Mecânica Celeste, na qual os astros são razoavelmente representados por eles.

Na Mecânica dos Sólidos Deformáveis, a abstração utilizada para representá-los é o Meio Contínuo. Sem entrar em grandes considerações topológicas, admite-se aqui que os sólidos, apesar da natureza discreta da matéria, sejam conjuntos contínuos de pontos materiais, imersos num espaço afim Euclidiano de dimensão 3, de modo que, a cada instante exista uma correspondência entre os pontos materiais do sólido e os pontos geométricos de uma região deste espaço ocupada por este sólido.

Em um Meio Contínuo Clássico os pontos materiais possuem apenas três graus de liberdade que são as componentes do vetor posição em um referencial qualquer, como os pontos materiais da Mecânica Newtoniana. Existem, no entanto, outros Meios Contínuos, como o meio introduzido pelos Irmãos Cosserat[19], nos quais os pontos materiais possuem graus de liberdade de rotação. Neste texto, adota-se exclusivamente o conceito clássico de Meio Contínuo.

2 Movimento de um Sólido Deformável

Seja $\mathcal{E}_3$ o espaço afim Euclidiano de dimensão 3 onde o sólido se movimenta, com seus pontos materiais ocupando pontos geométricos deste espaço. Em um instante t qualquer, um ponto material P ocupa o ponto geométrico $X \in \mathcal{E}_3$. Introduzindo-se o referencial geométrico $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, pode-se descrever a posição de P pelo vetor posição $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OX}$, conforme mostrado na Figura 6.1 abaixo.

[18] Isaac newton (1643-1727)
[19] François Cosserat (1852-1914), Eugène Maurice Pierre Cosserat (1866-1931)

Definição 6.1: Movimento de um ponto material

A *trajetória do ponto material* P *em* $\mathcal{E}_3$ é o conjunto dos pontos geométricos ocupados por P ao longo do tempo. O *movimento* de P em $\mathcal{E}_3$ pode ser então descrito pela função vetorial, $\hat{\boldsymbol{x}}_P : \mathbb{R} \to \mathcal{V}_3$, tal que

$$\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}_P(t) . \tag{6.1}$$

Definição 6.2: Movimento de um sólido

A *trajetória do sólido* em $\mathcal{E}_3$ é o conjunto dos pontos geométricos ocupados por todos os pontos materiais do sólido ao longo do tempo. O movimento do sólido em $\mathcal{E}_3$ pode ser então descrito pela seguinte função vetorial

$$\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}(P,t) . \tag{6.2}$$

(6.2) é denominada descrição material do movimento do sólido.

Figura 6.1: Trajetória de um ponto material

Definição 6.3: Configuração de referência

É claro que a utilização do alfabeto para distinguirmos os pontos materiais é limitada. Por isso utiliza-se o conceito de *configuração de referência*. Suponha-se que se conheça a posição de todos os pontos materiais do sólido em um determinado instante, real ou fictício, através de uma função tal que

$$\boldsymbol{x}^r = \boldsymbol{x}^r(P) . \tag{6.3}$$

Neste instante os pontos materiais do sólido ocupam a região V^r de $\mathcal{E}_3$, conforme a Figura 6.1, sendo que os pontos materiais mantém uma correspondência biunívoca com os pontos geométricos. Logo, a relação (6.3) pode ser invertida, com os pontos geométricos descritos pelo vetor posição $\boldsymbol{x}^r$ identificando perfeitamente os pontos materiais P através da função

$$P = \hat{P}(\boldsymbol{x}^r) . \tag{6.4}$$

À região V^r dá-se o nome de *configuração de referência*. Muitas vezes a configuração de referência corresponde à configuração inicial do sólido no problema em estudo. Neste caso a configuração de referência é chamada de *configuração inicial*.

Definição 6.4: Descrição Lagrangiana do movimento

Introduzindo-se (6.4) em (6.2), pode-se descrever o movimento do sólido através da seguinte função vetorial

$$\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^r, t)\,. \tag{6.5}$$

(6.5) é denominada *descrição Lagrangiana*[20] do movimento do sólido. Quando a configuração de referência é a configuração inicial, a descrição é dita Lagrangiana clássica ou, simplesmente, Lagrangiana. Caso contrário, diz-se que se tem uma descrição Lagrangiana generalizada.

Definição 6.5: Configuração atual

Considere-se, agora, um instante t qualquer no qual se deseje estudar o sólido. Este instante será denominado *instante atual* ou *corrente*. A região V de $\mathcal{E}_3$ ocupada pelo sólido neste instante (veja a Figura 6.1) é denominada *configuração atual* ou *corrente*. Às vezes é também chamada de *configuração deformada*.

Definição 6.6: Transformação do sólido

Ao campo vetorial que descreve a posição dos pontos materiais no instante atual, isto é, ao campo vetorial $\hat{\boldsymbol{x}} : V^r \to V$ dado por

$$\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^r)\,. \tag{6.6}$$

dá-se o nome de *transformação* do sólido. Este campo descreve a transformação do sólido da configuração de referência para a configuração atual, ou seja, ela associa aos pontos geométricos de V^r descritos por $\boldsymbol{x}^r$ os pontos geométricos de V no instante atual descritos por (6.6) e ocupados pelos mesmos pontos materiais.

Observação 6.1: Continuidade

O campo (6.6) deve ser tal que o sólido não penetre em si mesmo e ser suficientemente contínuo para que o sólido não apresente dobras, nem fraturas. Por isso, neste texto, supõe-se que (6.6) seja contínuo com primeiras derivadas contínuas.

Observação 6.2: Condição local de impenetrabilidade

Uma condição suficiente para que a transformação (6.6) seja localmente inversível, e que, portanto, na transformação o sólido não se penetre, é que o *Jacobiano da transformação*

$$J = \det(\nabla \boldsymbol{x}) \tag{6.7}$$

seja positivo em qualquer ponto de V^r, isto é,

$$J > 0 \quad \text{em } V^r\,. \tag{6.8}$$

A condição acima (chamada nos textos de Cálculo como Teorema da Função Implícita) é chamada de *condição local de impenetrabilidade* e será adotada no decorrer do texto.

Definição 6.7: Deslocamentos

Ao campo vetorial $\hat{\boldsymbol{u}} : V^r \to \mathcal{V}_3$ definido por

[20] Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^r) - \boldsymbol{x}^r \tag{6.9}$$

dá-se o nome de *campo dos deslocamentos* dos pontos do sólido.

Definição 6.8: Gradiente da transformação

Ao campo tensorial $\hat{\boldsymbol{F}} : V^r \to \mathcal{T}_3$ definido por

$$\boldsymbol{F} = \nabla \boldsymbol{x} \tag{6.10}$$

dá-se o nome de campo do *gradiente da transformação* do sólido.

Observação 6.3

Em um sistema cartesiano de coordenadas, em notação indicial, tem-se

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j^r} = x_{i,j} \ . \tag{6.11}$$

Definição 6.9: Gradiente dos deslocamentos

Ao tensor

$$\boldsymbol{L} = \nabla \boldsymbol{u} \tag{6.12}$$

dá-se o nome de *gradiente dos deslocamentos* do sólido. De (6.9) e (6.12) decorre

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I} \ , \tag{6.13}$$

onde $\boldsymbol{I}$ é o tensor identidade.

Observação 6.4

Em um sistema cartesiano de coordenadas, em notação indicial, tem-se

$$L_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j^r} = x_{i,j} - \delta_{ij} = u_{i,j} \ . \tag{6.14}$$

3 Fibras

Definição 6.10: Curva

Uma *curva* é uma entidade geométrica cuja posição é dada por uma equação paramétrica do tipo $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\theta)$, onde $\theta \in (a,b) \subset \mathbb{R}$ é um parâmetro.

Definição 6.11: Fibra

Uma curva na configuração de referência define os pontos materiais de uma *fibra* do sólido dada por

$$\boldsymbol{x}^r = \boldsymbol{x}^r(\theta) \ . \tag{6.15}$$

Fibras dadas por (6.15) são transformadas por (6.6) da configuração de referência para a configuração atual, conforme indicado na Figura 6.2.

Definição 6.12: Comprimento local de uma fibra

Considere-se uma fibra do sólido dada por (6.15). O vetor

$$\boldsymbol{g}^r = \frac{d\boldsymbol{x}^r}{d\theta} \tag{6.16}$$

é tangente a esta fibra. O *comprimento local de uma fibra* na configuração de referência é dado por

$$\frac{d\ell^r}{d\theta} = \|\boldsymbol{g}^r\| \,. \tag{6.17}$$

Após a transformação (6.6) o vetor tangente à mesma fibra na configuração atual é dado por

$$\boldsymbol{g} = \frac{d\boldsymbol{x}}{d\theta} \,. \tag{6.18}$$

O *comprimento local de uma fibra* na configuração atual é dado por

$$\frac{d\ell}{d\theta} = \|\boldsymbol{g}\| \,. \tag{6.19}$$

Figura 6.2: Transformação de uma fibra

Pela regra da cadeia, de (6.18) e (6.10), tem-se

$$\boldsymbol{g} = \nabla\boldsymbol{x}\frac{d\boldsymbol{x}^r}{d\theta} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{g}^r \,. \tag{6.20}$$

Propriedades 6.1

- Imaginem-se três fibras que não sejam co-planares e que se cruzam num ponto material. Sejam $\{\boldsymbol{g}_1^r, \boldsymbol{g}_2^r, \boldsymbol{g}_3^r\}$ os vetores tangentes a estas fibras naquele ponto na configuração de referência, que são LI. Os vetores transformados são denotados por $\{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3\}$ e dados por

$$\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{F}\boldsymbol{g}_i^r \,, \quad i = 1,2,3 \,. \tag{6.21}$$

- Com estes vetores em uma base ortonormal pode-se simultaneamente escrever a partir de (6.21) a seguinte relação

$$\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{g}_j^r \otimes \boldsymbol{e}_j\right). \tag{6.22}$$

- Logo, $\boldsymbol{F}$ pode ser obtido por meio de

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{e}_i)\left(\boldsymbol{g}_j^r \otimes \boldsymbol{e}_j\right)^{-1} \,. \tag{6.23}$$

Observação 6.5

(6.23) é importante para a determinação experimental e numérica de $\boldsymbol{F}$.

Propriedade 6.2

A partir de (6.23), pode-se mostrar que

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{\boldsymbol{g}_1^r \cdot \boldsymbol{g}_2^r \times \boldsymbol{g}_3^r} \left(\boldsymbol{g}_1 \otimes \left(\boldsymbol{g}_2^r \times \boldsymbol{g}_3^r \right) + \boldsymbol{g}_2 \otimes \left(\boldsymbol{g}_3^r \times \boldsymbol{g}_1^r \right) + \boldsymbol{g}_3 \otimes \left(\boldsymbol{g}_1^r \times \boldsymbol{g}_2^r \right) \right) . \tag{1.24}$$

3.1 Estiramento de uma fibra

Definição 6.13: Estiramento local de uma fibra

O *estiramento local* de uma fibra é definido pela seguinte razão

$$\lambda = \frac{d\ell}{d\ell^r} . \tag{6.25}$$

Propriedades 6.3

a) λ é a razão entre os comprimentos locais da fibra em um ponto material nas configurações atuais e de referência.
b) λ não depende do parâmetro θ utilizado na definição da curva (6.15).
c) É claro que

$$\lambda > 0 . \tag{6.26}$$

d) Quando $1 < \lambda < \infty$, diz-se que a fibra se esticou. Quando $0 < \lambda < 1$, diz-se que a fibra se encurtou. Quando $\lambda = 1$ não houve estiramento da fibra.

3.2 Alongamento de uma fibra

Definição 6.14: Alongamento linear

O *alongamento linear*[21] ou *deformação específica* em um local de uma fibra é definido por

$$\varepsilon = \lambda - 1 = \frac{d\ell - d\ell^r}{d\ell^r} . \tag{6.27}$$

Observação 6.6

(6.27) é a forma mais comum de se medir alongamentos.

Observação 6.7

Existem, no entanto, outras definições de alongamento. As mais importantes são o alongamento quadrático ou de Green[22], o alongamento natural, logarítmico ou de Hencky[23], o alongamento hiperbólico ou de Reiner[24] e o alongamento de Almansi[25], dados respectivamente por

[21] Ou simplesmente *alongamento*. A nomenclatura *alongamento específico* também é cabível.
[22] George Green (1793-1841)
[23] Heinrich Hencky (1885-1951)
[24] Markus Reiner (1886-1976)
[25] Emilio Almansi (1869-1948)

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\mathrm{q}} &= \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\left(\lambda^2 - 1\right), \\
\varepsilon_0 &= \ln\lambda\,, \\
\varepsilon_{-1} &= 1 - \lambda^{-1} \quad \text{e} \\
\varepsilon_{-2} &= \frac{1}{2}\left(1 - \lambda^{-2}\right).
\end{aligned}
\tag{6.28}
$$

Observação 6.8

Todos os alongamentos acima pertencem à família de Hill[26] dada abaixo

$$
\varepsilon_m = \begin{cases} \dfrac{1}{m}(\lambda^m - 1)\,, & \text{se } m \neq 0\,, \\ \ln\lambda\,, & \text{se } m = 0\,. \end{cases}
\tag{6.29}
$$

Observe-se que $\varepsilon = \varepsilon_1$. Note-se também que

$$
\varepsilon_m \begin{cases} < 0\,, & \text{se } \lambda < 1\,, \\ = 0\,, & \text{se } \lambda = 1\,, \\ > 0\,, & \text{se } \lambda > 1\,. \end{cases}
\tag{6.30}
$$

Além disso, tem-se

$$
\left.\frac{d\varepsilon_m}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 1 \quad \text{e} \quad \left.\frac{d^2\varepsilon_m}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} = m - 1\,.
\tag{6.31}
$$

Logo, expandindo em série de Taylor um alongamento ε_m em função do alongamento linear ε, tem-se, com a ajuda de (6.31),

$$
\varepsilon_m = \varepsilon + \frac{1}{2}(m-1)\varepsilon^2 + \cdots
\tag{6.32}
$$

Se $|\varepsilon| < 1\%$, então (6.32) mostra que, para $|m| \leq 2$, o erro relativo ao se confundir os diversos alongamentos de (6.29) é menor que $0{,}5\%$.

4 Tensores das Deformações

4.1 Tensor das deformações de Green

Definição 6.15: tensor dos estiramentos quadráticos

Considere-se o quadrado do comprimento local de uma fibra na configuração atual. Lembrando-se de (6.20), tem-se

$$
\left(\frac{d\ell}{d\theta}\right)^2 = \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{F}\boldsymbol{g}^r)\cdot(\boldsymbol{F}\boldsymbol{g}^r) = \boldsymbol{g}^r\cdot\left(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}\right)\boldsymbol{g}^r\,.
\tag{6.33}
$$

Logo,

[26] Rodney Hill (1921-)

$$\lambda^2 = \left(\frac{d\ell}{d\ell^r}\right)^2 = \frac{\boldsymbol{g}^r}{\|\boldsymbol{g}^r\|} \cdot \boldsymbol{C} \frac{\boldsymbol{g}^r}{\|\boldsymbol{g}^r\|}, \tag{6.34}$$

onde

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} \tag{6.35}$$

é o *tensor dos estiramentos quadráticos* ou *tensor das deformações de Cauchy-Green*[27].

Definição 6.16: Tensor das deformações de Green

O tensor definido por

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}\right) \tag{6.36}$$

é denominado *Tensor das Deformações de Green* ou, às vezes também chamado de *Tensor das Deformações de Green-Saint-Venant*[28].

Propriedades 6.4

a) A expressão abaixo para $\boldsymbol{E}$ é obtida ao se introduzir $\boldsymbol{F}$ de (6.13) em (6.36)

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T + \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{L}\right). \tag{6.37}$$

b) De (6.36) tem-se também

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E}\,. \tag{6.38}$$

c) Tanto $\boldsymbol{C}$ como $\boldsymbol{E}$ são simétricos.

d) Com a ajuda de (6.28) e (6.34), o alongamento quadrático é dado por

$$\varepsilon_q = \frac{\boldsymbol{g}^r}{\|\boldsymbol{g}^r\|} \cdot \boldsymbol{E} \frac{\boldsymbol{g}^r}{\|\boldsymbol{g}^r\|}. \tag{6.39}$$

e) Observando-se (6.34) e (6.39), tanto $\boldsymbol{C}$ como $\boldsymbol{E}$ caracterizam formas quadráticas. Isto fica ainda mais claro ao se introduzir o vetor unitário

$$\boldsymbol{n}^r = \frac{\boldsymbol{g}^r}{\|\boldsymbol{g}^r\|}, \tag{6.40}$$

de tal forma que

$$\lambda^2(\boldsymbol{n}^r) = \boldsymbol{n}^r \cdot \boldsymbol{C}\boldsymbol{n}^r \tag{6.41}$$

e

$$\varepsilon_q(\boldsymbol{n}^r) = \boldsymbol{n}^r \cdot \boldsymbol{E}\boldsymbol{n}^r\,. \tag{6.42}$$

f) Como $\lambda^2 > 0, \forall \boldsymbol{n}^r$, o estiramento quadrático é uma forma quadrática positiva definida.

g) Seja $\{\hat{\boldsymbol{e}}_1^r, \hat{\boldsymbol{e}}_2^r, \hat{\boldsymbol{e}}_3^r\}$ uma base própria de $\boldsymbol{C}$, com os vetores ordenados de forma que seus correspondentes autovalores c_i, $i = 1,2,3$, obedeçam a $c_1 \geq c_2 \geq c_3$. Pode-se então afirmar que $\lambda^2(\boldsymbol{n}^r)$ passa pelo máximo c_1 para $\boldsymbol{n}^r = \hat{\boldsymbol{e}}_1^r$ e pelo mínimo c_3 para $\boldsymbol{n}^r = \hat{\boldsymbol{e}}_3^r$. Pode-se também afirmar que $\lambda_{\max} = \sqrt{c_1}$ quando $\boldsymbol{n}^r = \hat{\boldsymbol{e}}_1^r$ e que $\lambda_{\min} = \sqrt{c_3}$ quando $\boldsymbol{n}^r = \hat{\boldsymbol{e}}_3^r$.

h) Observando-se (6.38) e que qualquer vetor é auto-vetor de $\boldsymbol{I}$, é fácil mostrar que $\boldsymbol{E}$ tem os mesmos auto-vetores de $\boldsymbol{C}$. Se $\{\hat{\boldsymbol{e}}_1^r, \hat{\boldsymbol{e}}_2^r, \hat{\boldsymbol{e}}_3^r\}$ é uma base própria de $\boldsymbol{C}$, então também é

[27] Augustin Louis Cauchy (1789-1857)
[28] Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886)

uma de $\boldsymbol{E}$. Os autovalores ε_{qi}, $i = 1,2,3$, de $\boldsymbol{E}$ estão relacionados com os autovalores de $\boldsymbol{C}$ por meio de

$$\varepsilon_{\mathrm{q}i} = \frac{1}{2}(c_i - 1)\,. \tag{6.43}$$

i) Pode-se também afirmar que $\varepsilon_{\mathrm{q}\max} = \frac{1}{2}(c_1 - 1)$ quando $\boldsymbol{n}^r = \hat{\boldsymbol{e}}_1^r$ e que $\varepsilon_{q\min} = \frac{1}{2}(c_3 - 1)$ quando $\boldsymbol{n}^r = \hat{\boldsymbol{e}}_3^r$.

4.2 Outros tensores das deformações

Propriedades 6.5

a) O tensor $\boldsymbol{C}$ possui a seguinte *decomposição espectral*

$$\boldsymbol{C} = \sum_{i=1}^{3} c_i\,(\hat{\boldsymbol{e}}_i^r \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_i^r)\,. \tag{6.44}$$

b) A decomposição espectral de $\boldsymbol{E}$, por sua vez, é

$$\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{\mathrm{q}i}\,(\hat{\boldsymbol{e}}_i^r \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_i^r)\,. \tag{6.45}$$

Definição 6.17: Família de tensores de deformação de Hill

A família de alongamentos (6.29) pode ser utilizada para gerar uma família de tensores de deformação através da decomposição espectral abaixo

$$\boldsymbol{E}_m = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_m\,(\lambda_i)(\hat{\boldsymbol{e}}_i^r \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_i^r)\,, \tag{6.46}$$

onde

$$\lambda_i = \sqrt{c_i}\,, \quad i = 1,2,3\,. \tag{6.47}$$

Definição 6.18: Tensor dos estiramentos

O *tensor dos estiramentos* $\boldsymbol{U}$ é definido pela seguinte decomposição espectral

$$\boldsymbol{U} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\,(\hat{\boldsymbol{e}}_i^r \otimes \hat{\boldsymbol{e}}_i^r)\,. \tag{6.48}$$

Propriedades 6.6

- Note-se que

$$\boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{C}\,. \tag{6.49}$$

- Note-se também que

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{U}^2 - \boldsymbol{I}\big)\,. \tag{6.50}$$

Observação 6.9

É importante salientar que, em geral, $\lambda(\boldsymbol{n}^r) \neq \boldsymbol{n}^r \cdot \boldsymbol{U}\boldsymbol{n}^r$, sendo a igualdade correta apenas para os vetores da base própria. A expressão correta para $\lambda(\boldsymbol{n}^r)$ é

$$\lambda(\boldsymbol{n}^r) = \sqrt{\boldsymbol{n}^r \cdot \boldsymbol{C}\boldsymbol{n}^r} \,. \tag{6.51}$$

Portanto, o alongamento linear na direção de $\boldsymbol{n}^r$ é dado por

$$\varepsilon(\boldsymbol{n}^r) = \lambda(\boldsymbol{n}^r) - 1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{\mathrm{q}}(\boldsymbol{n}^r)} - 1 \,. \tag{6.52}$$

Observação 6.10

O tensor dos estiramentos pode ser determinado por meio da definição. No entanto, a forma mais conveniente de se calcular $\boldsymbol{U}$ é lembrar-se da decomposição espectral de $\boldsymbol{U}$, mostrada em (6.48), e sua equação característica, exposta abaixo

$$\lambda^3 - i_1\lambda^2 + i_2\lambda - i_3 = 0 \,, \tag{6.53}$$

onde

$$\begin{aligned} i_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \,, \\ i_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \quad \text{e} \\ i_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned} \tag{6.54}$$

são os seus invariantes. Introduzindo-se (6.48) em (6.53), é fácil verificar que

$$\boldsymbol{U}^3 - i_1\boldsymbol{U}^2 + i_2\boldsymbol{U} - i_3\boldsymbol{I} = \boldsymbol{O} \,, \tag{6.55}$$

identidade conhecida como *Teorema de Cailey-Hamilton*[29]. Multiplicando-se (6.55) por $\boldsymbol{U}$, introduzindo-se (6.49) na equação resultante e em (6.55), tem-se

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}^3 - i_1\boldsymbol{C} + i_2\boldsymbol{U} - i_3\boldsymbol{I} = \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C}^2 - i_1\boldsymbol{U}^3 + i_2\boldsymbol{C} - i_3\boldsymbol{U} = \boldsymbol{O} \end{cases} . \tag{6.56}$$

Resolvendo-se a primeira para $\boldsymbol{U}^3$, introduzindo-se o resultado na segunda equação e resolvendo-se esta para $\boldsymbol{U}$, obtém-se

$$\boldsymbol{U} = \frac{1}{i_1 i_2 - i_3}\left[-\boldsymbol{C}^2 + (i_1 - i_2)\boldsymbol{C} + i_1 i_3 \boldsymbol{I}\right], \tag{6.57}$$

onde

$$i_1 i_2 - i_3 = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_1) \,. \tag{6.58}$$

Observação 6.11

Note-se, finalmente, que

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{E}_1 \,, \tag{6.59}$$

onde $\boldsymbol{E}_1$ é dado por (6.46) para $m = 1$. $\boldsymbol{E}_1$ é conhecido como tensor das deformações de Biot[30].

[29] Arthur Cailey (1821-1895), William Rowan Hamilton (1805-1865)
[30] Maurice Anthony Biot (1905-1985)

5 Distorção

Definição 6.19: Distorção

Sejam $\boldsymbol{m}^r$ e $\boldsymbol{n}^r$ dois vetores unitários ortogonais tangentes a fibras concorrentes num determinado ponto material na configuração de referência, conforme a Figura 6.3 abaixo. A transformação leva-os aos vetores $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$, respectivamente. O ângulo entre $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ é dado por $\frac{\pi}{2} - \gamma$, onde γ é, por definição, a *distorção* naquele ponto para as fibras definidas na configuração de referência pelos vetores $\boldsymbol{m}^r$ e $\boldsymbol{n}^r$.

Propriedade 6.7

A distorção pode ser calculada da seguinte forma

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \operatorname{sen}\gamma = \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{m}\|\|\boldsymbol{n}\|} . \tag{6.60}$$

Como $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{m}^r$ e $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{n}^r$, a distorção é dada também por

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{1}{\lambda(\boldsymbol{m}^r)\lambda(\boldsymbol{n}^r)} \boldsymbol{m}^r \cdot \boldsymbol{C}\boldsymbol{n}^r . \tag{6.61}$$

Como $\boldsymbol{m}^r \cdot \boldsymbol{n}^r = 0$, com a ajuda de (6.38) e denotando $\gamma = \gamma(\boldsymbol{m}^r, \boldsymbol{n}^r)$, tem-se

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\gamma(\boldsymbol{m}^r, \boldsymbol{n}^r) = \frac{1}{\lambda(\boldsymbol{m}^r)\lambda(\boldsymbol{n}^r)} \boldsymbol{m}^r \cdot \boldsymbol{E}\boldsymbol{n}^r . \tag{6.62}$$

Figura 6.3: Distorção

Propriedade 6.8

Como as componentes de $\boldsymbol{E}$ em uma base ortonormal $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ são dadas por

$$E_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{E}\boldsymbol{e}_j \tag{6.63}$$

então

$$E_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_q(\boldsymbol{e}_i) , & \text{se } i = j , \\ \frac{1}{2}\lambda(\boldsymbol{e}_i)\lambda(\boldsymbol{e}_j)\operatorname{sen}\gamma(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) , & \text{se } i \neq j . \end{cases} \tag{6.64}$$

Logo, tendo os alongamentos quadráticos nas direções de $\boldsymbol{e}_i$ e as distorções para as fibras definidas por $\{\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\}$, determina-se as componentes de $\boldsymbol{E}$ nesta base.

6 Membranas

Definição 6.20: Superfície

Uma superfície é uma entidade geométrica cuja posição é dada por uma equação paramétrica do tipo $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\theta_1, \theta_2)$, onde θ_1 e θ_2 são os parâmetros reais.

Definição 6.21: Membrana

Uma superfície na configuração de referência define os pontos materiais de uma *membrana* do sólido dada por

$$\boldsymbol{x}^r = \boldsymbol{x}^r(\theta_1, \theta_2) . \tag{6.65}$$

Membranas são transformadas por (6.6) da configuração de referência para a configuração atual, conforme a Figura 6.4. Os vetores

$$\boldsymbol{g}_1^r = \frac{\partial \boldsymbol{x}^r}{\partial \theta_1} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{g}_2^r = \frac{\partial \boldsymbol{x}^r}{\partial \theta_2} \tag{6.66}$$

são vetores tangentes a duas fibras de uma membrana na configuração de referência. O vetor do elemento infinitesimal de superfície num ponto desta membrana é dado por

$$d\boldsymbol{S}^r = (\boldsymbol{g}_1^r \times \boldsymbol{g}_2^r)\, d\theta_1 d\theta_2 . \tag{6.67}$$

Após a transformação os vetores $\boldsymbol{g}_1^r$ e $\boldsymbol{g}_2^r$ são levados a $\boldsymbol{g}_1$ e $\boldsymbol{g}_2$ por meio (6.20). O novo elemento infinitesimal de área na configuração atual tem o seguinte vetor

$$d\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_2)\, d\theta_1 d\theta_2 . \tag{6.68}$$

Figura 6.4: Transformação de uma membrana

Propriedades 6.9: Relação de Nanson

a) Pela relação de Nanson (2.134), tem-se

$$d\boldsymbol{S} = J\boldsymbol{F}^{-T} d\boldsymbol{S}^r \ . \tag{6.69}$$

b) Introduzindo-se os vetores unitários normais à membrana nas configurações de referência e atual, $\boldsymbol{n}^r$ e $\boldsymbol{n}$, respectivamente, tem-se

$$\boldsymbol{n} dS = J\boldsymbol{F}^{-T} \boldsymbol{n}^r dS^r \ . \tag{6.70}$$

7 Deformação Volumétrica

Sejam agora $\boldsymbol{g}_1^r$, $\boldsymbol{g}_2^r$ e $\boldsymbol{g}_3^r$ os vetores tangentes a três fibras não co-planares num ponto da configuração de referência de tal forma que $[\![\boldsymbol{g}_1^r, \boldsymbol{g}_2^r, \boldsymbol{g}_3^r]\!] > 0$, conforme pode-se observar na Figura 6.5. O elemento infinitesimal de volume naquele ponto e naquela configuração é dado por

$$dV^r = [\![\boldsymbol{g}_1^r, \boldsymbol{g}_2^r, \boldsymbol{g}_3^r]\!] d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \ . \tag{6.71}$$

Figura 6.5: Transformação de um elemento infinitesimal de volume

Após a transformação os vetores acima são levados a $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$ e $\boldsymbol{g}_3$ e o elemento infinitesimal de volume na configuração atual é dado por

$$dV = [\![\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3]\!] d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \ . \tag{6.72}$$

Como (6.20) vale para cada vetor tangente, então, com a ajuda da relação de Euler (2.133), tem-se

$$dV = \det \boldsymbol{F}\, dV^r = J dV^r. \tag{6.73}$$

Definição 6.22: Deformação volumétrica

A *deformação volumétrica* local é definida por

$$\vartheta = \frac{dV - dV^r}{dV^r} \ . \tag{6.74}$$

Propriedade 6.10

Logo, de (6.73) tem-se

$$\vartheta = J - 1 \,. \tag{6.75}$$

Observação 6.12

A deformação volumétrica, a exemplo dos alongamentos, pode ser definida de outras formas. Uma família de deformações volumétricas, por exemplo, é dada por

$$\vartheta_m = \begin{cases} \dfrac{1}{m}(J^m - 1)\,, & \text{se } m \neq 0\,, \\ \ln J\,, & \text{se } m = 0\,. \end{cases} \tag{6.76}$$

Note-se, em especial, que

$$\vartheta_0 = \ln J = \boldsymbol{I} : \boldsymbol{E}_0 \,, \tag{6.77}$$

onde $\boldsymbol{E}_0$ é dado por (6.46). Nenhum outro membro da família de tensores de deformação (6.46), nem mesmo o tensor de Green, tem uma relação tão simples com o Jacobiano J .

8 Tensor das Rotações

Definição 6.23: Tensor rotação

O tensor

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1} \tag{6.78}$$

é denominado tensor das rotações.

Definição 6.24: Decomposição polar

De (6.78) decorre

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U} \,. \tag{6.79}$$

(6.79) é conhecida como *decomposição polar* de $\boldsymbol{F}$.

Propriedades 6.11

A verificação da ortogonalidade de $\boldsymbol{R}$ é feita abaixo

$$\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = \left(\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1}\right)^T\left(\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1}\right) = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{U}^2\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{I} \,. \tag{6.80}$$

Portanto, $\det \boldsymbol{R} = \pm 1$. A verificação do sinal do determinante de $\boldsymbol{R}$ é feita por meio de

$$\det \boldsymbol{R} = \det\left(\boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1}\right) = \det(\boldsymbol{F})\det\left(\boldsymbol{U}^{-1}\right) = J\frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} > 0 \,. \tag{6.81}$$

Logo,

$$\det \boldsymbol{R} = +1 \,. \tag{6.82}$$

Uma conseqüência da igualdade (6.82) acima é

$$J = \det \boldsymbol{F} = \det(\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}) = \det \boldsymbol{R} \det \boldsymbol{U} = \det \boldsymbol{U} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \,. \tag{6.83}$$

Observação 6.13

Pode-se interpretar (6.79) como a composição de duas operações. Primeiro as fibras são estiradas de acordo com o tensor $\boldsymbol{U}$ e depois são giradas rigidamente de acordo com o tensor $\boldsymbol{R}$.

Observação 6.14

A forma mais expedita de computar $\boldsymbol{R}$ é obtida multiplicando-se (6.55) por $\boldsymbol{U}^{-1}$ e resolvendo-se a equação resultante para $\boldsymbol{U}^{-1}$:

$$\boldsymbol{U}^{-1} = \frac{1}{i_3}[\boldsymbol{C} - i_1\boldsymbol{U} + i_2\boldsymbol{I}]\,, \quad i_3 \neq 0\,, \tag{6.84}$$

onde i_i, $i = 1,2,3$, são dados em (6.54). A seguir $\boldsymbol{R}$ é obtido através de (6.78).

9 Velocidades e Acelerações

Definição 6.25: Velocidade de um ponto material

A *velocidade* de um ponto material é dada pelo vetor

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{u}}\,, \tag{6.85}$$

onde o ponto superposto indica a derivada no tempo de uma grandeza para um ponto material fixo.

Observação 6.15

Note-se que $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}^r)$ é um campo vetorial.

Definição 6.26: Aceleração de um ponto material

A *aceleração* de um ponto material é dada por

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{u}}\,. \tag{6.86}$$

Note-se que $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}^r)$ é um campo vetorial.

Definição 6.27: Gradiente das velocidades

O *gradiente do campo das velocidades* $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}^r)$ é o campo tensorial dado por

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \nabla\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{F}}\,. \tag{6.87}$$

Definição 6.28: Tensor taxa de deformação

O *tensor taxa de deformação de Green* é dado pela diferenciação no tempo de $\boldsymbol{E}$. De (6.36) decorre

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{F}}^T\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^T\dot{\boldsymbol{F}}\right). \tag{6.88}$$

Definição 6.29: Tensor das velocidades angulares

O tensor

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^T \tag{6.89}$$

é chamado de *tensor das velocidades angulares*. Observe-se que a diferenciação de $\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{I}$ no tempo fornece $\dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^T + \boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{R}}^T = \boldsymbol{O}$, donde demonstra-se que

$$\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\Omega}^T \ . \tag{6.90}$$

Portanto $\boldsymbol{\Omega}$ é anti-simétrico.

Definição 6.30: Vetor das velocidades angulares

O vetor axial de $\boldsymbol{\Omega}$ é denominado *vetor das velocidades angulares* e é denotado por

$$\boldsymbol{\omega} = \text{axial}(\boldsymbol{\Omega}) \ . \tag{6.91}$$

Definição 6.31: Tensor das acelerações angulares

O tensor $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ é chamado de *tensor das acelerações angulares*.

Definição 6.32: Vetor das acelerações angulares

O seu vetor axial $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ é denominado *vetor das acelerações angulares*.

10 Movimento de Corpo Rígido

Definição 6.33: Movimento de corpo rígido

Um sólido sofre um *movimento de corpo rígido* quando o seu movimento puder ser descrito por

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^r, t) = \boldsymbol{x}_0(t) + \boldsymbol{Q}(t)(\boldsymbol{x}^r - \boldsymbol{x}_0^r) \ , \tag{6.92}$$

com $\boldsymbol{Q}$ sendo uma rotação, com $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{x}^r$ sendo os vetores posição de um ponto material qualquer do sólido nas configurações atual e de referência e com $\boldsymbol{x}_0$ e $\boldsymbol{x}_0^r$ sendo os vetores posição do ponto 0 nas configurações atual e de referência.

Propriedades 6.12

a) Note-se que

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}^r - \boldsymbol{x}_0^r) \ , \tag{6.93}$$

ficando fácil mostrar que

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| = \|\boldsymbol{x}^r - \boldsymbol{x}_0^r\| \ . \tag{6.94}$$

uma vez que $\boldsymbol{Q}$ é ortogonal, isto é, $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$. Logo, (6.92) preserva as distâncias entre os pontos materiais.

b) Para movimentos de corpo rígido, é fácil verificar que $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, $\dot{\boldsymbol{L}} = \dot{\boldsymbol{Q}}$ e $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T$. Como era esperado, o tensor das rotações é igual a $\boldsymbol{Q}$, o tensor das deformações é o tensor nulo e o tensor dos estiramentos é o tensor identidade.

11 Pequenas Deformações

Definição 6.34: Pequenas deformações

Quando em uma transformação

$$|\varepsilon(\boldsymbol{s}^r)| < \varepsilon \ll 1 \quad \text{e} \quad |\gamma(\boldsymbol{r}^r, \boldsymbol{s}^r)| < \varepsilon \ll 1 \ , \quad \forall \boldsymbol{r}^r, \boldsymbol{s}^r \ , \tag{6.95}$$

diz-se que as deformações do sólido são *pequenas*. É comum utilizar-se o valor $\varepsilon = 1\%$ como limite das pequenas deformações.

Definição 6.35: Ordem de uma função

Diz-se que uma função $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ é da ordem de ε^n, com $n \in \mathbb{N}$, se

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon^{n-1}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon^n} \neq 0 \,. \tag{6.96}$$

A notação de Landau[31] para uma função assim é

$$f(\varepsilon) = O(\varepsilon^n) \,. \tag{6.97}$$

Observação 6.16

Com a ajuda da definição acima (6.32) pode ser escrita como

$$\varepsilon_m = \varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right) . \tag{6.98}$$

Diz-se, então, que $\varepsilon_m = \varepsilon$ até primeira ordem em ε. Assim, pode-se confundir todas as definições de alongamentos de (6.32) assim como as de tensores de deformação de (6.46) até primeira ordem em ε.

Propriedades 6.13

a) Portanto, com (6.42) o alongamento em uma direção dada pelo vetor unitário $\boldsymbol{s}$ é dado por

$$\varepsilon(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{E}\boldsymbol{s} \,. \tag{6.99}$$

b) No caso de pequenas deformações, tem-se de (6.62) para a distorção

$$\frac{1}{2}\gamma(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E}\boldsymbol{s} \,, \tag{6.100}$$

até primeira ordem em ε, onde $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ são vetores unitários ortogonais entre si. Para se demonstrar isto, verifique-se que

$$\operatorname{sen}\gamma = \gamma + O\left(\gamma^3\right) \quad \text{e} \quad \frac{1}{\lambda} = 1 + O(\varepsilon) \,.$$

(6.100) diz que metade da distorção é dada por uma forma bilinear simétrica.

c) Como as componentes de $\boldsymbol{E}$ em uma base ortonormal $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ são dadas por

$$E_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{E}\boldsymbol{e}_j \tag{6.101}$$

então

$$E_{ij} = \begin{cases} \varepsilon(\boldsymbol{e}_i) \,, & \text{se } i = j \,, \\ \dfrac{1}{2}\gamma\left(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\right) , & \text{se } i \neq j \,. \end{cases} \tag{6.102}$$

Logo, todas as componentes do tensor $\boldsymbol{E}$ em uma base ortonormal são da ordem de ε.

Observação 6.17

Observando-se agora a expressão (6.59), verifica-se que

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{E} \,, \tag{6.103}$$

até primeira ordem em ε. Logo (6.103) é válida para pequenas deformações. Como

[31] Edmund Landau (1877-1938)

$$\lambda^{-1} = \frac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right),$$

pode-se concluir de (6.48) que

$$\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}\ , \tag{6.104}$$

até primeira ordem em ε. Logo (6.104) é válida para pequenas deformações.

Observação 6.18

Considere-se agora o Jacobiano da transformação (6.83) e verifique-se que

$$J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + O\left(\varepsilon^2\right). \tag{6.105}$$

Logo,

$$J = 1 + \mathrm{tr}\boldsymbol{E}\ , \tag{6.106}$$

até primeira ordem em ε. Conseqüentemente, tem-se para a deformação volumétrica (6.75) a seguinte expressão

$$\vartheta = \mathrm{tr}\boldsymbol{E}\ , \tag{6.107}$$

até primeira ordem em ε.

11.1 Máximo e mínimo alongamento

(6.99) é uma forma quadrática. Seja uma base própria de $\boldsymbol{E}$, indicada por $\{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3\}$, e sejam ε_i, $i = 1,2,3$, os seus correspondentes autovalores, ordenados de forma que

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3\ . \tag{6.108}$$

Logo, conforme as Propriedades 2.41,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\max} &= \varepsilon_1 \quad \text{para} \quad \boldsymbol{s} = \hat{\boldsymbol{e}}_1 \quad \text{e} \\ \varepsilon_{\min} &= \varepsilon_3 \quad \text{para} \quad \boldsymbol{s} = \hat{\boldsymbol{e}}_3\ . \end{aligned} \tag{6.109}$$

11.2 Máxima distorção

Propriedade 6.14

Uma propriedade inetressante das distorções, quando as deformações são pequenas, é que $\frac{1}{2}\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ passa por um máximo e por um mínimo para um dado vetor unitário $\boldsymbol{r}$ fixo. Para se verificar isto, considere-se um vetor unitário $\boldsymbol{r}$ fixo e varie-se apenas o vetor unitário $\boldsymbol{s}$, conforme a Figura 6.6 abaixo. $\boldsymbol{s}$ pode ser expresso por

$$\boldsymbol{s} = \cos\varphi\boldsymbol{s}_0 + \mathrm{sen}\varphi\boldsymbol{s}_1\ , \tag{6.110}$$

onde $\boldsymbol{s}_0$ e $\boldsymbol{s}_1$ são vetores unitários ortogonais a $\boldsymbol{r}$, com $\boldsymbol{s}_0$ contido no plano definido por $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{E}\boldsymbol{r}$, e sendo $\boldsymbol{s}_1$ ortogonal a este plano. Em (6.110) φ é o ângulo entre $\boldsymbol{s}_0$ e $\boldsymbol{s}$.

Figura 6.6: Construção de $\frac{1}{2}\gamma_0$

Como $\boldsymbol{Er}$ e $\boldsymbol{s}_1$ são, por construção, ortogonais, ou seja, $(\boldsymbol{Er})\cdot\boldsymbol{s}_1 = 0$, tem-se de (6.100) com (6.110)

$$\frac{1}{2}\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}) = \cos\varphi\,\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{Es}_0\ . \tag{6.111}$$

Portanto, $\frac{1}{2}|\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})|$ para $\boldsymbol{r}$ fixo passa por um máximo para $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$, ou seja, para $\boldsymbol{s} = \pm\boldsymbol{s}_0$. Este valor máximo será denotado da seguinte forma

$$\frac{1}{2}\gamma_0(\boldsymbol{r}) = \left|\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{Es}_0\right|. \tag{6.112}$$

Note-se que $(\boldsymbol{Er})\cdot\boldsymbol{s}_0$ é a projeção de $\boldsymbol{Er}$ sobre o plano normal a $\boldsymbol{r}$, como também $(\boldsymbol{Er})\cdot\boldsymbol{r}$ é a projeção de $\boldsymbol{Er}$ na direção de $\boldsymbol{r}$. Assim,

$$\boldsymbol{Er} = (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{Er})\boldsymbol{r} + (\boldsymbol{s}_0\cdot\boldsymbol{Er})\boldsymbol{s}_0 \tag{6.113}$$

representa a decomposição de $\boldsymbol{Er}$ nas direções de $\boldsymbol{r}$ e de $\boldsymbol{s}_0$. Portanto

$$\frac{1}{2}\gamma_0(\boldsymbol{r}) = \|\boldsymbol{Er} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{Er})\boldsymbol{r}\|\,. \tag{6.114}$$

Mas é fácil mostrar que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Er} - (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{Er})\boldsymbol{r} &= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{r})\boldsymbol{Er}\\ &= [\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{Er})]\times\boldsymbol{r}\ .\end{aligned} \tag{6.115}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2}\gamma_0(\boldsymbol{r})\right]^2 &= [(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{r})\boldsymbol{Er}]\cdot[(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{r})\boldsymbol{Er}] =\\ &= (\boldsymbol{Er})\cdot\left[(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{r})^2\,\boldsymbol{Er}\right] =\\ &= (\boldsymbol{Er})\cdot[(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{r}\otimes\boldsymbol{r})\boldsymbol{Er}] =\\ &= (\boldsymbol{Er})\cdot\{[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{Er})]\times\boldsymbol{r}\} =\\ &= [\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{Er})]\cdot[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{Er})] =\\ &= \|\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{Er})\|^2\ .\end{aligned} \tag{6.116}$$

Portanto, dado o vetor unitário $\boldsymbol{r}$ a distorção máxima é dada por

$$\frac{1}{2}\gamma_0(\boldsymbol{r}) = \|\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{E}\boldsymbol{r})\|\,. \tag{6.117}$$

Propriedade 6.15

Seja uma base própria de $\boldsymbol{E}$, designada por $\{\hat{\boldsymbol{e}}_1,\hat{\boldsymbol{e}}_2,\hat{\boldsymbol{e}}_3\}$, e sejam ε_i, $i=1,2,3$, os seus correspondentes autovalores, ordenados de acordo com (6.108). Seja o vetor unitário $\boldsymbol{r}$ dado por

$$\boldsymbol{r} = \cos\psi\cos\varphi\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \operatorname{sen}\psi\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \cos\psi\operatorname{sen}\varphi\hat{\boldsymbol{e}}_3\,, \quad \psi\in[0,2\pi),\,\varphi\in[0,\pi]\,, \tag{1.118}$$

onde ψ é o ângulo entre $\boldsymbol{r}$ e o plano definido por $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ e $\hat{\boldsymbol{e}}_3$ e φ é o ângulo entre a projeção de $\boldsymbol{r}$ neste plano e o vetor $\hat{\boldsymbol{e}}_1$. ψ e φ são as coordenadas esféricas de $\boldsymbol{r}$, sendo ψ a longitude em relação ao plano definido por $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ e $\hat{\boldsymbol{e}}_3$ e sendo φ a latitude. Introduzindo-se a seguinte decomposição espectral

$$\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{3}\varepsilon_i\hat{\boldsymbol{e}}_i\otimes\hat{\boldsymbol{e}}_i \tag{1.119}$$

em (1.118) em $\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{E}\boldsymbol{r})$, tem-se

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{E}\boldsymbol{r}) = {} & (\varepsilon_3-\varepsilon_2)\operatorname{sen}\psi\cos\psi\operatorname{sen}\varphi\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \\ & + (\varepsilon_1-\varepsilon_3)\cos^2\psi\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \\ & + (\varepsilon_2-\varepsilon_1)\operatorname{sen}\psi\cos\psi\cos\varphi\hat{\boldsymbol{e}}_3\,.\end{aligned} \tag{1.120}$$

Com (1.120) em (6.116), chega-se em

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\gamma_0\right)^2 = {} & \left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_3}{2}\right)^2 - (\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\operatorname{sen}^2\psi + \\ & -\left[\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}\left(1-2\cos^2\psi\cos^2\varphi\right) + \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_3}{2}\left(1-2\cos^2\psi\operatorname{sen}^2\varphi\right)\right]^2\,.\end{aligned} \tag{1.121}$$

Logo, (1.121) tem um máximo se

$$\operatorname{sen}^2\psi = 0\,, \quad \cos^2\psi = 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}^2\varphi = \cos^2\varphi = \frac{1}{2}\,. \tag{1.122}$$

Portanto, quando $\psi=0$ ou $\psi=\pi$ e $\varphi = \pi/4$ ou $\varphi = 3\pi/4$. Assim, quando

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\max} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{\boldsymbol{e}}_1\pm\hat{\boldsymbol{e}}_3)\,, \tag{1.123}$$

tem-se que

$$\max\left(\frac{1}{2}\gamma_0\right) = \frac{1}{2}\gamma_0(\boldsymbol{r}_{\max}) = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_3}{2}\,. \tag{1.124}$$

Note-se que (1.123) significa 4 vetores unitários dados respectivamente por

$$\boldsymbol{r}_{\max} = \sqrt{2}/2\begin{cases}(\hat{\boldsymbol{e}}_1+\hat{\boldsymbol{e}}_3)\,,\\ -(\hat{\boldsymbol{e}}_1+\hat{\boldsymbol{e}}_3)\,,\\ (\hat{\boldsymbol{e}}_1-\hat{\boldsymbol{e}}_3) \quad \text{e}\\ -(\hat{\boldsymbol{e}}_1-\hat{\boldsymbol{e}}_3)\,.\end{cases} \tag{6.125}$$

Portanto, a máxima distorção (em valor absoluto) em um ponto é dada por

$$\gamma_{\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \ . \tag{1.126}$$

Note-se que ela ocorre para o par de vetores $\{\boldsymbol{r}_{\max}, \boldsymbol{s}_{\max}\}$, onde $\boldsymbol{s}_{\max} = \pm\hat{\boldsymbol{e}}_2 \times \boldsymbol{r}_{\max}$. São ao todo oito pares de vetores unitários diferentes.

Propriedade 6.16

Suponha-se, agora, que o vetor unitário $\boldsymbol{r}$ esteja contido nos planos dos vetores da base própria, sendo dado por

$$\boldsymbol{r} = \cos\varphi\hat{\boldsymbol{e}}_i + \text{sen}\varphi\hat{\boldsymbol{e}}_j \ , \quad i \neq j \ . \tag{6.127}$$

Logo, de (6.117), tem-se

$$\frac{1}{2}\gamma_0(\boldsymbol{r}) = \left|(\varepsilon_i - \varepsilon_j)\text{sen}\varphi\cos\varphi\right| = \left|\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_j}{2}\text{sen}2\varphi\right| . \tag{6.128}$$

Portanto, o valor máximo de (6.128) é dado por $\left|\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_j}{2}\right|$ para $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Como

$$\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_i\cos^2\varphi + \varepsilon_j\text{sen}^2\varphi = \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_j}{2} + \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_j}{2}\cos 2\varphi \ , \tag{6.129}$$

de (6.128) e (6.129) tem-se

$$\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_j}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_0\right)^2 = \left(\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_j}{2}\right)^2 , \quad i, j = 1,2,3, \ i \neq j. \tag{6.130}$$

No plano $\varepsilon \times \frac{1}{2}\gamma_0$, (6.130) representa três semi-círculos com centros em $\left(\frac{\varepsilon_i + \varepsilon_j}{2}, 0\right)$ e raios $R = \left|\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_j}{2}\right|$, como ilustrado na Figura 6.7.

Figura 6.7: Círculos de Mohr

Observação 6.19

Os círculos da Figura 6.7 são denominados *Círculos de Mohr*[32]. Pode-se mostrar que $\frac{1}{2}\gamma_0(\boldsymbol{r})$ para todos os vetores unitários $\boldsymbol{r}$ possíveis estão entre os três círculos de Mohr, isto é, na região hachurada da Figura 6.7: Círculos de Mohr. Apenas o círculo externo, o qual correspondente a vetores $\boldsymbol{r}$ no plano dos vetores $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ e $\hat{\boldsymbol{e}}_3$, ou seja, aquele cujo centro está em $\left(\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_3),0\right)$ e cujo raio é $\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_3)$, tem importância prática como ferramenta de visualização.

12 Pequenas Rotações

Introduzindo-se (6.104) em (6.78), tem-se

$$\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{L})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{L}-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{E}\,. \tag{6.131}$$

Suponha-se, agora, que as componentes do gradiente dos deslocamentos $\boldsymbol{L}$ sejam pequenas e da ordem de $\varepsilon \ll 1$. Assim,

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{L}-\boldsymbol{E} \tag{6.132}$$

até primeira ordem em ε.

Definição 6.36: Tensor das pequenas rotações

O tensor

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{L}-\boldsymbol{E}\,, \tag{6.133}$$

tal que

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W}\,, \tag{6.134}$$

até primeira ordem em ε, é denominado *tensor das pequenas rotações*.

Propriedades 6.17

a) Veja-se que, de (6.133), tem-se

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{W}\,. \tag{6.135}$$

b) Observando-se (6.37), verifica-se que

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^T\right), \tag{6.136}$$

até primeira ordem em ε.

c) De (6.135), tem-se que

$$\boldsymbol{W}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}^T\right), \tag{6.137}$$

até primeira ordem em ε. Logo $\boldsymbol{W}$ é anti-simétrico e da ordem de ε.

d) Quando as deformações e rotações são pequenas tem-se também que

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{E}+\boldsymbol{W}\,, \tag{6.138}$$

até primeira ordem em ε.

[32] Christian Otto Mohr (1835-1918)

e) De (6.134) tem-se que

$$\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{W} \ , \tag{6.139}$$

até primeira ordem em ε. Logo,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}^T &= \boldsymbol{I} + \boldsymbol{E} - \boldsymbol{W} \ , \\ \boldsymbol{F}^{-1} &= \boldsymbol{I} - \boldsymbol{E} - \boldsymbol{W} \quad \text{e} \\ \boldsymbol{F}^{-T} &= \boldsymbol{I} - \boldsymbol{E} + \boldsymbol{W} \ , \end{aligned} \tag{6.140}$$

também até primeira ordem em ε.

Exercícios 6.1

- Três vetores tangentes a fibras na configuração de referência são dados por
  $\boldsymbol{r}_1^r = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{r}_2^r = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$ e $\boldsymbol{r}_3^r = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3$.
  Após a transformação eles se tornam
  $$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1 &= 1{,}1\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 0{,}9\boldsymbol{e}_3 \ , \\ \boldsymbol{r}_2 &= 0{,}9\boldsymbol{e}_1 + 2{,}1\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \quad \text{e} \\ \boldsymbol{r}_3 &= 1{,}1\boldsymbol{e}_1 + 0{,}9\boldsymbol{e}_2 + 3{,}1\boldsymbol{e}_3 \ . \end{aligned}$$
- Determine $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{R}$.
- Determine autovalores e base própria de $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{U}$.
- Determine $\varepsilon_q(\boldsymbol{q}^r), \varepsilon(\boldsymbol{q}^r), \lambda(\boldsymbol{q}^r)$ e $\gamma(\boldsymbol{q}^r, \boldsymbol{p}^r)$ para os seguintes vetores unitários: $\boldsymbol{q}^r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)$ e $\boldsymbol{p}^r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2)$.
- Uma barra colocada ao longo do eixo x_1 é alongada linearmente de ε e fixada na origem sem que sua seção transversal se deforme. Determine $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^r), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^r), \boldsymbol{F}, \ \boldsymbol{C}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{R}$.
- Uma barra é colocada ao longo do eixo x_1 e após o alongamento do exercício anterior a barra é rodada rigidamente de α em torno de x_3. Determine os vetores e tensores do exercício acima.
- Dado
  $$\boldsymbol{E} = 10^{-3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$
  Determine $\varepsilon_{\max}, \varepsilon_{\min}, \gamma_{\max}$ e $\gamma_{\min}$, onde eles ocorrem e os três círculos de Mohr.
- No laboratório foram colocados sobre uma estrutura três extensômetros nas direções de
  $$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{e}_1 \ , \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{e}_2 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{r}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1)$$
  e foram medidos os seguintes alongamentos lineares $\varepsilon_1 = 0{,}1\%$, $\varepsilon_2 = 0{,}7\%$ e $\varepsilon_3 = 0{,}05\%$. Determine $\boldsymbol{E}$ e $\gamma(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$.

7

Princípios da Mecânica dos Sólidos

1 Princípios da Mecânica Newtoniana

Como introdução aos princípios da Mecânica dos Sólidos Deformáveis faz-se uma recordação dos princípios da Mecânica dos Pontos Materiais, isto é, da Mecânica Newtoniana[33].

1.1 Primeiro Princípio ou Princípio do Espaço Absoluto

Os pontos materiais, aqui admitidos como um conceito primitivo, movem-se num espaço afim Euclidiano de dimensão três.

O espaço afim Euclidiano acima será denotado por $\mathcal{E}_3$. Uma das dificuldades práticas acarretadas pelo Princípio acima é identificar os pontos geométricos de $\mathcal{E}_3$, pois somente pontos materiais podem ser facilmente identificados e eles podem estar se movendo em relação a $\mathcal{E}_3$. Por isso é necessário introduzir a definição de observador. Dá-se o nome de observador ao conjunto $\{O, E_1, E_2, E_3, \mathcal{R}\}$, onde $\{O, E_1, E_2, E_3\}$ são pontos materiais e $\mathcal{R}$ é um aparelho de medição do tempo (relógio), sendo que O é denominado origem e $\boldsymbol{e}_i = \overrightarrow{OE_i}$, $i = 1,2,3$, formam uma base ortonormal de $\mathcal{V}_3$. Ao conjunto $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ dá-se o nome de referencial físico. O grande problema prático deste princípio é como se determinar, a partir de referenciais físicos, um referencial geométrico de $\mathcal{E}_3$.

1.2 Segundo Princípio ou Princípio do Tempo Absoluto

Os conceitos relativos ao tempo, como, por exemplo, os conceitos de intervalo de tempo, de precedência e de simultaneidade são absolutos, ou seja, não dependem do observador.

[33] Isaac Newton (1643-1727)

Observação 7.1

A cinemática dos pontos materiais é totalmente construída com estes dois princípios.

Exemplo 7.1: Movimento Relativo

Este exemplo explora a descrição do movimento de pontos materiais através de referenciais fixos e móveis. Seja $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ um referencial físico considerado fixo, isto é, ele coincide com um referencial geométrico de $\mathcal{E}_3$. Seja $\{O^*, \boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*\}$ um referencial físico móvel, com $\{\boldsymbol{e}_i^*, i = 1,2,3\}$ sendo uma base ortonormal. Considere-se, então, a Figura 7.1. O vetor posição $\boldsymbol{x}$ do ponto material P é dado por

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}^* \ , \tag{7.1}$$

onde $\boldsymbol{x}^*$ é o vetor posição relativo. A velocidade e a aceleração de P no referencial fixo são dados por

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{x}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{x}} \ , \tag{7.2}$$

e

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{x}} \ , \tag{7.3}$$

respectivamente. Logo,

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{x}}_0 + \dot{\boldsymbol{x}}^* \tag{7.4}$$

e

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{x}}_0 + \dot{\boldsymbol{x}}^* \ . \tag{7.5}$$

Figura 7.1: Referencial fixo e móvel

O observador móvel enxerga o movimento de P através do vetor $\boldsymbol{x}^*$, cujas componentes na base móvel são dadas por

$$\overline{x}_i^* = \boldsymbol{x}^* \cdot \overline{\boldsymbol{e}}_i \ . \tag{7.6}$$

A base móvel gira em relação à base fixa de acordo com

$$\overline{\boldsymbol{e}}_i = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_i \ , \tag{7.7}$$

onde $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}(t)$ é uma rotação. Derivando-se (7.7) no tempo, tem-se

$$\dot{\overline{\boldsymbol{e}}}_i = \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{\Omega}\overline{\boldsymbol{e}}_i \ , \tag{7.8}$$

onde

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T \tag{7.9}$$

é, por definição, o *tensor das velocidades angulares* da base móvel. $\boldsymbol{\Omega}$ é um tensor anti-simétrico, isto é, $\boldsymbol{\Omega}^T = -\boldsymbol{\Omega}$. Derivando-se (7.6) no tempo e introduzindo-se (7.8), tem-se

$$\dot{\bar{x}}_i^* = \dot{\boldsymbol{x}}^* \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_i + \boldsymbol{x}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}\bar{\boldsymbol{e}}_i = (\dot{\boldsymbol{x}}^* - \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{x}^*) \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_i \ . \tag{7.10}$$

Portanto, pode-se definir o seguinte *vetor de velocidades aparentes* de P na base móvel

$$\boldsymbol{v}^* = \dot{\boldsymbol{x}}^* - \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{x}^* \ . \tag{7.11}$$

Seja $\boldsymbol{\omega} = \text{axial}(\boldsymbol{\Omega})$ o vetor axial de $\boldsymbol{\Omega}$, denominado *vetor das velocidades angulares* da base móvel. Assim (7.11), com a ajuda de (7.4), torna-se

$$\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{x}}_0 - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{p} \ . \tag{7.12}$$

Derivando-se (7.10) no tempo mais uma vez e introduzindo-se (7.8), tem-se

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{x}}_i^* &= \left(\ddot{\boldsymbol{x}}^* - \boldsymbol{\Omega}\dot{\boldsymbol{x}}^* - \dot{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{x}^*\right) \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_i + (\dot{\boldsymbol{x}}^* - \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{x}^*) \cdot \boldsymbol{\Omega}\bar{\boldsymbol{e}}_i = \\ &= \left(\ddot{\boldsymbol{x}}^* - 2\boldsymbol{\Omega}\dot{\boldsymbol{x}}^* - \dot{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{x}^*\right) \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_i \ . \end{aligned} \tag{7.13}$$

Introduzindo-se (7.11) em (7.13), tem-se

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{x}}_i &= \left(\ddot{\boldsymbol{p}} - 2\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{x}^*) - \dot{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{x}^*\right) \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_i = \\ &= \left(\ddot{\boldsymbol{p}} - 2\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{v}^* - \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{x}^* - \dot{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{x}^*\right) \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_i \ . \end{aligned} \tag{7.14}$$

Pode-se então definir o seguinte *vetor de acelerações aparentes* de P na base móvel

$$\boldsymbol{a}^* = \ddot{\boldsymbol{x}}^* - 2\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{v}^* - \boldsymbol{\Omega}^2\boldsymbol{x}^* - \dot{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{x}^* \ . \tag{7.15}$$

Seja $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ o vetor axial de $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$, denominado *vetor das acelerações angulares* da base móvel. Assim (7.15), com a ajuda de (7.5), torna-se

$$\boldsymbol{a}^* = \boldsymbol{a} - \ddot{\boldsymbol{x}}_0 - 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}^* - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}^*) - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{x}^* \ . \tag{7.16}$$

Observação 7.2

As parcelas de (7.16) recebem os seguintes nomes:

a) Aceleração de Einstein[34]: $-\ddot{\boldsymbol{x}}_0$;
b) Aceleração de Coriolis[35]: $-2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}^*$;
c) Aceleração cetrífuga: $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}^*)$
d) Aceleração de Euler[36]: $-\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{x}^*$.

Observação 7.3

Note-se que

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^* \ , \tag{7.17}$$

se e somente se

$$\dot{\boldsymbol{x}}_0 = \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{o} \ , \tag{7.18}$$

[34] Albert Einstein (1879-1955)
[35] Gaspard Gustave de Coriolis (1792-1843)
[36] Leonhard Euler (1707-1783)

ou seja, se o referencial móvel está fixo também. Da mesma forma,

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^* \,, \tag{7.19}$$

se e somente se

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_0 = \boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{o} \,, \tag{7.20}$$

ou seja, quando o referencial móvel estiver em movimento retilíneo uniforme (MRU) em relação ao referencial fixo.

1.3 Terceiro Princípio ou Princípio das Forças

A influência de outros pontos materiais sobre o movimento de um ponto material pode ser caracterizada por um vetor, denominado força, valendo, a cada instante, a superposição dos efeitos.

Observação 7.4

Este princípio afirma que a interação entre os pontos materiais é representada por uma grandeza de natureza vetorial denominada força. Além disso, a força $\boldsymbol{f}$ que outros pontos materiais exercem sobre um ponto material é a soma vetorial das forças que cada ponto material exerce sobre ele e estas forças não dependem do observador.

Definição 7.1: Ponto material isolado

Chama-se *ponto material isolado* um ponto material para o qual $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{o}$.

1.4 Quarto Princípio ou Princípio da Inércia

Para um referencial fixo todos os pontos materiais isolados estão em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.

Observação 7.5

Este princípio também é conhecido como Primeira Lei de Newton.

Observação 7.6

Todo referencial físico, para o qual o Princípio acima é válido, recebe o nome de referencial inercial. Um teorema de fácil demonstração é que qualquer observador em repouso ou em movimento retilíneo uniforme em relação a um referencial fixo contém também um referencial inercial.

Observação 7.7

Referenciais inerciais são identificados através de pontos materiais. Conforme a escala do problema, utiliza-se, para isso, pontos sobre a superfície da Terra, o centro da Terra, o Sol ou estrelas distantes.

1.5 Quinto Princípio ou Lei da Conservação da Massa

A cada ponto material de um sólido rígido e em cada instante fica associado o escalar $m > 0$, *constante no tempo, denominado massa inercial.*

1.6 Sexto Princípio ou Princípio Fundamental da Dinâmica

Em qualquer referencial inercial, vale

$$\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}\ . \tag{7.21}$$

Observação 7.8

Este princípio também é conhecido como Segunda Lei de Newton.

Exemplo 7.2: Referenciais não-inerciais

Considere-se, agora, a Segunda Lei de Newton (7.21) em um referencial não inercial. Introduzindo-se (7.16) em (7.21), tem-se

$$\boldsymbol{f}^* = m\boldsymbol{a}^*\ , \tag{7.22}$$

onde

$$\boldsymbol{f}^* = \boldsymbol{f} - m\ddot{\boldsymbol{x}}_0 - m2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}^* - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}^*) - m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{x}^*\ . \tag{7.23}$$

Logo, para o observador móvel, a segunda lei de Newton é dada por (7.22) com a força dada por (7.23). O termo

$$\boldsymbol{f}^{\text{ap}} = -m\ddot{\boldsymbol{x}}_0 - m2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}^* - m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}^*) - m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{x}^* \tag{7.24}$$

é denominado de *força aparente de inércia* e suas parcelas têm os nomes correspondentes às acelerações:

- Força de Einstein: $-m\ddot{\boldsymbol{x}}_0$
- Força de Coriolis: $-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}^*$
- Força centrífuga: $-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}^*)$
- Força de Euler: $-m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{x}^*$

Observação 7.9

As duas Leis de Newton acima dependem da existência de referenciais inerciais, sobre cuja determinação nada é dito. Um dos desejos mais persistentes da Física Moderna tem sido o de remover esta questão dos Princípios da Mecânica, algo que Einstein tentou em sua Teoria Geral da Relatividade. O conceito de força também tem sido questionado, uma vez que ela depende estranhamente do referencial, como (7.23) mostra. Mach mostrou que é possível construir uma Física sem este conceito. Outra questão incômoda é a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional (a que entra na Lei da Gravitação de Newton).

Observação 7.10

Para a Engenharia Civil, a superfície da Terra é uma boa aproximação de um referencial inercial. Às vezes é necessário considerar o centro da Terra como um referencial inercial e, assim, as forças aparentes de inércia devidas à rotação da Terra precisam ser consideradas.

1.7 Sétimo Princípio ou Princípio da Ação e Reação

A toda ação corresponde uma reação contrária de mesma intensidade e direção.

Observação 7.11

Este princípio também é conhecido como a Terceira Lei de Newton. Ele afirma que, se $\boldsymbol{f}_{ij}$ é a força que o ponto j exerce sobre o ponto i e se $\boldsymbol{f}_{ji}$ é a força que o ponto i exerce sobre o ponto j, então

$$\boldsymbol{f}_{ji} = -\boldsymbol{f}_{ij} \ . \tag{7.25}$$

Exemplo 7.3: Sistemas de pontos materiais

Considere-se um sistema formado por n pontos materiais. No exterior deste sistema suponha-se que existam m pontos materiais. Seja $\boldsymbol{f}_{ij}$ a força exercida pelo ponto j sobre o ponto i. Sobre um ponto material i do sistema age a seguinte força

$$\boldsymbol{f}_i = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{f}_{ij} + \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{f}_{ik} \ . \tag{7.26}$$

Chamando de $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{a}_i$ e m_i o vetor posição, a velocidade, a aceleração e a massa do ponto material i, pode-se escrever a segunda lei de Newton da seguinte forma

$$\boldsymbol{f}_i = m_i \boldsymbol{a}_i \ . \tag{7.27}$$

O *momento linear*, ou *quantidade de movimento*, de um ponto material i é definido por

$$\boldsymbol{\lambda}_i = m_i \boldsymbol{v}_i \ . \tag{7.28}$$

O momento linear do sistema é dado por

$$\boldsymbol{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\lambda}_i \ . \tag{7.29}$$

O *momento angular* de um ponto material i em relação à origem é dado por

$$\boldsymbol{\mu}_i = \boldsymbol{x}_i \times (m_i \boldsymbol{v}_i) \ . \tag{7.30}$$

O momento angular do sistema é dado por

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\mu}_i \ . \tag{7.31}$$

A *força e o momento externos*, este em relação à origem, atuantes sobre um sistema são definidos por

$$\boldsymbol{f}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{f}_{ij} \tag{7.32}$$

e

$$\boldsymbol{m}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{f}_{ij} \ , \tag{7.33}$$

respectivamente. Com a ajuda da terceira lei de Newton, ou seja, de (7.25) e (7.26), tem-se que

$$\boldsymbol{f}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i \ . \tag{7.34}$$

Supondo-se adicionalmente que as forças $\boldsymbol{f}_{ij}$ entre os pontos i e j sejam *centrais*, isto é, que elas atuem na direção da linha que os une, pode-se demonstrar facilmente que

$$\boldsymbol{m}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{f}_i \ , \tag{7.35}$$

Diferenciando-se (7.29) e (7.31) em relação ao tempo, obtém-se

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{a}_i \tag{7.36}$$

e

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i \times (\, m_i \boldsymbol{a}_i \,) \ . \tag{7.37}$$

Portanto, comparando-se (7.34), (7.27) e (7.36), tem-se

$$\boldsymbol{f}_{\text{ext}} = \dot{\boldsymbol{\lambda}} \ . \tag{7.38}$$

De (7.35) e (7.37), vem

$$\boldsymbol{m}_{\text{ext}} = \dot{\boldsymbol{\mu}} \ . \tag{7.39}$$

(7.38) e (7.39) são as leis da dinâmica de um sistema de pontos materiais.

Observação 7.12

Observe-se que, se o sistema for *isolado*, ou seja, se

$$\boldsymbol{f}_{\text{ext}} = \boldsymbol{m}_{\text{ext}} = \boldsymbol{o} \ , \tag{7.40}$$

então

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{o} \ . \tag{7.41}$$

Portanto, num sistema isolado, os momentos linear e angular se conservam.

2 Princípios da Mecânica dos Sólidos Rígidos

2.1 Primeiro Princípio

Sólidos rígidos são conjuntos contínuos de pontos materiais movendo-se num espaço físico que é um espaço afim euclidiano de dimensão três $(\mathcal{E}_3)$*, de modo que a distância relativa entre os seus pontos materiais permaneça constante.*

2.2 Segundo Princípio

Os conceitos relativos ao tempo, como, por exemplo, os conceitos de intervalo de tempo, de precedência e de simultaneidade são absolutos, ou seja, não dependem do observador.

Observação 7.13

Com estes dois princípios é construída toda a cinemática dos sólidos rígidos. É instrutivo recordar-se esta cinemática com as ferramentas apresentadas neste texto.

Exemplos 7.4: Cinemática de sólidos rígidos

O movimento de um sólido rígido já foi apresentado no item 6.10, sendo descrito por

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^r,t) = \boldsymbol{x}_0(t) + \boldsymbol{Q}(t)(\boldsymbol{x}^r - \boldsymbol{x}_0^r)\,, \tag{7.42}$$

com $\boldsymbol{Q}$ sendo uma rotação, com $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{x}^r$ sendo os vetores posição de um ponto material qualquer do sólido nas configurações atual e de referência e com $\boldsymbol{x}_0$ e $\boldsymbol{x}_0^r$ sendo o vetor posição do ponto 0 na configurações atual e de referência. Note-se que

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}^r - \boldsymbol{x}_0^r)\,, \tag{7.43}$$

ficando fácil mostrar que

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| = \|\boldsymbol{x}^r - \boldsymbol{x}_0^r\|\,. \tag{7.44}$$

uma vez que $\boldsymbol{Q}$ é ortogonal, isto é, $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$. O deslocamento de um ponto qualquer do sólido é dado por

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^r\,. \tag{7.45}$$

O deslocamento do ponto 0 é, por sua vez, dado por

$$\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_0^r\,. \tag{7.46}$$

Diferenciando-se no tempo (7.42), obtém-se a velocidade

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{u}} \tag{7.47}$$

de um ponto material em função da velocidade do ponto 0

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \dot{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{x}^r - \boldsymbol{x}_0^r) = \boldsymbol{v}_0 + \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\,, \tag{7.48}$$

onde

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T \tag{7.49}$$

é, por definição, o *tensor das velocidades angulares* do sólido. $\boldsymbol{\Omega}$ é um tensor anti-simétrico, isto é, $\boldsymbol{\Omega}^T = -\boldsymbol{\Omega}$, resultado este obtido a partir da diferenciação de $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$ no tempo. Seja $\boldsymbol{\omega}$ o vetor axial de $\boldsymbol{\Omega}$, denominado *vetor das velocidades angulares* do sólido. Assim (7.48) torna-se

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\,. \tag{7.50}$$

Diferenciando-se no tempo (7.48) mais uma vez, obtém-se a aceleração de um ponto em função da aceleração do ponto 0

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{\Omega}(\dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\boldsymbol{x}}_0) = \boldsymbol{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{\Omega}^2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\,. \tag{7.51}$$

Seja $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ o vetor axial de $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$, denominado *vetor das acelerações angulares* do sólido, então de (7.51) tem-se

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)]\,. \tag{7.52}$$

(7.42), (7.50) e (7.52) descrevem completamente a cinemática de um sólido rígido.

2.3 Terceiro Princípio

A influência de outros sólidos no movimento de um sólido rígido fica, em cada instante, caracterizada pelas forças distribuídas no volume do sólido $\boldsymbol{b}$*, pelas forças distribuídas na superfície do sólido* $\boldsymbol{t}$*, pelos momentos distribuídos no volume do sólido* $\boldsymbol{g}$*, pelos momentos distribuídos na superfície do sólido* $\boldsymbol{h}$*, pelas forças concentradas* $\boldsymbol{f}_i$ *e pelos momentos concentrados* $\boldsymbol{m}_i$ *nos pontos descritos por* $\boldsymbol{x}_i$*.*

Observação 7.14

Seja V a região do espaço ocupada pelo sólido em cada instante e seja S a superfície externa deste volume. Pode-se, então, escrever as seguintes resultantes

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{\text{ext}} &= \int_V \boldsymbol{b} dV + \int_S \boldsymbol{t} dS + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i \quad \text{e} \\ \boldsymbol{m}_{\text{ext}} &= \int_V \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b} dV + \int_S \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t} dS + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{f}_i + \int_V \boldsymbol{g} dV + \int_S \boldsymbol{h} dS + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m}_i \ . \end{aligned} \tag{7.53}$$

2.4 Quarto Princípio ou Princípio da Inércia

Para um referencial fixo todos os pontos materiais isolados estão em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.

2.5 Quinto Princípio ou Lei da Conservação da Massa

A cada ponto material de um sólido rígido e em cada instante fica associado o escalar $\rho > 0$, denominado massa específica, de modo que a sua massa inercial se conserve.

Observação 7.15

Veja que

$$dm = \rho dV \tag{7.54}$$

faz o papel de massa do ponto material. dm se conserva, ou seja, é constante no tempo.

Definição 7.2: Momento linear e momento angular

O *momento linear* e o *momento angular* em relação à origem de um sólido rígido são definidos por

$$\boldsymbol{\lambda} = \int_V \rho \boldsymbol{v} dV \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\mu} = \int_V \boldsymbol{x} \times (\rho \boldsymbol{v}) dV \ , \tag{7.55}$$

respectivamente.

Propriedade 7.1

Introduzindo-se (7.50) na primeira equação de (7.55), tem-se

$$\boldsymbol{\lambda} = M \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{s}_0 \tag{7.56}$$

onde

$$M = \int_V \rho dV \quad \text{e} \quad \boldsymbol{s}_0 = \int_V \rho (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) dV \tag{7.57}$$

são, respectivamente, a *massa* do sólido e o *momento estático* em relação ao ponto 0.

Definição 7.3: Centro de gravidade

Quando 0 é o centro de gravidade do sólido, por definição,

$$\boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{o} \ . \tag{7.58}$$

Observação 7.16

Quando 0 é o centro de gravidade do sólido, de (7.56) e (7.58), decorre

$$\boldsymbol{\lambda} = M\boldsymbol{v}_0 \ . \tag{7.59}$$

Propriedade 7.2: Tensor de inércia

Introduzindo-se (7.50) na segunda equação de (7.55), tem-se

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{x}_0 \times \int_V [\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)]\rho dV + \int_V (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \times [\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)]\rho dV \ . \tag{7.60}$$

Mas, como se verificou em (2.127),

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)] &= [(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)]\boldsymbol{\omega} - [(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{\omega}](\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = \\ &= [(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \otimes (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)]\boldsymbol{\omega} \ .\end{aligned} \tag{7.61}$$

Logo,

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{x}_0 \times (M\boldsymbol{v}_0) + \boldsymbol{x}_0 \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{s}_0) + \boldsymbol{s}_0 \times \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} \ , \tag{7.62}$$

onde

$$\boldsymbol{J} = \int_V [(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \otimes (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)]\rho dV \tag{7.63}$$

é o *tensor de inércia* do sólido. Observe que $\boldsymbol{J}$ é simétrico.

Observação 7.17

Quando 0 é o centro de gravidade do sólido, tem-se

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{x}_0 \times (M\boldsymbol{v}_0) + \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} \ . \tag{7.64}$$

Observação 7.18

Note-se que $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}(t)$, isto é, o tensor de inércia varia no tempo. Na configuração de referência resulta

$$\boldsymbol{J}^r = \int_V [(\boldsymbol{x}^r - \boldsymbol{x}_0^r) \cdot (\boldsymbol{x}^r - \boldsymbol{x}_0^r)\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{x}^r - \boldsymbol{x}_0^r) \otimes (\boldsymbol{x}^r - \boldsymbol{x}_0^r)]\rho dV \ , \tag{7.65}$$

que é constante. Logo, com a ajuda de (7.43), tem-se

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{J}^r\boldsymbol{Q}^T \tag{7.66}$$

e

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{J}} &= \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{J}^r\boldsymbol{Q}^T + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{J}^r\dot{\boldsymbol{Q}}^T = \\ &= \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{J}^r\boldsymbol{Q}^T - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{J}^r\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{\Omega} = \\ &= \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{J} - \boldsymbol{J}\boldsymbol{\Omega} \ .\end{aligned} \tag{7.67}$$

Observação 7.19

Diferenciando-se (7.55) no tempo e considerando-se que $dm = \rho dV$ se conserva, obtém-se

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\lambda}} &= \int_V \rho \boldsymbol{a} dV \quad \text{e} \\ \dot{\boldsymbol{\mu}} &= \int_V \boldsymbol{x} \times (\rho \boldsymbol{a}) dV \ .\end{aligned} \tag{7.68}$$

Introduzindo-se (7.52) na primeira equação de (7.68), tem-se

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = M\boldsymbol{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{s}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{s}_0) \ . \tag{7.69}$$

Quando 0 é o centro de gravidade do sólido, tem-se

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = M\boldsymbol{a}_0 \ . \tag{7.70}$$

Introduzindo-se (7.52) na segunda equação de (7.68), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{x}_0 \times \int_V [\boldsymbol{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)]] \rho dV + \\ + \int_V (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \times [\boldsymbol{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)]] \rho dV \ . \end{aligned} \tag{7.71}$$

Assim, verificando-se que

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \times \{\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)]\} = \\ = \boldsymbol{\omega} \times [(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \boldsymbol{I} - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \otimes (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)] \boldsymbol{\omega} \ . \end{aligned} \tag{7.72}$$

e efetuando-se as devidas manipulações, chega-se em

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{x}_0 \times (M\boldsymbol{a}_0) + \boldsymbol{x}_0 \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{s}_0) + \\ + \boldsymbol{x}_0 \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{s}_0)] + \boldsymbol{s}_0 \times \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}) \ . \end{aligned} \tag{7.73}$$

Observação 7.20

Quando 0 é o centro de gravidade do sólido, tem-se

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{x}_0 \times (M\boldsymbol{a}_0) + \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}) \ . \tag{7.74}$$

Quando o pólo do momento angular é o centro de gravidade do sólido, (7.74) reduz-se a

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}) \ . \tag{7.75}$$

2.6 Sexto Princípio ou Leis de Euler

A cada ponto material de um sólido rígido fica associado o escalar $\rho > 0$*, denominado massa específica, de modo que, em cada instante, em qualquer referencial inercial*

$$\boldsymbol{f}_{\text{ext}} = \dot{\boldsymbol{\lambda}} \tag{7.76}$$

e

$$\boldsymbol{m}_{\text{ext}} = \dot{\boldsymbol{\mu}} \ . \tag{7.77}$$

Observação 7.21

A segunda Lei de Euler, equação (7.77), precisa, no contexto dos sólidos rígidos, ser formulada e não é um teorema como no contexto dos sistemas de pontos materiais, equação (7.39).

Exemplos 7.5: Dinâmica de sólidos rígidos

Introduzindo-se (7.69) e (7.73) em (7.76) e (7.77), tem-se:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{\text{ext}} &= M\boldsymbol{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{s}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{s}_0) \quad \text{e} \\ \boldsymbol{m}_{\text{ext}} &= \boldsymbol{x}_0 \times (M\boldsymbol{a}_0) + \boldsymbol{x}_0 \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{s}_0) + \\ &\quad + \boldsymbol{x}_0 \times [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{s}_0)] + \boldsymbol{s}_0 \times \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}) \ . \end{aligned} \tag{7.78}$$

Quando 0 é o centro de gravidade do sólido, as equações de (7.78) reduzem-se a

$$\boldsymbol{f}_{\text{ext}} = M\boldsymbol{a}_0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{m}_{\text{ext}} = \boldsymbol{x}_0 \times (M\boldsymbol{a}_0) + \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}) \ . \tag{7.79}$$

Quando o centro de gravidade é escolhido como pólo do momento externo e do momento angular, as equações de (7.79) reduzem-se a

$$\boldsymbol{f}_{\text{ext}} = M\boldsymbol{a}_0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{m}_{\text{ext}} = \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}) \,. \tag{7.80}$$

Observação 7.22

Quando o sólido rígido é isolado, ou seja, quando

$$\boldsymbol{f}_{\text{ext}} = \boldsymbol{m}_{\text{ext}} = \boldsymbol{o} \,, \tag{7.81}$$

de (7.80) conclui-se que

$$\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{o} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}) \,. \tag{7.82}$$

Logo, o centro de gravidade de um sólido rígido isolado está em MRU, mas não se tem necessariamente $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{o}$, ou seja, os demais pontos do sólido podem não estar em MRU. Quem já jogou algum esporte com bola sabe muito bem disso.

2.7 Sétimo Princípio

A toda ação corresponde uma reação contrária de mesma intensidade e direção.

3 Princípios da Mecânica dos Sólidos Deformáveis

3.1 Primeiro Princípio

Sólidos deformáveis são Meios Contínuos, cujos pontos materiais movem-se num espaço físico que é um espaço afim Euclidiano de dimensão três $(\mathcal{E}_3)$.

3.2 Segundo Princípio

Os conceitos relativos ao tempo são absolutos.

Observação 7.23

Com estes dois princípios foi elaborado todo o estudo das deformações.

3.3 Terceiro Princípio

A influência de outros sólidos no movimento de um sólido deformável fica, em cada instante, caracterizada pelas forças distribuídas no volume do sólido $\boldsymbol{b}$ *e pelas forças distribuídas na superfície do sólido .*

Observação 7.24

Observe-se que os tipos de esforços atuantes foram restringidos. Forças concentradas poderiam ser introduzidas, mas requerem um formalismo matemático mais complexo. A introdução de momentos distribuídos ou concentrados requer que o Meio Contínuo utilizado seja generalizado.

Observação 7.25

Seja V a região do espaço ocupada pelo sólido em cada instante e seja S a superfície externa deste volume. Pode-se, então, escrever as seguintes resultantes

$$\boldsymbol{f}_{\text{ext}} = \int_V \boldsymbol{b} dV + \int_S \boldsymbol{t} dS \quad \text{e} \quad \boldsymbol{m}_{\text{ext}} = \int_V \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b} dV + \int_S \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t} dS \ . \tag{7.83}$$

Seja V^r a região do espaço ocupada pelo sólido na configuração de referência e seja S^r a superfície externa deste volume. Seja $\boldsymbol{x}^r$ o vetor posição de um ponto material na configuração de referência e seja $\boldsymbol{x}$ o vetor posição do mesmo ponto material na configuração atual.

Observação 7.26

Pode-se, agora, definir as forças distribuídas $\boldsymbol{b}^r$ e $\boldsymbol{t}^r$, que atuam na configuração atual, tais que, para um mesmo ponto material,

$$\boldsymbol{b}^r dV^r = \boldsymbol{b} dV \quad \text{e} \quad \boldsymbol{t}^r dS^r = \boldsymbol{t} dS \ . \tag{7.84}$$

$\boldsymbol{b}^r$ é a força de volume por unidade de volume na configuração de referência e $\boldsymbol{t}^r$ é a força superficial por unidade de área na configuração de referência. Com (7.84) podem-se efetuar as integrais de (7.83) na configuração de referência, ou seja,

$$\boldsymbol{f}_{\text{ext}} = \int_{V^r} \boldsymbol{b}^r dV^r + \int_{S^r} \boldsymbol{t}^r dS^r \quad \text{e} \quad \boldsymbol{m}_{\text{ext}} = \int_{V^r} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}^r dV^r + \int_{S^r} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t}^r dS^r \ . \tag{7.85}$$

3.4 Quarto Princípio ou Princípio da Inércia

Para um referencial fixo todos os pontos materiais isolados estão em repouso ou em movimento retilíneo uniforme.

3.5 Quinto Princípio ou Lei da Conservação da Massa

A cada ponto material de um sólido rígido e em cada instante fica associado o escalar $\rho > 0$*, denominado massa específica, de modo que a sua massa se conserve.*

Observação 7.27

Em cada instante

$$dm = \rho dV \tag{7.86}$$

faz o papel de massa do ponto material. Como a massa de um ponto material deve-se conservar, pode-se concluir que dm é uma constante. Chamando de ρ^r a *massa específica na configuração de referência*, tem-se

$$\rho dV = \rho^r dV^r \ . \tag{7.87}$$

Assim, com a ajuda do Jacobiano da transformação

$$J = \det \boldsymbol{F} = \frac{dV}{dV^r} \ , \tag{7.88}$$

pode-se concluir que

$$J\rho = \rho^r \ . \tag{7.89}$$

(7.89) é conhecida como *Lei da Conservação da Massa*.

Propriedades 7.3

- Considere-se que um tensor $\boldsymbol{T}$ seja função de um parâmetro ζ e que a derivada de uma grandeza $(\bullet)$ em relação a este parâmetro seja dada por $(\bullet)'$. Então, pode-se verificar que

$$(\det \boldsymbol{T})' = \det \boldsymbol{T} \left(\boldsymbol{T}^{-T} : \boldsymbol{T}'\right). \tag{7.90}$$

Para se deduzir (7.90), veja-se que a derivada de (2.133), leva a

$$(\det \boldsymbol{T})' = \frac{\left(\boldsymbol{T}'\boldsymbol{a}\right)\cdot(\boldsymbol{T}\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{T}\boldsymbol{c}) + \left(\boldsymbol{T}'\boldsymbol{b}\right)\cdot(\boldsymbol{T}\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{T}\boldsymbol{a}) + \left(\boldsymbol{T}'\boldsymbol{c}\right)\cdot(\boldsymbol{T}\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{T}\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}}. \tag{7.91}$$

Introduzindo-se (2.134) três vezes em (7.91) e fazendo-se $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}_3$, tem-se

$$(\det \boldsymbol{T})' = (\det \boldsymbol{T})\left[\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}'\boldsymbol{e}_i\right)\cdot\boldsymbol{e}_i\right] = (\det \boldsymbol{T})\,\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}'\right),$$

donde se chega em (7.90).

- Aplicando-se (7.90) a (7.88), com $\zeta = t$, obtém-se

$$\dot{J} = J\boldsymbol{F}^{-T} : \dot{\boldsymbol{F}}\,. \tag{7.92}$$

A derivada no tempo de (7.89) fornece, com a ajuda de (7.92), o seguinte resultado

$$\dot{\rho} = -\rho\boldsymbol{F}^{-T} : \dot{\boldsymbol{F}}\,. \tag{7.93}$$

(7.93) expressa de uma outra forma a lei de conservação da massa.

De (7.92) decorre também que

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{F}} = J\boldsymbol{F}^{-T}\,. \tag{7.94}$$

Definição 7.4: Momento linear e momento angular

O *momento linear* e o *momento angular* em relação à origem de um sólido deformável são, respectivamente, definidos por

$$\boldsymbol{\lambda} = \int_V \boldsymbol{v}\rho dV \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\mu} = \int_V (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v})\rho dV\,. \tag{7.95}$$

As integrais de (7.95) podem ser transformadas para a configuração de referência, como se segue

$$\boldsymbol{\lambda} = \int_{V^r} \boldsymbol{v}\rho^r dV^r \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\mu} = \int_{V^r} (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v})\rho^r dV^r\,. \tag{7.96}$$

3.6 Sexto Princípio ou Leis de Euler

Em cada instante, em qualquer referencial inercial

$$\boldsymbol{f}_{\text{ext}} = \dot{\boldsymbol{\lambda}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{m}_{\text{ext}} = \dot{\boldsymbol{\mu}}\,. \tag{7.97}$$

3.7 Sétimo Princípio

A toda ação corresponde uma reação contrária de mesma intensidade e direção.

8

Estática e Dinâmica dos Sólidos Deformáveis

1 Tensões

1.1 Tensor das Tensões de Cauchy

1.1.1 Princípio de Cauchy

Uma parte de um sólido deformável também deve ser um sólido deformável. Isto sugere que o vetor tensão (ou força superficial) $\boldsymbol{t}$ também deva existir internamente a um sólido. Esta hipótese é também conhecida como *Princípio de Cauchy*[37]. Fisicamente ele diz que, ao se efetuar um corte hipotético separando um sólido em duas partes, nas superfícies criadas existirão forças distribuídas $\boldsymbol{t}$ que representam a ação de uma parte sobre a outra. A *força superficial* $\boldsymbol{t}$ que atua no interior do sólido depende evidentemente da superfície de corte. Por isso, no interior de um sólido, indica-se o campo vetorial $\boldsymbol{t}$ por meio de $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n})$, onde $\boldsymbol{n}$ designa o vetor normal à superfície sobre a qual $\boldsymbol{t}$ atua. O Princípio de Cauchy não é um teorema, pois as ações entre as duas partes do sólido poderiam se dar através de forças e momentos distribuídos sobre uma certa distância do hipotético corte. Isto ocorre por exemplo nos Plasmas. Apesar disto muitos textos de Resistência dos Materiais ainda chamam erroneamente este princípio de Teorema do Corte.

1.1.2 Teorema do Disco

Seja uma região na configuração atual com a forma de um pequeno disco de espessura dh e duas bases paralelas dS com contorno Γ, conforme a Figura 8.1. Assim a Primeira Lei de Euler fornece

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})dS + \boldsymbol{t}(-\boldsymbol{n})dS + \left(\int_{\Gamma} \boldsymbol{t} d\Gamma\right) dh + \boldsymbol{b} dh dS = \rho \ddot{\boldsymbol{u}} dh dS \ . \tag{8.1}$$

onde a dependência de ρ, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{b}$ e $\ddot{\boldsymbol{u}}$ com $\boldsymbol{x}$ não foi indicada para não carregar a notação. Fazendo-se $dh \to 0$, tem-se que

$$\boldsymbol{t}(-\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) \ . \tag{8.2}$$

(8.2) é consistente com o Princípio da Ação e Reação.

[37] Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Figura 8.1: Disco infinitesimal na configuração atual

1.1.3 Teorema de Cauchy

Aplicando-se, agora, a Primeira Lei de Euler a uma região infinitesimal na configuração atual com a forma de um tetraedro com as arestas orientadas conforme a base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, de acordo com a Figura 8.2 abaixo, pode-se escrever

$$\sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{t}(-\boldsymbol{e}_i)\, dS_i + \boldsymbol{t}(\boldsymbol{n})\, dS + \boldsymbol{b}\, dV = \rho \ddot{\boldsymbol{u}}\, dV \ . \tag{8.3}$$

onde a dependência de ρ, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{b}$ e $\ddot{\boldsymbol{u}}$ com $\boldsymbol{x}$ não foi indicada para não carregar a notação. (8.3) é a expressão do equilíbrio de forças no tetraedro.

Figura 8.2: Tetraedro Infinitesimal na Configuração Atual

De acordo com (8.2), tem-se

$$\boldsymbol{t}(-\boldsymbol{e}_i) = -\boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_i) \tag{8.4}$$

e constatando-se que

$$dS_i = (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{n})\, dS \ , \tag{8.5}$$

tem-se de (8.3)

$$\sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{b} - \rho \ddot{\boldsymbol{u}}) \frac{dV}{dS} \,. \tag{8.6}$$

Entretanto, da geometria tem-se

$$\frac{dV}{dS} = \frac{1}{3} dh \,, \tag{8.7}$$

onde dh é a correspondente altura do tetraedro infinitesimal. Fazendo $dh \to 0$, de (8.6) chega-se em

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{n}) \,. \tag{8.8}$$

Definição 8.1: Tensor das tensões de Cauchy

Definindo-se o tensor de segunda ordem $\boldsymbol{T}$ através de

$$\boldsymbol{T} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_i) \otimes \boldsymbol{e}_i \,, \tag{8.9}$$

tem-se de (8.8) que

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \,. \tag{8.10}$$

O tensor $\boldsymbol{T}$ é denominado *tensor das tensões de Cauchy*.

Observação 8.1

Note-se que (8.9) fornece também uma interpretação física para as colunas da matriz de $\boldsymbol{T}$. Elas são formadas pelas componentes do vetor tensão ou da força superficial $\boldsymbol{t}$ nos planos de normal $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1,2,3$.

Observação 8.2

Como será demonstrado ainda neste Capítulo, $\boldsymbol{T}$ é simétrico, ou seja,

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T \,. \tag{8.11}$$

(8.11) decorre da aplicação da segunda Lei de Euler ao mesmo tetraedro infinitesimal.

1.1.4 Tensões Normais

Definição 8.2: Tensão normal

A *tensão normal* atuante em um ponto sobre uma superfície de normal $\boldsymbol{n}$ é definida por

$$\sigma = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n} \,. \tag{8.12}$$

Definição 8.3: Vetor tensão normal

O *vetor tensão normal* ou a *força superficial normal* atuante sobre a mesma superfície é dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \boldsymbol{n} \,. \tag{8.13}$$

A Figura 8.3 esclarece o significado físico da tensão normal e do vetor tensão normal.

Figura 8.3: Tensões normais e tangenciais

Propriedades 8.1

Com a introdução de (8.10) em (8.12), tem-se que a tensão normal é dada pela seguinte forma quadrática

$$\sigma = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \ . \tag{8.14}$$

Como $\boldsymbol{T}$ é simétrico, ele possui três autovalores reais denominados *tensões principais* σ_i, $i = 1,2,3$, as quais são as tensões normais que atuam em planos de normais $\hat{\boldsymbol{e}}_i$, $i = 1,2,3$, respectivamente. Estes vetores normais são auto-vetores de $\boldsymbol{T}$ e são ortogonais entre si. Logo, $\hat{\boldsymbol{e}}_i$, $i = 1,2,3$, formam uma base ortonormal. Nestes planos atuam somente tensões normais ou forças superficiais normais, isto é, neles

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \sigma_i \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{e}}_i, \quad i = 1,2,3 \ . \tag{8.15}$$

Além disso, pode-se afirmar

$$\sigma_{\max} = \max\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \quad \text{e} \quad \sigma_{\min} = \min\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \ . \tag{8.16}$$

Observação 8.3

É usual ordenar-se as tensões principais de forma que

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \ . \tag{8.17}$$

Este texto adotará doravante esta convenção.

1.1.5 Tensões Tangenciais

Definição 8.4: Vetor tensão tangencial

O *vetor tensão tangencial* ou a *força superficial tangencial* é definido por

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{t} - \boldsymbol{\sigma} \ . \tag{8.18}$$

Definição 8.5: Tensão tangencial

A *tensão tangencial* ou *tensão de cisalhamento* τ é dada pela magnitude de $\boldsymbol{\tau}$, ou seja,

$$\tau = \|\boldsymbol{\tau}\| \ . \tag{8.19}$$

A Figura 8.3 ajuda a esclarecer o significado físico da tensão tangencial e do vetor da tensão tangencial.

Observação 8.4

Outras expressões para o cálculo de $\boldsymbol{\tau}$ são

$$\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n})\boldsymbol{t} = (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{t}) \times \boldsymbol{n} \,. \tag{8.20}$$

Observação 8.5

A norma de (8.20) poder computada por meio de

$$\begin{aligned} \tau^2 &= [(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n})\boldsymbol{t}] \cdot [(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n})\boldsymbol{t}] = \\ &= \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n})^2 \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n})\boldsymbol{t} = \\ &= \boldsymbol{t} \cdot [(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{t}) \times \boldsymbol{n}] = (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{t}) \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{t}) = \\ &= \|\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{t}\|^2 \,. \end{aligned} \tag{8.21}$$

Logo, uma outra expressão para o cálculo de τ é

$$\tau = \|\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{t}\| = \|\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\| \,. \tag{8.22}$$

Propriedades 8.2

Por analogia com as pequenas deformações do item 6.11, substituindo-se ε por σ e $\frac{1}{2}\gamma_0$ por τ, pode-se concluir que

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \,, \tag{8.23}$$

ou

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \,, \tag{8.24}$$

se (8.17) for adotada. Esta tensão atua sobre a superfície de normal

$$\boldsymbol{n} = \pm\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\boldsymbol{e}}_3 \right). \tag{8.25}$$

Figura 8.4: Círculos de Mohr

Para $\boldsymbol{n}$ no plano de $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ e $\hat{\boldsymbol{e}}_j$, $i,j = 1,2,3,\ i \neq j$, σ e τ satisfazem, também por analogia com as pequenas deformações do item 6.11, as equações dos 3 círculos de Mohr, a saber

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_i - \sigma_j}{2}\right)^2, \quad i,j = 1,2,3,\ i \neq j. \tag{8.26}$$

No plano $\sigma \times \tau$, (8.26) representa três semi-círculos com centros em $C = \left(\frac{\sigma_i + \sigma_j}{2}, 0\right)$ e raios $R = \left|\frac{\sigma_i - \sigma_j}{2}\right|$, como ilustrado na Figura 8.4.

1.1.6 Tensões Principais

Definição 8.6: Equação característica

Considere-se que a matriz das componentes do tensor das tensões em uma base ortonormal seja dada por $\boldsymbol{T} = [T_{ij}]$. A equação característica do tensor das tensões é

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0\,, \tag{8.27}$$

onde I_i, $i = 1,2,3$, são coeficientes dados por

$$\begin{aligned} I_1 &= T_{11} + T_{22} + T_{33}\,, \\ I_2 &= T_{11}T_{22} + T_{22}T_{33} + T_{33}T_{11} - T_{12}^2 - T_{23}^2 - T_{31}^2 \quad \text{e} \\ I_3 &= T_{11}T_{22}T_{33} + 2T_{12}T_{23}T_{31} - T_{11}T_{23}^2 - T_{22}T_{31}^2 - T_{33}T_{12}^2\,. \end{aligned} \tag{8.28}$$

I_i, $i = 1,2,3$, são denominados *invariantes principais do tensor das tensões*. Invariantes porque independem da base onde o tensor $\boldsymbol{T}$ é representado.

Observação 8.6

Outras expressões para os invariantes (8.28) são

$$\begin{aligned} I_1 &= \operatorname{tr}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{I} : \boldsymbol{T}\,, \\ I_2 &= \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr}\boldsymbol{T})^2 - \operatorname{tr}\boldsymbol{T}^2\right] = \frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{T} : \boldsymbol{T})^2 - (\boldsymbol{I} : \boldsymbol{T})^2\right] \quad \text{e} \\ I_3 &= \det\boldsymbol{T}\,. \end{aligned} \tag{8.29}$$

Definição 8.7: Tensão normal média

A *tensão normal média* é definida por

$$\sigma_{\mathrm{m}} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{I} : \boldsymbol{T})\,. \tag{8.30}$$

Propriedades 8.3

Logo, tem-se para a tensão normal média

$$\sigma_{\mathrm{m}} = \frac{1}{3}I_1 = \frac{1}{3}(T_{11} + T_{22} + T_{33})\,. \tag{8.31}$$

Definição 8.8: Tensor esférico e antiesférico das tensões

O tensor esférico das tensões é definido por

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{e}} = \sigma_{\mathrm{m}} \boldsymbol{I} \tag{8.32}$$

e o tensor antiesférico das tensões por

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{a}} = \boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}^{\mathrm{e}} \ . \tag{8.33}$$

(8.33) deixa clara a nomenclatura antiesférica.

Observação 8.7

Outra notação para (8.32) e (8.33) é

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{e}} = \mathrm{Sph}(\boldsymbol{T}) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{T}^{\mathrm{a}} = \mathrm{Dev}(\boldsymbol{T}) \ , \tag{8.34}$$

na qual foram introduzidos os operadores Sph e Dev de (2.144).

Observação 8.8

O escalar

$$p = -\sigma_{\mathrm{m}} \tag{8.35}$$

é denominado pressão hidrostática.

Definição 8.9: Equação característica do tensor antiesférico das tensões

A equação característica de $\boldsymbol{T}^{\mathrm{a}}$ é

$$s^3 - J_1 s^2 - J_2 s - J_3 = 0 \ , \tag{8.36}$$

onde J_i, $i = 1,2,3$, são coeficientes dados por

$$\begin{aligned} J_1 &= 0 \ , \\ J_2 &= \frac{1}{6}\big[(T_{11} - T_{22})^2 + (T_{22} - T_{33})^2 + (T_{33} - T_{11})^2\big] + T_{12}^2 + T_{23}^2 + T_{31}^2 = \\ &= \frac{1}{3} I_1^2 - I_2 \quad \text{e} \\ J_3 &= \frac{2}{27} I_1^3 - \frac{1}{3} I_1 I_2 + I_3 \ . \end{aligned} \tag{8.37}$$

J_i, $i = 1,2,3$, são denominados *invariantes do tensor antiesférico das tensões*, pois independem da base onde o tensor $\boldsymbol{T}^{\mathrm{a}}$ é representado.

Observação 8.9

Outras expressões para os invariantes (8.37) são

$$\begin{aligned} J_1 &= \mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}^{\mathrm{a}} = 0 \ , \\ J_2 &= \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}^{\mathrm{a}})^2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{T}^{\mathrm{a}} : \boldsymbol{T}^{\mathrm{a}})^2 \quad \text{e} \\ J_3 &= \det \boldsymbol{T}^{\mathrm{a}} \ . \end{aligned} \tag{8.38}$$

Propriedades 8.4

Sejam s_i, $i = 1,2,3$, as raízes de (8.36), ou seja, as tensões principais antiesféricas. É fácil verificar que

$$\sigma_i = \sigma_{\mathrm{m}} + s_i \ , \quad i = 1,2,3 \ . \tag{8.39}$$

Também é fácil verificar que $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{T}^{\mathrm{a}}$ têm os mesmos auto-vetores, ou seja, as mesmas direções principais.

Definição 8.10: Tensões octaédricas

O plano, cuja normal é

$$\boldsymbol{n}_{\mathrm{o}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\hat{\boldsymbol{e}}_3 \ , \tag{8.40}$$

é conhecido como *plano antiesférico* ou *plano octaédrico*. A tensão normal e a tensão tangencial neste plano são

$$\sigma_{\mathrm{o}} = \sigma_{\mathrm{m}} \quad \text{e} \quad \tau_{\mathrm{o}} = \sqrt{\frac{2J_2}{3}} \ . \tag{8.41}$$

(8.41) são conhecidas como tensões octaédricas e fornecem uma interpretação física para I_1 e J_2.

Propriedades 8.5

Considere-se, agora, o espaço tridimensional descrito pelos eixos σ_i, $i = 1,2,3$, tensões principais de $\boldsymbol{T}$, conforme a figura 5.3 abaixo. Seja um eixo passando pela origem deste espaço e com a direção e sentido de $\boldsymbol{n}_{\mathrm{o}}$. Ele é denominado *eixo hidrostático*. Um estado de tensão com tensões principais σ_i, $i = 1,2,3$, corresponde a um ponto P no espaço da Figura 8.5.

Figura 8.5: Espaço das tensões principais

Q é a projeção de P sobre o eixo hidrostático, ou seja, Q é a intersecção do plano antiesférico que passa por P com o eixo hidrostático. Sejam as seguintes coordenadas

$$q = \left(\overrightarrow{OQ}\right) \cdot \boldsymbol{n}_{\mathrm{o}} \quad \text{e} \quad r = \left\|\overrightarrow{QP}\right\| , \tag{8.42}$$

como estão representadas na Figura 8.5. É fácil mostrar que

$$q = \frac{\sqrt{3}}{3} I_1 \quad \text{e} \quad r = \sqrt{2J_2}\ . \tag{8.43}$$

Propriedades 8.6

Pode-se mostrar que

$$\sigma_{\mathrm{m}} = \lim_{S \to 0} \left(\frac{1}{S} \int_S \sigma dS \right), \tag{8.44}$$

onde S é a superfície de uma esfera em torno do ponto material. Logo a tensão normal média é realmente a média de todas as tensões normais de um ponto material.

Definição 8.11: Tensão tangencial média

Já a tensão tangencial média pode ser definida através de

$$\tau_{\mathrm{m}} = \lim_{S \to 0} \sqrt{\frac{1}{S} \left(\int_S \tau^2 dS \right)}, \tag{8.45}$$

onde S é a superfície de uma esfera em torno do ponto material. Pode-se também mostrar que

$$\tau_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{2J_2}{5}}\ . \tag{8.46}$$

(8.44) e (8.45) fornecem interpretações físicas para I_1 e J_2.

Observação 8.10

É interessante assinalar que, ao se examinar os plano antiesféricos de topo, conforme a Figura 8.6, encontrar-se-á uma interpretação geométrica para o invariante

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}} \right). \tag{8.47}$$

Note-se que $\{q, r, \theta\}$ formam um sistema cilíndrico de coordenadas no espaço das tensões principais. Se a ordenação de (8.17) for adotada, pode-se mostrar que P está no setor de 60° indicado na Figura 8.6.

Figura 8.6: plano octaédrico

As tensões principais, segundo a fórmula de Cardona expressa em (2.162), são dadas por

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{matrix}\right\} = \frac{1}{3}I_1 + \frac{2}{3}\sqrt{3J_2}\left\{\begin{matrix}\cos\theta\\ \cos(\theta - 120^o)\\ \cos(\theta + 120^o)\end{matrix}\right. . \tag{8.48}$$

(8.48) fornece as tensões principais de acordo com (8.17).

1.2 Tensores de Kirchhoff

No Capítulo 7 foi definido o *vetor tensão nominal* ou força superficial sobre a configuração atual por unidade de área da configuração de referência $\boldsymbol{t}^r$, de modo que

$$\boldsymbol{t}^r dS^r = \boldsymbol{t} dS \tag{8.49}$$

para um mesmo ponto material, onde dS^r é a área na configuração de referência do elemento infinitesimal dS, sobre o qual atua a força por unidade de área $\boldsymbol{t}$. De (8.10) tem-se

$$\boldsymbol{t} dS = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} dS \ . \tag{8.50}$$

A relação de Nanson do Capítulo 2 e do Capítulo 7 de transformação de elementos infinitesimais de área fornece

$$dS = J\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{n}^r dS^r \ . \tag{8.51}$$

Introduzindo-se (8.51) em (8.50), e esta em (8.49), obtém-se

$$\boldsymbol{t}^r = J\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{n}^r \ , \tag{8.52}$$

onde $\boldsymbol{F}$ é o gradiente da transformação e $J = \det \boldsymbol{F}$ é o Jacobiano dela.

Definição 8.12: 1º Tensor de Piola-Kirchhoff

(8.52) justifica a definição de um tensor

$$\boldsymbol{P} = J\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{-T} \ , \tag{8.53}$$

tal que

$$\boldsymbol{t}^r = \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r \ . \tag{8.54}$$

$\boldsymbol{P}$ pode ser interpretado como o operador vetorial que associa ao plano cuja normal na configuração de referência é dada por $\boldsymbol{n}^r$ o vetor tensão nominal ou forças superficial por unidade de área de referência $\boldsymbol{t}^r$. $\boldsymbol{P}$ é denominado *Primeiro Tensor das Tensões de Piola-Kirchhoff*[38].

Observação 8.11

Outros nomes para $\boldsymbol{P}$ são: *Tensor Lagrangiano das Tensões* e *Tensor das Tensões Nominais*.

Definição 8.13: 2º Tensor de Piola-Kirchhoff

O tensor das tensões dado por

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P} = J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{-T} \tag{8.55}$$

é denominado *Segundo Tensor das Tensões de Piola-Kirchhoff*. $\boldsymbol{S}$ é simétrico, como pode-se verificar em (8.55). É difícil dar uma interpretação física para $\boldsymbol{S}$ na forma de um operador vetorial. No entanto, ele é importante, como será visto ao longo do texto.

[38] Gabbrio Piola (1791-1850), Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887)

Propriedades 8.7

Note-se que de (8.55), tem-se

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{S} \,. \tag{8.56}$$

Observação 8.12

Note-se que $\boldsymbol{P}$ não é simétrico, mas o tensor

$$\boldsymbol{\Sigma} = J\boldsymbol{T} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{F}\boldsymbol{S}\boldsymbol{F}^T \tag{8.57}$$

o é. $\boldsymbol{\Sigma}$ é denominado *Tensor das Tensões de Kirchhoff-Trefftz*[39], ou simplesmente, *Tensor das Tensões de Kirchhoff.*

1.3 Tensores Energeticamente Conjugados

Definição 8.14: Tensor energeticamente conjugado

Diz-se que um tensor simétrico das tensões $\boldsymbol{S}^*$ é *energeticamente conjugado* com um tensor simétrico das deformações $\boldsymbol{E}^*$ se

$$\boldsymbol{S}^* : \dot{\boldsymbol{E}}^* = \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} \,. \tag{8.58}$$

$\boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}}$ define a potência dos esforços internos por unidade de volume na configuração de referência, como será visto no Capítulo 12.

Exemplo 8.1

Encontra-se, agora, a expressão do tensor das tensões conjugado com o tensor das deformações de Green. Lembrando-se que

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}\right), \tag{8.59}$$

tem-se, por diferenciação no tempo,

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{F}}^T\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}^T\dot{\boldsymbol{F}}\right). \tag{8.60}$$

Logo

$$\boldsymbol{S}^* : \dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{S}^* : \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{F}}^T\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^T\dot{\boldsymbol{F}}\right) = \boldsymbol{S}^* : \boldsymbol{F}^T\dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{S}^* : \dot{\boldsymbol{F}} \,, \tag{8.61}$$

onde utilizou-se a propriedade de $\boldsymbol{S}^*$ ser simétrico, por definição, e as propriedades de permutação cíclica do produto escalar de tensores, vistas em (2.110). Comparando-se (8.61), (8.58) e (8.56), conclui-se que

$$\boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{S} \,, \tag{8.62}$$

ou seja, o segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff é energeticamente conjugado com o tensor das deformações de Green e assim pode-se escrever

$$\boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} \,. \tag{8.63}$$

Esta talvez seja a melhor interpretação física do segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff.

[39] Erich Immanuel Trefftz (1888-1937)

Exemplo 8.2: Tensores de Biot

Seja agora o tensor das deformações dado por

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{U} - \boldsymbol{I} \ , \tag{8.64}$$

onde $\boldsymbol{U}$ é o tensor dos estiramentos, decorrente da seguinte decomposição polar de $\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U} \ , \tag{8.65}$$

onde $\boldsymbol{R}$ é um tensor rotação, como foi visto em (6.79). $\boldsymbol{E}_1$ é conhecido como *Tensor das Deformações de Biot* ou *Tensor dos Alongamentos Lineares*. Diferenciando-se (8.64), tem-se

$$\dot{\boldsymbol{E}}_1 = \dot{\boldsymbol{U}} \ . \tag{8.66}$$

Veja que $\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} = \boldsymbol{U}^2$. Logo,

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}\dot{\boldsymbol{U}}\right) \tag{8.67}$$

e

$$\boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{S} : \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}\dot{\boldsymbol{U}}\right) = \boldsymbol{S} : \boldsymbol{U}\dot{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{U}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}) : \dot{\boldsymbol{U}} \ . \tag{8.68}$$

Seja $\boldsymbol{S}_1$ o tensor das tensões energeticamente conjugado com (8.64). Então, comparando-se (8.68) e (8.66), conclui-se que

$$\boldsymbol{S}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}) \ . \tag{8.69}$$

(8.69) é conhecido como o *Tensor das Tensões de Biot*.

Exemplo 8.3:

Seja o tensor das deformações definido por

$$\boldsymbol{E}_{-2} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F}^{-T}\right) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{U}^{-2}\right) . \tag{8.70}$$

Derivando-se no tempo vem

$$\dot{\boldsymbol{E}}_{-2} = \frac{1}{2}\left(-\dot{\boldsymbol{U}}^{-1}\boldsymbol{U}^{-1} - \boldsymbol{U}^{-1}\dot{\boldsymbol{U}}^{-1}\right) . \tag{8.71}$$

Como $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}$, tem-se que $\dot{\boldsymbol{U}}^{-1}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}^{-1}\dot{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{O}$. Portanto, tem-se que $\dot{\boldsymbol{U}}^{-1} = -\boldsymbol{U}^{-1}\dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}^{-1}$ e, com a ajuda de (8.67),

$$\dot{\boldsymbol{E}}_{-2} = \frac{1}{2}\boldsymbol{U}^{-1}\left(\dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}^{-1} + \boldsymbol{U}^{-1}\dot{\boldsymbol{U}}\right)\boldsymbol{U}^{-1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{U}^{-2}\left(\dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}\dot{\boldsymbol{U}}\right)\boldsymbol{U}^{-2} = \boldsymbol{U}^{-2}\dot{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{U}^{-2} \ . \tag{8.72}$$

Assim, com $\boldsymbol{S}_{-2}$ sendo o tensor das tensões conjugado com (8.70), tem-se

$$\boldsymbol{S}_{-2} : \dot{\boldsymbol{E}}_{-2} = \boldsymbol{S}_{-2} : \boldsymbol{U}^{-2}\dot{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{U}^{-2} = \boldsymbol{U}^{-2}\boldsymbol{S}_{-2}\boldsymbol{U}^{-2} : \dot{\boldsymbol{E}} \ . \tag{8.73}$$

Ao se comparar (8.73) e (8.68), conclui-se que

$$\boldsymbol{S}_{-2} = \boldsymbol{U}^2\boldsymbol{S}\boldsymbol{U}^2 \ . \tag{8.74}$$

Exemplo 8.4: Tensores de Reiner

O *Tensor das Deformações de Reiner* é definido por

$$\boldsymbol{E}_{-1} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{U}^{-1} \ . \tag{8.75}$$

Como $\dot{\boldsymbol{U}}^{-1} = -\boldsymbol{U}^{-1}\dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}^{-1}$ e com $\boldsymbol{S}_{-1}$ sendo o tensor das tensões conjugado com (8.75), tem-se

$$\boldsymbol{S}_{-1} : \dot{\boldsymbol{E}}_{-1} = \boldsymbol{S}_{-1} : \boldsymbol{U}^{-1}\dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{S}_{-1}\boldsymbol{U}^{-1} : \dot{\boldsymbol{U}} \ . \tag{8.76}$$

Ao se comparar (8.76) e (8.68), conclui-se que

$$\boldsymbol{S}_{-1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}\boldsymbol{S})\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{U} \ . \tag{8.77}$$

1.4 Taxas de Tensionamento

A derivada no tempo de um tensor das tensões para um mesmo ponto material é denominada *taxa de tensionamento*. Temos, portanto, diversas taxas de tensionamento definidas por $\dot{\boldsymbol{T}}$, $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}$, $\dot{\boldsymbol{P}}$ e $\dot{\boldsymbol{S}}$. Note-se, em particular, que, de (8.56), tem-se

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{F}\dot{\boldsymbol{S}} \ . \tag{8.78}$$

Por outro lado, de (8.57), tem-se

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = J\dot{\boldsymbol{T}} + \dot{J}\boldsymbol{T} = \dot{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{F}^T + \boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{F}}^T = \dot{\boldsymbol{S}} + \dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}\dot{\boldsymbol{F}}^T \ . \tag{8.79}$$

Logo, as taxas de tensionamento diferem-se entre si.

Exercícios 8.1

- Mostre (8.20);
- Mostre (8.41);
- Mostre (8.43);
- Mostre (8.44) e (8.45);
- Mostre que $\boldsymbol{S}_1 = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{R}\right)$.
- Mostre que $\boldsymbol{S}_{-2} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{S}\boldsymbol{C}$, onde $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$ é o tensor dos estiramentos quadráticos de Cauchy
- Determine $\sigma_{\max}$ e $\sigma_{\min}$, e os planos onde ocorrem, $\tau_{\max}$ e $\tau_{\min}$, e os planos onde ocorrem, círculos de Mohr, e σ, τ, $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\tau}$ no plano de normal $\boldsymbol{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\boldsymbol{e}}_2$ para o tensor de Cauchy, cuja matriz de componentes em uma base ortonormal é dada abaixo

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{MPa.}$$

- Determine $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{P}$ com

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 1{,}01 & 0{,}98 & 0{,}95 \\ 0{,}97 & 1{,}02 & 1{,}01 \\ 0{,}93 & 0{,}99 & 1{,}03 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{MPa} \ .$$

2 Equações Globais do Movimento e do Equilíbrio

2.1 Equações Globais do Movimento

As equações globais do movimento de um sólido deformável são dadas pelas Leis de Euler. Estas podem ser expressas na configuração atual, como abaixo,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{\text{ext}} &= \int_V \boldsymbol{b} dV + \int_S \boldsymbol{t} dS = \int_V \rho \ddot{\boldsymbol{u}} dV \quad \text{e} \\ \boldsymbol{m}_{\text{ext}} &= \int_V \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b} dV + \int_S \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t} dS = \int_V \boldsymbol{x} \times \rho \ddot{\boldsymbol{u}} dV \ , \end{aligned} \tag{8.80}$$

ou na configuração de referência, como se segue,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{\text{ext}} &= \int_{V^r} \boldsymbol{b}^r dV^r + \int_{S^r} \boldsymbol{t}^r dS^r = \int_{V^r} \rho \ddot{\boldsymbol{u}} dV^r \quad \text{e} \\ \boldsymbol{m}_{\text{ext}} &= \int_{V^r} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}^r dV^r + \int_{S^r} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t}^r dS^r = \int_{V^r} \boldsymbol{x} \times \rho^r \ddot{\boldsymbol{u}} dV^r \ . \end{aligned} \tag{8.81}$$

2.2 Equações Globais do Equilíbrio

Em problemas estáticos ou quase-estáticos não se consideram, por hipótese, as acelerações. Resultam, então, de (8.80) e (8.81), as seguintes equações globais do equilíbrio na configuração atual,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{\text{ext}} &= \int_V \boldsymbol{b} dV + \int_S \boldsymbol{t} dS = \boldsymbol{o} \quad \text{e} \\ \boldsymbol{m}_{\text{ext}} &= \int_V \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b} dV + \int_S \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t} dS = \boldsymbol{o} \ , \end{aligned} \tag{8.82}$$

e na configuração de referência

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{\text{ext}} &= \int_{V^r} \boldsymbol{b}^r dV^r + \int_{S^r} \boldsymbol{t}^r dS^r = \boldsymbol{o} \quad \text{e} \\ \boldsymbol{m}_{\text{ext}} &= \int_{V^r} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}^r dV^r + \int_{S^r} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t}^r dS^r = \boldsymbol{o} \ . \end{aligned} \tag{8.83}$$

3 Equações Locais do Movimento e do Equilíbrio

3.1 Equações Locais do Movimento

3.1.1 Primeira Equação de Cauchy

Aplicando-se o Teorema do Divergente, conforme **(3.65)**, e lembrando-se de (8.10), da integral de superfície na primeira equação de (8.80) tem-se

$$\int_S \boldsymbol{t} dS = \int_S \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} dS = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{T} dV \ . \tag{8.84}$$

Com o resultado acima em (8.80), obtém-se

$$\int_V (\operatorname{div} \boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} - \rho \ddot{\boldsymbol{u}}) dV = \boldsymbol{o} \ . \tag{8.85}$$

Como (8.85) vale para qualquer parte do sólido, o integrando deve ser identicamente nulo em V, ou seja,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \rho \ddot{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } V \ , \tag{8.86}$$

conhecida como a *Primeira Equação Local do Movimento* ou, também, como a *Primeira Equação do Movimento de Cauchy*.

3.1.2 Segunda Equação de Cauchy

Aplicando-se o Teorema do Divergente na integral de superfície da segunda equação de (8.80), conforme **(3.73)**, tem-se

$$\int_S \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t} dS = \int_S \boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\, dS = \int_V [\boldsymbol{x} \times \operatorname{div} \boldsymbol{T} + 2\boldsymbol{\tau}]\, dV \ , \tag{8.87}$$

onde $\boldsymbol{\tau} = \operatorname{dual}(\boldsymbol{T})$. Introduzindo-se a expressão acima em (8.80) resulta

$$\int_V [2\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{x} \times (\operatorname{div} \boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} - \rho \ddot{\boldsymbol{u}})]\, dV = \boldsymbol{o} \ . \tag{8.88}$$

A expressão entre parênteses é nula, conforme (8.86). Portanto

$$\int_V \boldsymbol{\tau}\, dV = \boldsymbol{o} \ . \tag{8.89}$$

Como (8.89) vale para qualquer parte do sólido, tem-se que

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V \ . \tag{8.90}$$

Conforme (2.124), se $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{o}$ então o tensor $\boldsymbol{T}$ é simétrico, isto é

$$\boldsymbol{T}^T = \boldsymbol{T} \quad \text{em } V \ . \tag{8.91}$$

(8.91) é a *Segunda Equação Local do Movimento* ou *Segunda Equação do Movimento de Cauchy.*

Observação 8.13

De (8.81), com a aplicação do Teorema do Divergente, obtém-se de forma análoga a (8.86) e (8.91) as seguintes expressões

$$\operatorname{div} \boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r = \rho^r \ddot{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } V^r \ , \tag{8.92}$$

e

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^T = \left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^T\right)^T \quad \text{em } V^r \ . \tag{8.93}$$

(8.92) e (8.93) são as equações locais do movimento descritas na configuração de referência.

Observação 8.14

(8.86) e (8.91) em notação indicial em uma base ortonormal são respectivamente

$$T_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad \text{e} \quad T_{ij} = T_{ji} \ . \tag{8.94}$$

(8.92) e (8.93) em notação indicial em uma base ortonormal são

$$P_{ji,j} + b_i^r = \rho^r \ddot{u}_i \quad \text{e} \quad P_{ik}F_{jk} = P_{jk}F_{ik} \ . \tag{8.95}$$

3.2 Equações Locais do Equilíbrio

Em problemas estáticos ou quase-estáticos, tem-se de (8.86) e (8.91) as seguintes *Equações Locais do Equilíbrio* na configuração atual,

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V \quad \text{e} \\ &\boldsymbol{T}^T = \boldsymbol{T} \quad \text{em } V \ . \end{aligned} \tag{8.96}$$

De (8.92) e (8.93) tem-se na configuração de referência as seguintes *Equações Locais do Equilíbrio*,

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r &= \boldsymbol{o} \quad \text{em } V^r \quad \text{e} \\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^T &= \left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^T\right)^T \quad \text{em } V^r \ . \end{aligned} \tag{8.97}$$

Observação 8.15

As equações de (8.96) em notação indicial em uma base ortonormal são

$$T_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{e} \quad T_{ij} = T_{ji} \ . \tag{8.98}$$

As equações de (8.97) em notação indicial em uma base ortonormal são

$$P_{ji,j} + b_i^r = 0 \quad \text{e} \quad P_{ik}F_{jk} = P_{jk}F_{ik} \ . \tag{8.99}$$

4 Linearidade Geométrica

Quando as deformações e as rotações são pequenas, ou seja da ordem de ε, tem-se, conforme o item **6.11**, que o tensor das deformações e o tensor das rotações são dados por

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T\right) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{W} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}^T\right), \tag{8.100}$$

respectivamente, até primeira ordem em ε. Em (8.100) $\boldsymbol{L}$ é o gradiente do campo dos deslocamentos $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^r)$ na configuração de referência dado por

$$\boldsymbol{L} = \nabla \boldsymbol{u} \ . \tag{8.101}$$

De acordo também com o Capítulo 6, o gradiente da transformação é dado por

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{E} + \boldsymbol{W} \ , \tag{8.102}$$

até primeira ordem em ε. Além disso, de acordo com o mesmo Capítulo 6, tem-se

$$J = 1 + \mathrm{tr}\boldsymbol{E} \ , \tag{8.103}$$

como também

$$\boldsymbol{F}^{-1} = \boldsymbol{I} - (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{W}) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{F}^{-T} = \boldsymbol{I} - (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{W}) \ , \tag{8.104}$$

até primeira ordem em ε. Introduzindo-se estas aproximações em

$$\boldsymbol{P} = J\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{-T} \ , \tag{8.105}$$

tem-se

$$\boldsymbol{P} = (1 + \mathrm{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{T}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E} + \boldsymbol{W}) \ , \tag{8.106}$$

ou seja

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{T}((1 + \mathrm{tr}\boldsymbol{E})\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E} + \boldsymbol{W}) \tag{8.107}$$

até primeira ordem em ε.

Logo, a hipótese de pequenas deformações e pequenas rotações não é suficiente para que se possa admitir que

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{T} \ , \tag{8.108}$$

até primeira ordem em ε. (8.108) somente é válida até ordem 0 em ε. Considerar (8.108) válida significa admitir que o gradiente dos deslocamentos $\boldsymbol{L}$ é tão pequeno em relação a unidade que de $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}$ resulta

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} \,. \tag{8.109}$$

A hipótese (8.109) é conhecida como a *hipótese de pequenos deslocamentos*, embora fosse mais adequado chamá-la de *hipótese de pequenos gradientes dos deslocamentos*. Note-se que (8.109) pode ser utilizada mesmo se o sólido sofrer grandes deslocamentos de translação como corpo rígido. Por isso, análises de sólidos soltos no espaço como aeronaves são possíveis com esta hipótese. Esta nomenclatura deve-se ao fato de se poder confundir a configuração atual com a de referência quando grandes deslocamentos de translação se encontram impedidos por vínculos impostos ao sólido. Nestes casos não é mais necessário identificar a configuração onde as equações do movimento e do equilíbrio são escritas e assim o sobrescrito r em $(\bullet)^r$ pode ser omitido.

No entanto, deve-se salientar, que as hipóteses de pequenas deformações e rotações não são perfeitamente consistentes com a hipótese de pequenos gradientes dos deslocamentos. Enquanto que com a hipótese de pequenas deformações e rotações tem-se (8.100) até primeira ordem em ε, com a hipótese de pequenos gradientes dos deslocamentos tem-se (8.109) até ordem zero em ε. O que se deseja, no final das contas, é apenas (8.108), que é uma hipótese estática e não apenas geométrica. Esta questão será ainda discutida no Capítulo 11.

O conjunto da hipótese de pequenas deformações, da hipótese de pequenas rotações e da hipótese de pequenos deslocamentos é denominado de *Linearidade Geométrica*. Embora a Linearidade Geométrica não seja perfeitamente consistente, ela é conveniente na prática. A Teoria Linear da Elasticidade e a Análise Limite da Teoria da Plasticidade, por exemplo, são baseadas na Linearidade Geométrica.

A Linearidade Geométrica é razoável para estruturas rígidas, devendo ser abandonada para estruturas flexíveis ou estruturas suscetíveis a instabilidades, como, por exemplo, em estruturas de cabos ou suportadas por cabos, estruturas em membranas retesadas, estruturas abatidas em cascas e arcos, em pilares esbeltos e em peças de perfil esbelto. Para o estudo destas estruturas, assim como para o estudo da estabilidade das estruturas em geral, é necessário abandonar a Linearidade Geométrica. A única hipótese geral razoável para os materiais estruturais é a de pequenas deformações. Infelizmente esta hipótese isolada não simplifica as equações.

Exercícios 8.2

- Nas equações (8.80) e (8.81) utilizou-se a origem como pólo dos momentos e dos momentos angulares. Mostre que elas são válidas para qualquer outro pólo.
- O campo de tensões de Cauchy num sólido é dado por

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 5x_1x_2 & 5x_2^2 & 0 \\ 5x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Determine as forças volúmicas na configuração atual para que o sólido esteja em equilíbrio local.
- Se não houvesse forças volúmicas, qual seria o campo das acelerações?
- Determine $\boldsymbol{f}_{\text{ext}}$ e $\boldsymbol{m}_{\text{ext}}$ para uma barra reta de seção transversal quadrada de lado 2 mm e comprimento 20 mm em equilíbrio global, com eixo dos baricentros ao longo do eixo x_1 e faces laterais ortogonais aos eixos x_2 e x_3.

- Como seriam as equações globais do equilíbrio se houvesse forças e momentos concentrados aplicados no sólido.
- Tem sentido admitir-se a hipótese de pequenos gradientes dos deslocamentos sem se supor pequenas deformações e rotações?

9

Teoria dos Materiais

1 Introdução

Até o momento todos os resultados obtidos são universais e valem para qualquer tipo de material. No entanto, sabe-se que materiais diferentes, submetidos às mesmas condições, apresentam comportamentos diferentes. *Leis, equações ou modelos materiais*, ou ainda, *equações constitutivas* são relações entre grandezas físicas com as quais a *Teoria dos Materiais* procura introduzir as propriedades dos materiais no modelo mecânico até agora estudado. Essas equações relacionam, por exemplo, as tensões atuantes num sólido com o seu movimento ou o fluxo de calor num sólido com a distribuição de temperaturas no seu interior.

Em uma teoria puramente mecânica utilizam-se equações constitutivas que relacionam as tensões atuantes num sólido num determinado instante com o movimento do sólido até aquele instante.

A Teoria dos Materiais engloba o estudo de modelos microscópicos e macroscópicos. Os modelos microscópicos são muito importantes para o entendimento dos processos mecânicos assim como no desenvolvimento de novos materiais, sejam eles homogêneos ou compostos. Os modelos macroscópicos descrevem o comportamento mecânico dos materiais sem a preocupação de explicar a sua origem físico-química. Neste texto, está-se interessado preponderantemente neste aspecto da teoria.

2 Princípios da Teoria dos Materiais

A Teoria dos Materiais para modelos puramente mecânicos está baseada em três princípios que são apresentados e analisados a seguir.

2.1 Princípio do Determinismo

As tensões atuantes nos pontos materiais de um sólido deformável num determinado instante são função unívoca de todo o movimento do sólido até aquele momento.

Este princípio garante que as tensões possam ser determinadas univocamente a partir de todo movimento sofrido pelo sólido, o qual pode ser descrito, de forma Lagrangiana, por meio de $\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^r, t)$ a partir de algum instante no passado até o momento em observação. Esta dependência é registrada aqui da seguinte forma

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}^r, t) = \mathfrak{F}_{t_0}^{t}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^r, \tau)) \,. \tag{1.1}$$

2.2 Princípio da Localidade

As tensões atuantes num ponto material de um sólido deformável dependem apenas do movimento relativo de sua vizinhança.

Observação 9.1

Este princípio garante que fenômenos distantes de um ponto material não o influenciam. Considere-se, agora, o movimento de um ponto Q em relação ao movimento do ponto P em sua vizinhança. Sejam $\boldsymbol{x}_P$ e $\boldsymbol{x}_Q$ os vetores que descrevem as suas posições. Expandindo-se em séries de Taylor, tem-se

$$\boldsymbol{x}_Q = \boldsymbol{x}_P + \nabla \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_P^r)(\boldsymbol{x}_Q^r - \boldsymbol{x}_P^r) + \cdots . \tag{9.2}$$

Logo o movimento relativo da vizinhança de um ponto material é descrito pelo gradiente da transformação $\boldsymbol{F} = \nabla \boldsymbol{x}$ até primeira ordem.

Definição 9.1: Materiais simples

O princípio acima permitiu a Noll[40] definir uma classe de materiais, denominada classe dos *materiais simples*, nos quais a tensão atuante num ponto material num determinado instante é função unívoca da história de $\boldsymbol{F}$ naquele ponto até aquele momento. Para estes materiais pode-se escrever

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}^r, t) = \mathfrak{F}_{t_0}^{t}(\nabla \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^r, \tau)) . \tag{1.3}$$

2.3 Princípio da Objetividade

Uma lei material não deve ser afetada por movimentos de corpo rígido superpostos ao movimento do sólido.

Observação 9.2

Este princípio é recente[41] e de importância fundamental para o desenvolvimento correto de equações constitutivas. Existem diversas formulações para ele, mais gerais e mais aceitas, mas a acima colocada é suficiente para os propósitos deste texto.

Observação 9.3

Fisicamente, o que se deseja é que os esforços internos não sejam afetados por movimentos superpostos de corpo rígido, pois estes não provocam deformações e, portanto, não devem alterar o estado das forças internas do sólido. Isto pode parecer óbvio, mas demorou-se até se perceber da necessidade deste princípio e, infelizmente, no passado, muitas formulações da Teoria das Estruturas não o satisfaziam.

Observação 9.4

Para o melhor entendimento das conseqüências deste princípio, definiremos o que é um movimento de corpo rígido superposto a um movimento. Seja o movimento de um sólido descrito por $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^r, t)$. Superpor um movimento de corpo rígido a este movimento significa transformar o movimento em

---

[40] Walter Noll (1925-)

[41] C.A. Truesdell, W. Noll, The non-linear Field Theories of Mechanics. In: Handbuch de Physik, Vol III/3, Ed.: S. Flügge, Springer, Berlin, 1965.

$$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x}^r,t) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0^r,t) + \boldsymbol{q}_0(t) + \boldsymbol{Q}(t)(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^r,t) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0^r,t)), \tag{9.4}$$

onde $\boldsymbol{Q}(t)$ é uma rotação superposta e $\boldsymbol{q}_0(t)$ é a translação adicional do ponto 0.

O novo gradiente da transformação $\boldsymbol{F}^*$ é dado pela diferenciação de (9.4) segundo $\boldsymbol{x}^r$, o que resulta em

$$\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{QF}\,. \tag{9.5}$$

O gradiente da transformação é afetado por movimentos superpostos de corpo rígido, como (9.5) bem mostra. O novo tensor das deformações de Green é dado por

$$\boldsymbol{E}^* = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^{*T}\boldsymbol{F}^* - \boldsymbol{I}\right) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{QF} - \boldsymbol{I}\right) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}\right) = \boldsymbol{E}\,, \tag{9.6}$$

pois $\boldsymbol{Q}$ é ortogonal. O tensor de Green não é, portanto, afetado por um movimento de corpo rígido superposto ao movimento do sólido. A taxa deste tensor $\dot{\boldsymbol{E}}$ também não é afetada por movimentos de corpo rígido.

O vetor normal a uma superfície na configuração atual também é rodado através de (9.4) e é transformado de acordo com

$$\boldsymbol{n}^* = \boldsymbol{Qn}\,. \tag{9.7}$$

O vetor das tensões ou das forças superficiais é transformado juntamente com os vetores normais de acordo com

$$\boldsymbol{t}^* = \boldsymbol{Qt}\,. \tag{9.8}$$

Logo, o novo tensor de Cauchy é tal que

$$\boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{QTQ}^T\,, \tag{9.9}$$

o que decorre de (9.7), (9.8), $\boldsymbol{t}^* = \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{n}^*$ e $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{Tn}$. Logo, o tensor de Cauchy é afetado por movimentos de corpo rígido. Mas se (1.1) satisfizer a

$$\boldsymbol{QT}(\boldsymbol{x}^r,t)\boldsymbol{Q}^T = \mathfrak{F}_{t_0}^{t}(\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x}^r,\tau))\,, \tag{1.10}$$

o princípio estará satisfeito.

O novo primeiro tensor de Piola-Kirchhoff é dado por

$$\boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{QP} \tag{9.11}$$

e é também afetado por movimentos de corpo rígido. O segundo tensor de Piola-Kirchhoff, no entanto, não o é, porque

$$\boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{F}^{*-1}\boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{QP} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{S}\,. \tag{9.12}$$

A taxa de tensionamento $\dot{\boldsymbol{S}}$ também não é afetada por movimentos de corpo rígido.

A forma mais simples de se satisfazer o Princípio da Objetividade é expressar algum tensor não afetado por movimentos de corpo rígido em função da história de algum tensor das deformações também não afetado por movimentos de corpo rígido até um determinado instante. Daí a importância de se utilizar tensores que não sejam afetados por movimentos de corpo rígido nas equações constitutivas. Por isso, neste texto e no contexto da Não-linearidade Geométrica, utiliza-se no tratamento de equações constitutivas, o par de tensores $\{\boldsymbol{S},\boldsymbol{E}\}$. No entanto, qualquer outro par é permitido, desde que os princípios acima sejam respeitados.

Observação 9.5

Os modelos constitutivos devem obedecer obviamente a todos os princípios gerais da Física, em particular os dois Princípios da Termodinâmica. O 1º Princípio da Termodinâmica estabelece que os modelos materiais devem submeter-se à Lei da Conservação da Energia. O 2º Princípio da Termodinâmica estabelece que eles devem manter ou aumentar a entropia do sólido. Os Princípios da Termodinâmica, aplicado a processos puramente mecânicos, ou seja, a processos isotérmicos, estabelecem, então, que a equação material deve sempre conservar ou dissipar localmente a energia mecânica.

3 Modelos Básicos

Definição 9.2: Material invíscido

Um material é dito *invíscido* se existir uma relação entre $\dot{\boldsymbol{S}}$ e $\dot{\boldsymbol{E}}$ que respeite a seguinte condição de homogeneidade

$$\dot{\boldsymbol{S}}\left(\alpha\dot{\boldsymbol{E}}\right) = \alpha\dot{\boldsymbol{S}}\left(\dot{\boldsymbol{E}}\right), \quad \forall\alpha > 0\,. \tag{9.13}$$

Caso contrário ele é dito *víscido* ou *viscoso*.

Observação 9.6

(9.13) garante que a taxa de deformação não influi na taxa de tensionamento e que, portanto, o material pode ser ensaiado em qualquer velocidade de deformação ou tensionamento que o resultado será o mesmo. A maioria dos materiais estruturais é viscosa. Os aços estruturais são fracamente viscosos à temperatura ambiente. Por outro lado, os aços são muito viscosos a altas taxas de tensionamento. Metais a altas temperaturas ou sob altas taxas de tensionamento, concretos e madeiras são fortemente viscosos.

Definição 9.3: Material elástico

Um material é dito elástico se existir uma função tensorial do seguinte tipo

$$\boldsymbol{S} = \hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{E})\,. \tag{9.14}$$

Observação 9.7

(9.14) garante que para cada estado de deformação do ponto material corresponde um único estado de tensões. Um material elástico é dito também *reversível* porque em um ciclo de deformações a tensão retorna a seu valor inicial.

Definição 9.4: Material elástico linear

Um material é dito elástico *linear* se a relação entre o tensor das tensões e das deformações for linear.

Observação 9.8

Como, na Não-linearidade Geométrica, existem diversos tensores de tensão e deformação, esta definição depende do par de tensores escolhido. Ela é empregada de forma unívoca somente na vigência da hipótese de Linearidade Geométrica

Propriedades 9.1

Derivando-se (9.14) no tempo, tem-se, com a ajuda da regra da cadeia,

$$\dot{\boldsymbol{S}} = \mathbb{D}\dot{\boldsymbol{E}} \,, \tag{9.15}$$

onde

$$\mathbb{D} = \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \boldsymbol{E}} \tag{9.16}$$

é um tensor de quarta ordem denominado *tensor dos módulos elásticos de rigidez tangente*.

Observação 9.9

(9.15) diz que existe uma relação linear entre o tensor taxa de tensionamento e o tensor taxa de deformação. Desta forma um material elástico é sempre invíscido.

Definição 9.5: Material hiperelástico

Um material é dito *hiperelástico* se existir uma função escalar $\psi(\boldsymbol{E})$, denominada *energia de deformação específica*, que serve de potencial para as tensões, tal que

$$\boldsymbol{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{E}} \,. \tag{9.17}$$

Propriedades 9.2

Como se conclui de (9.17), um material hiperelástico é necessariamente elástico e reversível. Conseqüentemente, ele também é invíscido.

Definição 9.6: Tensor dos módulos hiperelásticos de rigidez tangente

O *tensor dos módulos hiperelásticos de rigidez tangente* é dado por

$$\mathbb{D} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{E}^2} \,. \tag{9.18}$$

Observação 9.10

Um material hiperelástico é dito conservativo, porque, em um ciclo de deformações, a função $\psi(\boldsymbol{E})$ volta ao seu valor inicial, ou seja, a energia de deformação específica se conserva.

Definição 9.7: Material hipoelástico

Um material é dito *hipoelástico* se existir um operador tensorial linear $\mathbb{D}$, tal que

$$\dot{\boldsymbol{S}} = \mathbb{D}\dot{\boldsymbol{E}} \,. \tag{9.19}$$

$\mathbb{D}$ pode depender, em geral, de $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{S}$, mas não de suas taxas. $\mathbb{D}$ é denominado *tensor dos módulos hipoelásticos de rigidez*.

Observação 9.11

Materiais elásticos e hiperelásticos são hipoelásticos, mas um material hipoelástico não é necessariamente elástico ou hiperelástico.

Propriedades 9.3

Um material hipoelástico é inviscido, como (9.19) bem o mostra. Além disso, ao se executar um ciclo infinitesimal de deformações, isto é, ao se impor um ciclo $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E} + d\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, o material hipoelástico se comporta como reversível, pois tem-se um ciclo correspondente de tensões dado por $\boldsymbol{S} \to \boldsymbol{S} + d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S} + \mathbb{D}d\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{S}$. Num ciclo finito de deformações um material hipoelástico não é necessariamente reversível.

Definição 9.8: Material inelástico

Um material é dito *inelástico* se não for elástico.

Observação 9.12

Materiais hipoelásticos podem ser inelásticos. Formulações hipoelásticas são utilizadas com freqüência na Mecânica dos Solos.

4 Modelos Materiais Unidimensionais

Um meio de se desenvolver equações materiais é através de modelos unidimensionais. Embora não seja um método geral, eles proporcionam um melhor entendimento dos comportamentos dos materiais e permitem várias generalizações. Os modelos materiais unidimensionais são formulados para um estado uniaxial de tensões. Há, portanto, uma grande simplificação, já que o estado de tensões é descrito pela tensão normal nominal σ, definida como força por unidade de área de referência, e o estado de deformações pelo alongamento linear ε na mesma direção. Após a formulação de um modelo material nestas condições, é necessária a sua generalização para estados mais complexos de tensão e deformação.

4.1 Modelo elástico de Hooke

O modelo elástico de Hooke[42] é representado por uma mola, conforme a Figura 9.1, de modo que

$$\sigma = \hat{\sigma}(\varepsilon) . \tag{9.20}$$

Figura 9.1: Modelo Elástico de Hooke

O modelo elástico é dito linear se existir uma constante E, denominada tradicionalmente módulo de elasticidade, tal que

$$\sigma = E\varepsilon . \tag{9.21}$$

A denominação de módulo de elasticidade, embora clássica, não é perfeitamente adequada, pois E não mede a elasticidade do material, mas sim a sua rigidez. Uma melhor nomenclatura para E talvez fosse módulo de rigidez elástica.

Note-se que o modelo também é hipoelástico, pois

$$\dot{\sigma} = D\dot{\varepsilon} , \tag{9.22}$$

onde

[42] Robert Hooke (1635-1703)

$$D = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} . \tag{9.23}$$

No caso linear, tem-se

$$D = E . \tag{9.24}$$

O modelo também é hiperelástico, pois

$$\sigma = \frac{d\psi}{d\varepsilon} , \tag{9.25}$$

onde

$$\psi(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \hat{\sigma}(\eta)\, d\eta . \tag{9.26}$$

No caso linear

$$\psi(\varepsilon) = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 . \tag{9.27}$$

Num ensaio uniaxial, têm-se os resultados apresentados na Figura 9.2, que não dependem da velocidade do ensaio, nem se é um ensaio de tensão ou deformação controlada.

Figura 9.2: Ensaio do Modelo Elástico: a) não-linear; b) linear

4.2 Modelo plástico de Saint-Venant

O modelo plástico de Saint-Venant[43] é representado por um sólido que desliza com atrito sobre uma superfície, conforme a Figura 9.3 abaixo. O valor R representa o valor absoluto da tensão necessária para provocar o deslocamento do sólido do modelo e é denominada resistência.

Figura 9.3: Modelo Plástico de Saint-Venant

Assim pode-se definir uma função $F(\sigma)$ tal que

$$F(\sigma) = |\sigma| - R \leq 0 . \tag{9.28}$$

[43] Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886)

Figura 9.4: Ensaio do Modelo Plástico

Quando $F < 0$ diz-se que o material está num estado rígido e não há deslizamento. Quando $F = 0$, diz-se que ele está num estado plástico e há deslizamento. Tensões maiores em módulo que R não são admissíveis. Às vezes o modelo plástico acima é chamado de modelo rígido-plástico.

Num ensaio uniaxial de tensões obtém-se os gráficos da Figura 9.4. ε^p indicada na figura é a *deformação permanente* ou *residual* num ciclo de tensões. Quando R é constante diz-se que o material é *perfeitamente* ou *idealmente plástico*. Quando $R = \hat{R}(\varepsilon^p)$, isto é, quando R não é constante e depende da deformação plástica diz-se que o material apresenta *encruamento*. Os resultados acima independem da velocidade do carregamento ou da deformação. O modelo plástico é invíscido e apresenta deformações permanentes imediatas, ou seja, as deformações plásticas surgem simultaneamente com a aplicação das tensões.

4.3 Modelo viscoso de Newton

O modelo viscoso é representado por um amortecedor, conforme a Figura 9.5.

Figura 9.5: Modelo Viscoso

A relação entre σ e ε é dada por

$$\sigma = \eta\dot{\varepsilon} \,, \tag{9.29}$$

e representa uma generalização da lei de Newton para fluidos. η em (9.29) é a *viscosidade* do material e sua inversa η^{-1} é a *fluidez*. Quando η é constante trata-se de um modelo Newtoniano. Quando η é uma função de $\dot{\varepsilon}$ trata-se de um modelo não-Newtoniano.

Considerando-se apenas modelos Newtonianos, tem-se para um ensaio com tensão σ_0 constante a partir do instante $t = 0$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{\eta}\sigma_0 \,, \tag{9.30}$$

que está representada graficamente na Figura 9.6. Este ensaio é denominado ensaio de fluência. De (9.30), por integração no tempo, tem-se

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} t \,. \tag{9.31}$$

Figura 9.6: Ensaio de Fluência do Modelo Viscoso de Newton

4.4 Modelo elastoplástico de Prandtl-Reuss

O modelo elastoplástico de Prandtl-Reuss[44] é obtido pela associação em série de um modelo elástico com um modelo plástico, conforme a Figura 9.7. Uma associação em série significa que os dois elementos estão submetidos à mesma tensão e que a deformação total é a soma das deformações dos elementos.

Figura 9.7: Modelo Elastoplástico

Em um ensaio uniaxial de tensões, supondo-se modelo elástico linear e modelo plástico perfeito, isto é, sem encruamento, tem-se o comportamento do gráfico da Figura 9.8. Este comportamento é elástico enquanto a tensão σ for menor, em módulo, que a tensão de escoamento R. Para tensões iguais, em módulo, à tensão de escoamento R, ele escoa, isto é, apresenta deformações indefinidas.

Figura 9.8: Ensaio do Modelo Elastoplástico

Quando o material é descarregado de um estado de tensão de tração com $\sigma = R$ ele apresenta comportamento elástico e deformações residuais ε^p. Se a seguir for imposta uma tensão de compressão $\sigma = -R$ ele escoará em sentido inverso. Se descarregado, novamente terá comportamento elástico e apresentará deformações residuais ε^p que poderão ser positivas ou negativas, conforme a extensão do escoamento na compressão. A deformação total é dada por

[44] Ludwig Prandtl (1875-1953), Endre Reuss (1900-1968)

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \ , \tag{9.32}$$

onde ε^e é a deformação elástica e ε^p é a deformação plástica. Veja-se que a tensão é dada sempre por

$$\sigma = E\varepsilon^e \ . \tag{9.33}$$

Quando $F < 0$ diz-se que o material está num estado elástico. Quando $F = 0$, diz-se que ele está num estado elastoplástico.

Observação 9.13

O modelo elastoplástico é invíscido e apresenta deformações permanentes imediatas sempre que as tensões atingirem a resistência R.

4.5 Modelo viscoelástico de Maxwell

O modelo de Maxwell[45] associa em série um modelo elástico e um viscoso, conforme a Figura 9.9.

Figura 9.9: Modelo Viscoelástico de Maxwell

A deformação total é dada por

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v \ , \tag{9.34}$$

onde ε^e é a deformação elástica e ε^v é a deformação viscosa. Assim

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^v \ . \tag{9.35}$$

Para o modelo elástico

$$\dot{\varepsilon}^e = \frac{\dot{\sigma}}{E} \, , \tag{9.36}$$

e para o viscoso

$$\dot{\varepsilon}^v = \frac{\sigma}{\eta} \, . \tag{9.37}$$

Figura 9.10: Ensaio de fluência do modelo de Maxwell

[45] James Clerk Maxwell (1831-1979)

Introduzindo-se (9.36) e (9.37) em (9.35) tem-se

$$\dot{\sigma} + \frac{E}{\eta}\sigma = E\dot{\varepsilon} \ , \tag{9.38}$$

que é a equação diferencial ordinária que descreve o comportamento mecânico do modelo. Num ensaio de fluência, no qual a tensão é aplicada repentinamente no instante $t = 0$ e mantida constante e igual a σ_0, tem-se de (9.38) que $\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E}$ e

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left(\frac{1}{\eta} t + \frac{1}{E} \right). \tag{9.39}$$

(9.39) está representada graficamente na Figura 9.10.

4.6 Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt

O *modelo de Kelvin-Voigt*[46] associa em paralelo um modelo elástico e um viscoso, conforme a Figura 9.11. Por uma associação em paralelo entende-se que ambos os modelos estarão submetidos à mesma deformação e que a soma das tensões em cada modelo é igual a tensão aplicada à associação.

Figura 9.11: Modelo de Kelvin-Voigt

A tensão total é dada pela soma das tensões nos elementos elástico e viscoso

$$\sigma = \sigma^e + \sigma^v \ . \tag{9.40}$$

Mas

$$\sigma^e = E\varepsilon \tag{9.41}$$

e

$$\sigma^v = \eta\dot{\varepsilon} \ . \tag{9.42}$$

Logo

$$\sigma = \eta\dot{\varepsilon} + E\varepsilon \ . \tag{9.43}$$

[46] William Thomson (Lord Kelvin) (1824-1907), Woldemar Voigt (1850-1919)

Figura 9.12: Ensaio de Fluência do Modelo de Kelvin-Voigt

Num ensaio de fluência, no qual a tensão é aplicada repentinamente no instante $t = 0$ e mantida constante e igual a σ_0, tem-se

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}\left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right). \tag{9.44}$$

(9.44) está representada graficamente na Figura 9.12. As tensões no elemento elástico e no elemento viscoso são, respectivamente, dadas por

$$\sigma^e = \sigma_0\left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right) \quad \text{e} \quad \sigma^v = \sigma_0 e^{-\frac{E}{\eta}t}. \tag{9.45}$$

(9.45) estão representadas graficamente na Figura 9.13. A tensão na mola é crescente, enquanto a tensão no amortecedor é decrescente.

Figura 9.13: Tensões no Ensaio de Fluência do Modelo de Kelvin-Voigt

4.7 Modelo viscoelástico de três parâmetros

Este modelo associa em série um modelo elástico e um modelo de Kelvin-Voigt, conforme a Figura 9.14. Este modelo também é erroneamente conhecido por *Modelo de Boltzmann*[47].

[47] Ludwig Boltzmann (1844-1904)

Figura 9.14: Modelo de três parâmetros

A deformação total é dada por

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v \ , \tag{9.46}$$

onde ε^e é a deformação no modelo elástico e ε^v é a deformação no modelo de Kelvin-Voigt. Derivando-se (9.46) no tempo, tem-se

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^v \ . \tag{9.47}$$

As equações constitutivas do modelo elástico e do modelo de Kelvin-Voigt são

$$\sigma = E_0 \varepsilon^e \quad \text{e} \quad \sigma = E_1 \varepsilon^v + \eta_1 \dot{\varepsilon}^v \ , \tag{9.48}$$

respectivamente, onde E_0 é o módulo de elasticidade do modelo elástico e E_1 e η_1 são o módulo de elasticidade e a viscosidade do modelo de Kelvin-Voigt. De (9.46), (9.47) e (9.48), tem-se

$$\varepsilon^{ve} = \varepsilon - \frac{\sigma}{E_0} \quad \text{e} \quad \dot{\varepsilon}^v = \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E_0} \ . \tag{9.49}$$

Introduzindo-se (9.49) em (9.48), obtém-se a seguinte equação diferencial

$$\dot{\sigma} + \frac{E_0 + E_1}{\eta_1} \sigma = E_0 \dot{\varepsilon} + \frac{E_0 E_1}{\eta_1} \varepsilon \ . \tag{9.50}$$

Em um ensaio de fluência, no qual a tensão é aplicada repentinamente no instante $t = 0$ e mantida constante e igual a σ_0, tem-se

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E_1}{\eta_1} \varepsilon = \frac{E_0 + E_1}{E_0 \eta_1} \sigma_0 \ , \tag{9.51}$$

cuja solução para $t > 0$, com a condição inicial

$$\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E_0} \tag{9.52}$$

é

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left[\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{E_1}{\eta_1} t} \right) \right]. \tag{9.53}$$

(9.53) está representada graficamente na Figura 9.15. Note-se que no ensaio de fluência tem-se

$$\varepsilon(\infty) = \frac{\sigma_0}{E_\infty} \ , \tag{9.54}$$

onde

$$E_\infty = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} \ . \tag{9.55}$$

Figura 9.15: Ensaio de Fluência do Modelo de 3 Parâmetros

Em um ensaio com deformação controlada e deformação ε_0 para $t \geq 0$, denominado *ensaio de relaxação*, tem-se de (9.50)

$$\dot{\sigma} + \frac{E_0 + E_1}{\eta_1}\sigma = \frac{E_0 E_1}{\eta_1}\varepsilon_0 \ , \tag{9.56}$$

cuja solução, com a condição inicial

$$\sigma_0 = E_0 \varepsilon_0 \tag{9.57}$$

é

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon_0 \left[1 - \frac{E_0}{E_1 + E_0} \left(1 - e^{-\frac{E_0 + E_1}{\eta_1} t} \right) \right]. \tag{9.58}$$

Figura 9.16: Ensaio de Relaxação do Modelo de 3 Parâmetros

Note-se que num ensaio de relaxação

$$\sigma(\infty) = E_\infty \varepsilon_0 \ , \tag{9.59}$$

com E_∞ dado por (9.55). (9.58) está representada graficamente na Figura 9.16.

Observação 9.14

É interessante notar a existência de um outro modelo viscoelástico de três parâmetros obtido pela associação em paralelo de um modelo elástico e de um modelo de Maxwell. Este modelo encontra-se na Figura 9.17 e apresenta comportamento semelhante ao do modelo viscoelástico de três parâmetros anterior.

Figura 9.17: Modelo alternativo de três parâmetros

4.8 Modelos viscoelásticos de vários parâmetros

Modelos viscoelásticos com um número maior de parâmetros podem ser obtidos pela associação de n modelos de Kelvin-Voigt, como indicado na Figura 9.18. Para esta cadeia de elementos de Kelvin-Voigt tem-se

$$\sigma = E_i \varepsilon_i + \eta_i \dot{\varepsilon}_i \tag{9.60}$$

e

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \ . \tag{9.61}$$

Figura 9.18: Cadeia de Modelos de Kelvin-Voigt

Para se obter a equação diferencial que descreve o comportamento deste modelo introduz-se o operador diferencial ∂ tal que

$$\dot{\varepsilon} = \partial \varepsilon \ . \tag{9.62}$$

De (9.60) e (9.62), operando-se algebricamente, tem-se

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma}{E_i + \eta_i \partial} \ . \tag{9.63}$$

Voltando-se em (9.61)

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma}{E_i + \eta_i \partial} \ , \tag{9.64}$$

donde se obtém a equação diferencial ordinária de n-ésima ordem que descreve o comportamento constitutivo do modelo viscoelástico acima.

Exemplo 9.1

Considere-se, como exemplo, o modelo formado pela associação em série de dois modelos de Kelvin-Voigt. De (9.64) tem-se

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_1 + \eta_1 \partial} + \frac{\sigma}{E_2 + \eta_2 \partial} \,, \tag{9.65}$$

donde

$$(E_1 + \eta_1 \partial)(E_2 + \eta_2 \partial)\varepsilon = (E_1 + \eta_1 \partial)\sigma + (E_2 + \eta_2 \partial)\sigma \,, \tag{9.66}$$

ou seja,

$$E_1 E_2 \varepsilon + (\eta_1 E_2 + \eta_2 E_1)\dot{\varepsilon} + \eta_1 \eta_2 \ddot{\varepsilon} = (E_1 + E_2)\sigma + (\eta_1 + \eta_2)\dot{\sigma} \,. \tag{9.67}$$

Suponha-se, agora, que o primeiro modelo de Kelvin-Voigt se degenere com $\eta_1 = 0$. A equação diferencial resultante é

$$E_1 E_2 \varepsilon + \eta_2 E_1 \dot{\varepsilon} = (E_1 + E_2)\sigma + \eta_2 \dot{\sigma} \,, \tag{9.68}$$

que é equivalente a (9.50).

Exemplo 9.2

Outros modelos viscoelásticos são obtidos pela associação em paralelo de diversos modelos de Maxwell, conforme a Figura 9.19.

Figura 9.19: Cadeia de Modelos de Maxwell

Observação 9.15

Todos os modelos viscoelásticos apresentados são regidos por equações diferenciais ordinárias lineares, conforme o Capítulo 4. Por isso vale a superposição dos efeitos, que no contexto da viscoelasticidade é denominada de *Princípio de Boltzmann*. Quando este princípio é válido a viscoelasticidade é chamada de *viscoelasticidade linear*.

4.9 Modelo viscoplástico de Bingham

O *modelo de Bingham* associa em paralelo um modelo viscoso e um modelo plástico, conforme a Figura 9.20.

Figura 9.20: Modelo Viscoplástico de Bingham

Este modelo obedece à seguinte equação

$$\dot{\varepsilon} = \begin{cases} 0\,, & \text{se } F(\sigma) \leq 0 \quad \text{e} \\ \dfrac{1}{\eta} F(\sigma) \dfrac{|\sigma|}{\sigma}\,, & \text{se } F(\sigma) > 0\,, \end{cases} \tag{9.69}$$

onde

$$F(\sigma) = |\,\sigma\,| - R\,. \tag{9.70}$$

A diferença $|\,\sigma\,| - R$ é denominada sobretensão. Em um ensaio de tensão controlada com taxa de tensionamento $\dot{\sigma}_0$ constante a partir de $t = 0$, tem-se

$$\varepsilon = \begin{cases} 0\,, & \text{se } t \leq t_R = \dfrac{R}{\dot{\sigma}_0} \quad \text{e} \\ \dfrac{\dot{\sigma}_0}{\eta} \dfrac{1}{2} (t - t_R)^2\,, & \text{se } t > t_R = \dfrac{R}{\dot{\sigma}_0}\,. \end{cases} \tag{9.71}$$

(9.71) está representada graficamente na Figura 9.21 abaixo para três taxas crescentes de tensionamento indicadas por $\dot{\sigma}_0^I \leq \dot{\sigma}_0^{II} \leq \dot{\sigma}_0^{III}$.

Figura 9.21: Ensaio do Modelo de Bingham

Colocando os resultados dos gráficos acima para um mesmo instante num gráfico $\sigma \times \varepsilon$, tem-se para as taxas de tensionamento $\dot{\sigma}_0^I \leq \dot{\sigma}_0^{II} \leq \dot{\sigma}_0^{III}$ a figura 7.22 abaixo.

Figura 9.22: Relação Tensão-Deformação do Modelo de Bingham

No gráfico da Figura 9.22 percebe-se bem o efeito da viscosidade para altas taxas de tensionamento, aumentando a resistência aparente do modelo. Para taxas de tensionamento baixas o modelo se comporta no limite como um modelo plástico.

4.10 Modelo viscoplástico de Hohenemser-Prager

O *modelo de Hohennemser-Prager*[48] é obtido pela associação em série de um modelo elástico e um modelo viscoplástico de Bingham, conforme a Figura 9.23.

Figura 9.23: Modelo de Hohenemser-Prager

A taxa de deformação é então dada por

$$\dot{\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{\dot{\sigma}}{E}, & \text{se } F(\sigma) \leq 0 \quad \text{e} \\ \dfrac{\dot{\sigma}}{E} + \dfrac{1}{\eta} F(\sigma) \dfrac{|\sigma|}{\sigma}, & \text{se } F(\sigma) > 0 \,. \end{cases} \tag{9.72}$$

Exemplos 9.3

Os modelos apresentados são utilizados nas seguintes aplicações:

- modelos elásticos: em materiais estruturais sob níveis baixos de tensão, em borrachas, em solos.
- modelos elastoplásticos: em materiais estruturais sob níveis altos de tensão ou em ruptura, em solos, em processos de fabricação de peças metálicas.

[48] K. Hohenemser & W. Prager, über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik,12,216-226, 1932

- modelos viscoelásticos: em metais a altas temperaturas, em concreto sob carregamentos de longa duração (deformação lenta), em madeira, em polímeros, em solos sob adensamento.
- modelos viscoplásticos: em metais sob altas taxas de carregamento (impacto).

5 Equações Materiais Hiperelásticas

5.1 Classes de Materiais Hiperelásticos

Para a formulação de equações materiais hiperelásticas são necessárias as seguintes definições.

Definição 9.9: Função isótropa

Uma função $F : \mathcal{S}_3 \to \mathbb{R}$ é dita isótropa se

$$F\left(\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{R}\right) = F(\boldsymbol{T}) , \quad \forall \boldsymbol{R} \in \mathcal{R}_3 , \tag{9.73}$$

onde $\mathcal{R}_3$ é o conjunto das rotações.

Definição 9.10: Função tensorial isótropa

Uma função tensorial $\boldsymbol{F} : \mathcal{S}_3 \to \mathcal{S}_3$ é dita isótropa se

$$\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{R}\right) = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})\boldsymbol{R} , \quad \forall \boldsymbol{R} \in \mathcal{R}_3 . \tag{9.74}$$

Observação 9.16: Rotação em torno de um eixo

Como visto no Capítulo 2, o tensor rotação dado pela fórmula de Euler-Rodrigues

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{I} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\boldsymbol{\Theta} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\boldsymbol{\Theta}^2 , \tag{1.75}$$

onde

$$\boldsymbol{\theta} = \theta\boldsymbol{m} , \tag{1.76}$$

representa uma rotação de um ângulo θ, de acordo com a regra da mão direita, em torno do eixo descrito pelo vetor unitário $\boldsymbol{m}$. Com a ajuda de (1.76) e da identidade $\operatorname{Skew}^2(\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m} - \boldsymbol{I}$, (1.75) pode ser colocado na seguinte forma

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{m}) = \cos\theta\boldsymbol{I} + (\operatorname{sen}\theta)\operatorname{Skew}(\boldsymbol{m}) + (1-\cos\theta)\boldsymbol{M} , \tag{9.77}$$

onde

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m} . \tag{9.78}$$

Definição 9.11: Função transversalmente isótropa

Uma função $F : \mathcal{S}_3 \to \mathbb{R}$ é dita transversalmente isótropa se, para $\boldsymbol{Q}$ dado por (9.77) para um determinado vetor unitário $\boldsymbol{m}$, vale a seguinte identidade

$$F\left(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}\right) = F(\boldsymbol{T}) , \quad \forall\theta . \tag{9.79}$$

Observação 9.17

Uma função isótropa é transversalmente isótropa para qualquer vetor unitário $\boldsymbol{m}$.

Observação 9.18: Rotação de 180º

O tensor rotação dado por

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{m}) = 2\boldsymbol{M} - \boldsymbol{I} \ , \tag{9.80}$$

representa, conforme (9.77), uma rotação de $180°$ em torno do eixo definido pelo vetor unitário $\boldsymbol{m}$.

Definição 9.12: Função ortótropa

Uma função $F : \mathcal{S}_3 \to \mathbb{R}$ é dita ortótropa se, para os tensores $\boldsymbol{Q}_i = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{m}_i)$, $i = 1,2,3$, dados por (9.80) para três direções pré-determinadas, ortogonais entre si, indicadas por $\boldsymbol{m}_i$, $i = 1,2,3$, com $\boldsymbol{m}_i \cdot \boldsymbol{m}_j = \delta_{ij}$, valem as seguintes identidades

$$F\left(\boldsymbol{Q}_i^T \boldsymbol{T} \boldsymbol{Q}_i\right) = F(\boldsymbol{T}) \ . \tag{9.81}$$

Propriedades 9.4

a) Uma função isótropa é uma função dos invariantes de $\boldsymbol{T}$, I_1, I_2 e I_3, dados aqui por

$$I_1 = \boldsymbol{I} : \boldsymbol{T} \ , \quad I_2 = \boldsymbol{I} : \boldsymbol{T}^2 \quad \text{e} \quad I_3 = \boldsymbol{I} : \boldsymbol{T}^3 \ . \tag{9.82}$$

É fácil verificar que estes invariantes são funções isótropas de $\boldsymbol{T}$.

b) Uma função transversalmente isótropa é função dos invariantes de $\boldsymbol{T}$, I_1, I_2 e I_3 dados por (9.82), e dos seguintes invariantes

$$I_{1t} = \boldsymbol{M} : \boldsymbol{T} \ , \quad I_{2t} = \boldsymbol{M} : \boldsymbol{T}^2 \quad \text{e} \quad I_{3t} = \boldsymbol{M} : \boldsymbol{T}^3 \ . \tag{9.83}$$

É fácil verificar que estes invariantes são funções transversalmente isótropas de $\boldsymbol{T}$.

c) Uma função ortótropa é função dos seguintes invariantes

$$I_{1i} = \boldsymbol{M}_i : \boldsymbol{T} \ , \quad I_{2i} = \boldsymbol{M}_i : \boldsymbol{T}^2 \quad \text{e} \quad I_{3i} = \boldsymbol{M}_i : \boldsymbol{T}^3 \ , \quad i = 1,2,3 \ , \tag{9.84}$$

onde

$$\boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{m}_{(i)} \otimes \boldsymbol{m}_{(i)} \ . \tag{9.85}$$

É fácil verificar que estes invariantes são funções ortótropas de $\boldsymbol{T}$.

Definição 9.13: Material isótropo

Um material hiperelástico é dito isótropo se a função energia de deformação específica for uma função isótropa do tensor das deformações.

Definição 9.14: Material transversalmente isótropo

Um material hiperelástico é dito transversalmente isótropo se a função energia de deformação específica for uma função transversalmente isótropa do tensor das deformações.

Definição 9.15: Material ortótropo

Um material hiperelástico é dito ortótropo se a função energia de deformação específica for uma função ortótropa do tensor das deformações.

5.2 Materiais Hiperelásticos Isótropos

Propriedades 9.5

a) De acordo com as Propriedades 9.4, um material hiperelástico isótropo tem a sua energia de deformação específica dada por $\psi(I_1, I_2, I_3)$, onde

$$I_1 = \boldsymbol{I} : \boldsymbol{E}\,, \quad I_2 = \boldsymbol{I} : \boldsymbol{E}^2 \quad \text{e} \quad I_3 = \boldsymbol{I} : \boldsymbol{E}^3\,. \tag{9.86}$$

Logo, com a ajuda de (9.17) e da regra da cadeia, as tensões são dadas por

$$\boldsymbol{S} = \frac{\partial \psi}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{E}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{E}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{E}}\,. \tag{9.87}$$

b) Colocando-se (9.86) em forma indicial e realizando-se as derivadas de (9.87), conclui-se que

$$\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{E}} = \boldsymbol{I}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{E}} = 2\boldsymbol{E} \quad \text{e} \quad \frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{E}} = 3\boldsymbol{E}^2\,. \tag{9.88}$$

Portanto, de (9.87) e (9.88), tem-se

$$\boldsymbol{S} = \frac{\partial \psi}{\partial I_1}\boldsymbol{I} + 2\frac{\partial \psi}{\partial I_2}\boldsymbol{E} + 3\frac{\partial \psi}{\partial I_3}\boldsymbol{E}^2\,. \tag{9.89}$$

Observação 9.19

Note-se que $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$ em (9.89) é uma função tensorial isótropa, de acordo com (9.74). Logo, em materiais isótropos o tensor das tensões é uma função tensorial isótropa do tensor das deformações.

Observação 9.20

Um material isótropo apresenta as mesmas propriedades elásticas em qualquer direção. Não existem direções preferenciais em um material isótropo. Materiais resultantes da mistura aleatória de pequenos grãos são macroscopicamente isótropos, como é o caso de metais e do concreto simples.

Definição 9.16: Tensores colineares ou coaxiais

Dois tensores simétricos de segunda ordem são ditos *colineares* ou *coaxiais* se possuírem os mesmos autovetores, isto é, as mesmas direções principais.

Propriedades 9.6

a) Em materiais isótropos os tensores das tensões e das deformações, $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{E}$ em (9.89), são colineares. Isto é fácil de verificar a partir de (9.89), uma vez que $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{E}^2$ têm os mesmos autovetores.

b) De acordo com (9.18) e a partir de (9.89), com a ajuda da regra da cadeia, de (9.88) e de

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{E}} = \mathbb{I}_S \quad \text{e} \quad \frac{\partial \boldsymbol{E}^2}{\partial \boldsymbol{E}} = \boldsymbol{I} \underline{\otimes} \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E} \underline{\otimes} \boldsymbol{I}\,, \tag{9.90}$$

o tensor dos módulos hiperelásticos de rigidez tangente de um material isótropo é dado por

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D} = {} & 2\frac{\partial\psi}{\partial I_2}\mathbb{I}_S + 3\frac{\partial\psi}{\partial I_3}(\boldsymbol{I}\underline{\otimes}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}\underline{\otimes}\boldsymbol{I}) + \frac{\partial^2\psi}{\partial I_1^2}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} + \\
& + 4\frac{\partial^2\psi}{\partial I_2^2}\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E} + 9\frac{\partial^2\psi}{\partial I_3^2}\boldsymbol{E}^2\otimes\boldsymbol{E}^2 + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial I_1\partial I_2}(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{I}) + \\
& + 3\frac{\partial^2\psi}{\partial I_1\partial I_3}\big(\boldsymbol{E}^2\otimes\boldsymbol{I} + \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{E}^2\big) + 6\frac{\partial^2\psi}{\partial I_2\partial I_3}\big(\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{E}^2\otimes\boldsymbol{E}\big) .
\end{aligned}
\tag{9.91}
$$

c) Um material hiperelástico isótropo linear para o par $\{\boldsymbol{S},\boldsymbol{E}\}$ tem (9.17) dado por $\boldsymbol{S} = \mathbb{D}\boldsymbol{E}$, onde

$$
\mathbb{D} = \lambda\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} + 2\mu\mathbb{I}_S . \tag{9.92}
$$

Isto é fácil de se observar, considerando-se (9.91) e mantendo-se as parcelas que podem não depender de $\boldsymbol{E}$. As constantes

$$
\lambda = \frac{\partial^2\psi}{\partial I_1^2} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{\partial\psi}{\partial I_2} \tag{9.93}
$$

são chamadas de *constantes de Lamé*. A energia de deformação específica de um material elástico isótropo linear é dada então por

$$
\psi = \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 . \tag{1.94}
$$

5.3 Materiais Hiperelásticos Transversalmente Isótropos

Propriedades 9.7

- De acordo com as Propriedades 9.4, um material hiperelástico transversalmente isótropo tem a sua energia de deformação específica dada por $\psi(I_1, I_2, I_3, I_{1t}, I_{2t}, I_{3t})$, onde I_1, I_2 e I_3 são dados por (9.86) como também

$$
I_{1t} = \boldsymbol{M} : \boldsymbol{E} , \quad I_{2t} = \boldsymbol{M} : \boldsymbol{E}^2 \quad \text{e} \quad I_{3t} = \boldsymbol{M} : \boldsymbol{E}^3 . \tag{9.95}
$$

Logo, com a ajuda de (9.17) e da regra da cadeia, as tensões são dadas por

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S} = {} & \frac{\partial\psi}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial\boldsymbol{E}} + \frac{\partial\psi}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial\boldsymbol{E}} + \frac{\partial\psi}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial\boldsymbol{E}} + \\
& + \frac{\partial\psi}{\partial I_{1t}}\frac{\partial I_{1t}}{\partial\boldsymbol{E}} + \frac{\partial\psi}{\partial I_{2t}}\frac{\partial I_{2t}}{\partial\boldsymbol{E}} + \frac{\partial\psi}{\partial I_{3t}}\frac{\partial I_{3t}}{\partial\boldsymbol{E}} .
\end{aligned}
\tag{9.96}
$$

- Em analogia com o método empregado para a derivação de (9.88), tem-se que

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial I_{1t}}{\partial\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{M}, \quad \frac{\partial I_{2t}}{\partial\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}\boldsymbol{M} \quad \text{e} \\
& \frac{\partial I_{3t}}{\partial\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{E}\boldsymbol{M}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^2\boldsymbol{M} .
\end{aligned}
\tag{9.97}
$$

Portanto, de (9.96) e (9.97), tem-se

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S} = {} & \frac{\partial\psi}{\partial I_1}\boldsymbol{I} + 2\frac{\partial\psi}{\partial I_2}\boldsymbol{E} + 3\frac{\partial\psi}{\partial I_3}\boldsymbol{E}^2 + \frac{\partial\psi}{\partial I_{1t}}\boldsymbol{M} + \\
& + \frac{\partial\psi}{\partial I_{2t}}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}\boldsymbol{M}) + \frac{\partial\psi}{\partial I_{3t}}\big(\boldsymbol{M}\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{E}\boldsymbol{M}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^2\boldsymbol{M}\big) .
\end{aligned}
\tag{9.98}
$$

- A energia de deformação específica de um material elástico linear transversalmente isótropo é dada por

$$\psi = \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + \mu I_2 + \beta I_1 I_{1t} + \frac{1}{2}\lambda_t I_{1t}^2 + \mu_t I_{2t} \ . \tag{1.99}$$

onde λ, μ, β, λ_t e μ_t são 5 constantes. O tensor das tensões é dado por (9.96) e (1.99), ou seja, por

$$\boldsymbol{S} = (\lambda I_1 + \beta I_t)\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} + (\beta I_1 + \lambda_t I_t)\boldsymbol{M} + \mu_t(\boldsymbol{ME} + \boldsymbol{EM}) \ . \tag{1.100}$$

Logo, pode-se escrever que $\boldsymbol{S} = \mathbb{D}\boldsymbol{E}$, com o tensor dos módulos elásticos de rigidez dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{D} = \lambda(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I}) + 2\mu\mathbb{I}_S + \beta(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{I} + \boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{M}) + \\ + \lambda_t(\boldsymbol{M}\otimes\boldsymbol{M}) + \mu_t(\boldsymbol{M}\underline{\otimes}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{I}\underline{\otimes}\boldsymbol{M}) \ . \end{aligned} \tag{1.101}$$

Observação 9.21

Em materiais transversalmente isótropos os tensores das tensões e das deformações, $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{E}$ em (9.98), não são colineares. Este fato prejudica a intuição dos Engenheiros Estruturais, muito acostumados com materiais isótropos.

Observação 9.22

Materiais transversalmente isótropos apresentam um comportamento com simetria de revolução em torno do eixo descrito por $\boldsymbol{m}$. Este comportamento é típico de materiais que se formados por camadas de grãos dispostos aleatoriamente, como é o caso de solos e rochas sedimentares.

5.4 Materiais Hiperelásticos Ortótropos

Propriedades 9.8

a) De acordo com as Propriedades 9.4, um material hiperelástico ortótropo tem a sua energia de deformação específica dada por $\psi(I_{ki})$, onde

$$I_{ki} = \boldsymbol{M}_i : \boldsymbol{E}^k \ , \quad i,k = 1,2,3 \ . \tag{9.102}$$

Logo, com a ajuda de (9.17) e da regra da cadeia, as tensões são dadas por

$$\boldsymbol{S} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\psi}{\partial I_{ki}}\frac{\partial I_{ki}}{\partial\boldsymbol{E}} \ . \tag{9.103}$$

b) Em analogia com o método empregado para a derivação de (9.97), tem-se que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial I_{1i}}{\partial\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{M}_i, \quad \frac{\partial I_{2i}}{\partial\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{M}_i\boldsymbol{E} + \boldsymbol{EM}_i \quad \text{e} \\ &\frac{\partial I_{3i}}{\partial\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{M}_i\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{EM}_i\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^2\boldsymbol{M}_i \ . \end{aligned} \tag{9.104}$$

Portanto, tem-se

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \psi}{\partial I_{1i}} \boldsymbol{M}_i + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \psi}{\partial I_{2i}} (\boldsymbol{M}_i \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E} \boldsymbol{M}_i) + \\
+ \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \psi}{\partial I_{3i}} \big(\boldsymbol{M}_i \boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{E} \boldsymbol{M}_i \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^2 \boldsymbol{M}_i \big).
\end{aligned} \tag{9.105}
$$

c) A energia de deformação específica de um material elástico linear ortótropo é dada por

$$
\begin{aligned}
\psi = \frac{1}{2} \lambda_1 I_{1i}^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 I_{2i}^2 + \frac{1}{2} \lambda_3 I_{3i}^2 + \\
+ \beta_1 I_{12} I_{13} + \beta_2 I_{13} I_{11} + \beta_3 I_{11} I_{12} + \\
+ \mu_1 I_{21} + \mu_2 I_{22} + \mu_3 I_{23} \ ,
\end{aligned} \tag{1.106}
$$

onde λ_i, β_i e μ_i, $i = 1,2,3$, são 9 constantes. O tensor das tensões é dado então por

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S} = (\lambda_1 I_{11} + \beta_2 I_{13} + \beta_3 I_{12}) \boldsymbol{M}_1 + (\lambda_2 I_{11} + \beta_1 I_{13} + \beta_3 I_{11}) \boldsymbol{M}_2 + \\
+ (\lambda_3 I_{11} + \beta_1 I_{12} + \beta_2 I_{11}) \boldsymbol{M}_3 + \mu_1 (\boldsymbol{M}_1 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E} \boldsymbol{M}_1) + \\
+ \mu_2 (\boldsymbol{M}_2 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E} \boldsymbol{M}_2) + \mu_3 (\boldsymbol{M}_3 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E} \boldsymbol{M}_3) \ .
\end{aligned} \tag{1.107}
$$

Logo, o tensor das tensões também pode ser expresso por $\boldsymbol{S} = \mathbb{D} \boldsymbol{E}$, com o tensor dos módulos elásticos de rigidez dado por

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D} = \lambda_1 (\boldsymbol{M}_1 \otimes \boldsymbol{M}_1) + \lambda_2 (\boldsymbol{M}_2 \otimes \boldsymbol{M}_2) + \lambda_3 (\boldsymbol{M}_3 \otimes \boldsymbol{M}_3) + \\
+ \beta_1 (\boldsymbol{M}_2 \otimes \boldsymbol{M}_3 + \boldsymbol{M}_3 \otimes \boldsymbol{M}_2) + \beta_2 (\boldsymbol{M}_1 \otimes \boldsymbol{M}_3 + \boldsymbol{M}_3 \otimes \boldsymbol{M}_1) + \\
+ \beta_3 (\boldsymbol{M}_1 \otimes \boldsymbol{M}_2 + \boldsymbol{M}_2 \otimes \boldsymbol{M}_1) + \mu_1 (\boldsymbol{M}_1 \underline{\otimes} \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \underline{\otimes} \boldsymbol{M}_1) + \\
+ \mu_2 (\boldsymbol{M}_2 \underline{\otimes} \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \underline{\otimes} \boldsymbol{M}_2) + \mu_3 (\boldsymbol{M}_3 \underline{\otimes} \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \underline{\otimes} \boldsymbol{M}_3) \ .
\end{aligned} \tag{1.108}
$$

Observação 9.23

Em materiais ortótropos os tensores das tensões e das deformações, os tensores $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{E}$ em (9.105), não são colineares. Este fato prejudica a intuição dos Engenheiros Estruturais, muito acostumados com materiais isótropos.

Observação 9.24

Materiais ortótropos apresentam comportamento elástico com simetria em relação a três planos ortogonais entre si e descritos pelas normais $\boldsymbol{m}_i$, $i = 1,2,3$. Este comportamento é típico de cristais cúbicos ou de materiais reforçados por fibras em direções ortogonais entre si. A madeira natural é aproximadamente ortótropa, com a direção mais rígida sendo a direção das fibras de celulose.

Exemplo 9.4: Membranas de estruturas tensionadas

Um material estrutural ortótropo importante é o material de membranas têxteis utilizadas em coberturas tensionadas. Como na configuração inicial as membranas são planas, podem-se particularizar as propriedades acima para o caso bidimensional, ao se colocar a membrana em sua configuração de referência no plano de $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$. Assim, uma membrana elástica ortótropa tem a sua energia de deformação descrita por $\psi(I_{ki})$, onde

$$
I_{ki} = \boldsymbol{M}_i : \boldsymbol{E}^k \ , \quad i,k = 1,2 \ . \tag{1.109}
$$

As tensões passam então a serem dadas por

$$\boldsymbol{S} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\psi}{\partial I_{ki}}\frac{\partial I_{ki}}{\partial \boldsymbol{E}} = \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial\psi}{\partial I_{1i}}\boldsymbol{M}_i + \frac{\partial\psi}{\partial I_{2i}}(\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}\boldsymbol{M}_i)\right]. \tag{1.110}$$

Uma classe de funções de energia de deformação específica, que pode ser adequada às membranas da prática, é dada por

$$\psi(I_{ik}) = \hat{\psi}(I_{11}, I_{12}) + \mu(I_{21} + I_{22}), \tag{1.111}$$

onde $\hat{\psi}$ é uma função de I_{11} e I_{12}, em geral não-linear, e μ é uma constante. De (1.110) e (1.111) resulta

$$\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial\psi}{\partial I_{1i}}\boldsymbol{M}_i + \mu(\boldsymbol{M}_i\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}\boldsymbol{M}_i)\right]. \tag{1.112}$$

Por exemplo, se $\hat{\psi}$ for uma função cúbica de I_{1i}, $i = 1,2$, (1.111) tem a seguinte forma

$$\begin{aligned}\psi(I_{ik}) = \frac{1}{2}a_1 I_{11}^2 + \frac{1}{2}a_2 I_{12}^2 + bI_{11}I_{12} + \frac{1}{3}c_1 I_{11}^3 + \frac{1}{3}c_2 I_{12}^3 + \\ + d_1 I_{11}^2 I_{12} + d_2 I_{11} I_{12}^2 + \mu(I_{21} + I_{22}),\end{aligned} \tag{1.113}$$

onde a_1, a_2, b, c_1, c_2, d_1 e d_2 são constantes do material. De (1.113) resultam as seguintes tensões

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S} = \left(a_1 I_{11} + bI_{12} + c_1 I_{11}^2 + 2d_1 I_{11} I_{12} + d_2 I_{12}^2\right)\boldsymbol{M}_1 + \\ + \left(a_2 I_{12} + bI_{11} + c_2 I_{12}^2 + d_1 I_{11}^2 + 2d_2 I_{11} I_{12}\right)\boldsymbol{M}_2 + 2\mu\boldsymbol{E}\end{aligned} \tag{1.114}$$

Exercícios 9.1

- Deduza a equação diferencial do modelo viscoelástico alternativo de três parâmetros apresentado na Figura 9.17. Apresente as soluções para os ensaios de fluência e de relaxação.
- Encontre a solução do modelo de Hohenemser-Prager para um ensaio de tensão controlada com taxa de tensionamento $\dot{\sigma}_0$ constante a partir de $t = 0$. Mostre o gráfico $\sigma \times \varepsilon$ para taxas de tensionamento $\dot{\sigma}_1 \leq \dot{\sigma}_2 \leq \dot{\sigma}_3$ crescentes.
- Desenhe os gráficos da tensão em função do tempo nos três elementos de um modelo viscoelástico de três parâmetros durante os ensaios de fluência e relaxação.
- Descreva o comportamento do modelo material para o concreto mostrado na Figura 9.24.

Figura 9.24: Modelo Material para o Concreto

- Deduza a equação diferencial das cadeias de 3 elementos de Kelvin-Voigt e de 3 elementos de Maxwell.

10

Teoria Linear da Elasticidade

1 Introdução: linearidade geométrica e física

Na Teoria Linear da Elasticidade, ou simplesmente teoria da Elasticidade, adotam-se duas hipóteses que levam à linearidade dos problemas nela formulados: *Linearidade Geométrica* e *Elasticidade Linear*. A primeira delas tem como conseqüência que os tensores das deformações e das rotações são dados por

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{Sym}\,(\boldsymbol{L}) = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T\big) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{W} = \mathrm{Skew}\,(\boldsymbol{L}) = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}^T\big)\,, \tag{10.1}$$

respectivamente, conforme o Capítulo 6. Em (10.1) $\boldsymbol{L}$ é o gradiente do campo dos deslocamentos $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ na configuração de referência dado por

$$\boldsymbol{L} = \nabla \boldsymbol{u}\,. \tag{10.2}$$

Outra forma de se grafar as expressões de (10.1) é por meio dos tensores de quarta ordem definidos no Capítulo 2, ou seja, por meio de

$$\boldsymbol{E} = \mathbb{I}_S \boldsymbol{L} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{W} = \mathbb{I}_A \boldsymbol{L}\,, \tag{10.3}$$

nas quais foram utilizados os tensores de quarta ordem de **(2.216)**

$$\mathbb{I}_S = \frac{1}{2}(\boldsymbol{I} \underline{\otimes} \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \overline{\otimes} \boldsymbol{I}) \quad \text{e} \quad \mathbb{I}_A = \frac{1}{2}(\boldsymbol{I} \underline{\otimes} \boldsymbol{I} - \boldsymbol{I} \overline{\otimes} \boldsymbol{I})\,. \tag{10.4}$$

Na Linearidade Geométrica não se faz diferença entre a configuração de referência e a atual, escrevendo-se simplesmente $\boldsymbol{x}$ para o vetor posição. Com a hipótese de Linearidade Geométrica todos os tensores de tensão coincidem e as equações locais do movimento tornam-se

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \rho \ddot{\boldsymbol{u}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T, \tag{10.5}$$

onde $\boldsymbol{T}$ é o tensor das tensões e $\boldsymbol{b}$ é o vetor das forças de volume. Com a hipótese de Linearidade Geométrica a questão da objetividade discutida no Capítulo 9 deixa de ser considerada. Assim um material elástico é aquele para o qual exista uma aplicação tal que

$$\boldsymbol{T} = \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{E})\,. \tag{10.6}$$

A *tensão inicial* é dada por

$$\boldsymbol{T}_0 = \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{O}) \ . \tag{10.7}$$

onde $\boldsymbol{O}$ é o tensor nulo. Diz-se que a configuração de referência é uma configuração de referência *natural* quando estas tensões forem nulas, ou seja, quando$\boldsymbol{T}_0 = \boldsymbol{O}$.

A segunda hipótese da Teoria Linear da Elasticidade, denominada de *Linearidade Física*, admite que a aplicação (10.6) acima é linear. Portanto existe a seguinte relação

$$\boldsymbol{T} = \mathbb{D}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}_0 \, , \tag{10.8}$$

onde $\mathbb{D}$ é um tensor de quarta ordem, denominado *tensor dos módulos de rigidez elástica*. O tensor $\mathbb{D}$ tem 81 componentes numa base ortonormal qualquer. Note-se, no entanto, que $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{E}$ são simétricos, e, portanto, o tensor $\mathbb{D}$ possui as chamadas de simetrias menores **(2.229)**, que podem ser expressas por meio de

$$\mathbb{D} = \mathbb{I}_S \mathbb{D} = \mathbb{D}\mathbb{I}_S \ , \tag{10.9}$$

onde $\mathbb{I}_S$ é dado por (10.4). Restam assim apenas 36 constantes independentes em $\mathbb{D}$. As simetrias (10.9) foram apresentadas no final do Capítulo 2.

Se o material elástico for hiperelástico, de acordo com o Capítulo **9**, existe um potencial escalar $\psi(\boldsymbol{E})$, denominado *energia de deformação por unidade de volume* ou *energia de deformação específica*, tal que

$$\boldsymbol{T} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{E}} \tag{10.10}$$

Na hipótese de linearidade física o potencial acima é dado por

$$\psi(\boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : (\mathbb{D}\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{T}_0 : \boldsymbol{E} \ , \tag{10.11}$$

As tensões são dadas por (10.8), que decorre de (10.10) e (10.11). O tensor dos módulos hiperelásticos de rigidez tangente, definido por

$$\mathbb{D} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{E}^2} \, , \tag{10.12}$$

coincide com o tensor dos módulos elásticos de rigidez no caso de linearidade física. Além disso, como a ordem de diferenciação leva ao mesmo resultado, ele é simétrico. Esta simetria é chamada de simetria maior, e pode ser expressa por meio de

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}^T \ . \tag{10.13}$$

Isto reduz o número de constantes independentes de 36 para 21.

2 Isotropia

Um material elástico é dito *isótropo* na configuração natural, conforme a Definição 9.10 do Capítulo 9, se a aplicação (10.6) satisfizer a seguinte condição

$$\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{R} = \hat{\boldsymbol{T}}\left(\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{R}\right), \quad \forall \boldsymbol{R} \in \mathcal{R}_3 \ , \tag{10.14}$$

onde $\mathcal{R}_3$ é o conjunto das rotações. Fisicamente falando, um material é isótropo se as propriedades mecânicas não dependerem das direções. Isto significa que não importa como se retira um corpo de prova de um sólido isótropo, as propriedades elásticas medidas serão as mesmas.

Observação 10.1

Não se deve confundir isotropia com homogeneidade. Um sólido é dito *homogêneo* se apresentar as mesmas propriedades mecânicas em todos os seus pontos materiais.

2.1 Materiais hiperelásticos isótropos

Um material hiperelástico é dito *isótropo* na configuração natural, conforme a Definição 9.9 do Capítulo 9, se $\psi(\boldsymbol{E})$ satisfizer a seguinte condição

$$\psi(\boldsymbol{E}) = \psi\big(\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{R}\big), \quad \forall \boldsymbol{R} \in \mathcal{R}\,. \tag{10.15}$$

Se um material hiperelástico satisfizer (10.15) ele satisfaz (10.14) também.

Exemplo 10.1: Material hiperelástico linear

Considere-se um material hiperelástico linear sem tensões iniciais com

$$\mathbb{D} = \lambda\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} + 2\mu\mathbb{I}_S\,, \tag{10.16}$$

onde λ e μ são constantes denominadas *constantes de Lamé*[49]. É fácil mostrar que (10.16) representa um material isótropo na configuração natural. Seja

$$\psi(\boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}:(\mathbb{D}\boldsymbol{E})\,, \tag{10.17}$$

com $\mathbb{D}$ dado por (10.16). Então, lembrando-se que $\boldsymbol{E}:[(\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I})\boldsymbol{E}] = (\boldsymbol{I}:\boldsymbol{E})^2$ e $\boldsymbol{E}:\mathbb{I}_S\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}:\boldsymbol{E}$, tem-se

$$\psi(\boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}:[(\lambda\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} + 2\mu\mathbb{I}_S)\boldsymbol{E}] = \frac{1}{2}\lambda(\boldsymbol{I}:\boldsymbol{E})^2 + \mu(\boldsymbol{E}:\boldsymbol{E})\,. \tag{10.18}$$

Logo

$$\begin{aligned}\psi\big(\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{R}\big) &= \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{R}\big):\big[(\lambda\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} + 2\mu\mathbb{I}_S)\big(\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{R}\big)\big] = \\ &= \frac{1}{2}\lambda\big(\boldsymbol{I}:\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{R}\big)^2 + \mu\big(\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{R}:\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{R}\big) = \\ &= \frac{1}{2}\lambda(\boldsymbol{I}:\boldsymbol{E})^2 + \mu(\boldsymbol{E}:\boldsymbol{E}) = \psi(\boldsymbol{E})\,,\end{aligned} \tag{10.19}$$

onde se utilizou a ortogonalidade do tensor $\boldsymbol{R}$, ou seja, $\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$, e a propriedade de permutação cíclica do produto escalar de dois tensores de segunda ordem, conforme o Capítulo 2.

2.2 Lei de Hooke generalizada

Definição 10.1: Lei de Hooke generalizada

O material hiperelástico (10.16) tem as tensões dadas por

$$\boldsymbol{T} = (\lambda\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} + 2\mu\mathbb{I}_S)\boldsymbol{E}\,. \tag{10.20}$$

(10.20) é conhecida como *Lei de Hooke*[50] *Generalizada*.

[49] Gabriel Lamé (1795-1870).
[50] Robert Hooke (1635-1703).

2.2.1 Compressão triaxial

Considere-se a tensão normal média dada por

$$\sigma_{\mathrm{m}} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{I} : \boldsymbol{T}) \,. \tag{10.21}$$

Seja também a deformação volumétrica dada por

$$\vartheta = \boldsymbol{I} : \boldsymbol{E} \,. \tag{10.22}$$

Para o material hiperelástico isótropo (10.20), tem-se, portanto

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathrm{m}} &= \frac{1}{3}\boldsymbol{I} : (\lambda \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} + 2\mu \mathbb{I}_S)\boldsymbol{E} = \\ &= \frac{1}{3}[\lambda(\boldsymbol{I} : \boldsymbol{I}) + 2\mu](\boldsymbol{I} : \boldsymbol{E}) = \\ &= \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\vartheta \,, \end{aligned} \tag{10.23}$$

onde se utilizou a propriedade $\boldsymbol{I} : \boldsymbol{I} = 3$. Pode-se assim escrever

$$\sigma_{\mathrm{m}} = K\vartheta \,, \tag{10.24}$$

onde

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{10.25}$$

é o *módulo de compressibilidade* do material.

2.2.2 Cisalhamento Simples

As parcelas esféricas de $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{E}$ são definidas conforme o Capítulo 2 e, com a ajuda de (10.21) e (10.22), são dadas por

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{e}} = \sigma_{\mathrm{m}}\boldsymbol{I} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{E}^{\mathrm{e}} = \frac{1}{3}\vartheta\boldsymbol{I} \,. \tag{10.26}$$

Logo

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{e}} = 3K\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}} \,. \tag{10.27}$$

As parcelas antiesféricas de $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{E}$ são definidas também de acordo com o Capítulo 2 e são dadas por

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{a}} = \boldsymbol{T} - \sigma_{\mathrm{m}}\boldsymbol{I} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{E}^{\mathrm{a}} = \boldsymbol{E} - \frac{1}{3}\vartheta\boldsymbol{I} \,. \tag{10.28}$$

Logo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}^{\mathrm{a}} &= (\lambda \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} + 2\mu \mathbb{I})\boldsymbol{E} - K\vartheta\boldsymbol{I} = \\ &= (\lambda - K)\vartheta\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} = \\ &= 2\mu\left(\boldsymbol{E} - \frac{1}{3}\vartheta\boldsymbol{I}\right) = \\ &= 2\mu\boldsymbol{E}^{\mathrm{a}} \,. \end{aligned} \tag{10.29}$$

Portanto

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{a}} = 2G\boldsymbol{E}^{\mathrm{a}} \,, \tag{10.30}$$

onde

$$G = \mu \tag{10.31}$$

é denominado *módulo de elasticidade transversal* ou *módulo de cisalhamento*. Uma constatação muito importante é que em um material elástico isótropo $\boldsymbol{T}^{\mathrm{a}}$ e $\boldsymbol{E}^{\mathrm{a}}$ têm os mesmos autovetores ou direções principais, e, por conseguinte, $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{E}$ também.

(10.27) e (10.30) permitem que se escreva (10.20) da seguinte forma

$$\boldsymbol{T} = (K\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} + 2G\mathbb{I}_D)\boldsymbol{E}\,, \tag{10.32}$$

onde, de acordo com o Capítulo 2,

$$\mathbb{I}_D = \mathbb{I}_S - \frac{1}{3}\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I}\,. \tag{10.33}$$

Logo o tensor dos módulos elásticos de rigidez pode também ser expresso por

$$\mathbb{D} = K\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} + 2G\mathbb{I}_D\,. \tag{10.34}$$

Figura 10.1: Cisalhamento simples

Em um ensaio de cisalhamento simples, de acordo com a Figura 10.1, tem-se

$$\boldsymbol{T} = \tau(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\gamma(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1)\,,$$

ou seja,

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = T_{13} = T_{23} = 0\,, \quad T_{12} = \tau\ ,$$

$$E_{11} = E_{22} = E_{33} = E_{13} = E_{23} = 0 \quad \text{e} \quad E_{12} = \frac{1}{2}\gamma\,.$$

De (10.20) decorre

$$\tau = G\gamma\,, \tag{10.35}$$

justificando a nomenclatura de G.

2.2.3 Tração Simples

Em um ensaio de tração simples, conforme a Figura 10.2, tem-se

$$\boldsymbol{T} = \sigma(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{E} = \varepsilon[\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 - \nu(\boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3)]\,,$$

ou seja

$$T_{22} = T_{33} = T_{12} = T_{13} = T_{23} = 0\,, \quad T_{11} = \sigma\,,$$

$$E_{11} = \varepsilon, \quad E_{22} = E_{33} = -\nu\varepsilon \quad \text{e} \quad E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0\,.$$

De (10.32) decorrem

$$\sigma = E\varepsilon \ , \tag{10.36}$$

e

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad \text{e} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \ . \tag{10.37}$$

E é o *módulo de elasticidade* e ν é o *coeficiente de contração lateral* ou *coeficiente de Poisson*[51]. Com a ajuda de (10.37) e (10.33) pode-se escrever (10.34)

$$\mathbb{D} = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} + \frac{E}{1+\nu} \mathbb{I}_S \ . \tag{10.38}$$

Figura 10.2: Tração Simples

Observação 10.2

Observe-se que

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \ . \tag{10.39}$$

Observação 10.3: Tensor dos módulos elásticos de flexibilidade

O *tensor dos módulos elásticos de flexibilidade* é definido de tal forma que

$$\boldsymbol{E} = \mathbb{C}\boldsymbol{T} \ , \tag{10.40}$$

ou seja

$$\mathbb{C} = \mathbb{D}^{-1} \ . \tag{10.41}$$

(10.27) e (10.30) permitem que se escreva a inversa de (10.32) como se segue

$$\boldsymbol{E} = \left(\frac{1}{9K} \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} + \frac{1}{2G} \mathbb{I}_D \right) \boldsymbol{T} \ . \tag{10.42}$$

Logo $\mathbb{C}$ pode ser expresso por

$$\mathbb{C} = \frac{1}{9K} \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} + \frac{1}{2G} \mathbb{I}_D = \frac{1+\nu}{E} \mathbb{I}_S - \frac{\nu}{E} \boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} \ . \tag{10.43}$$

[51] Siméon-Denis Poisson (1781-1840).

Observação 10.4

Note-se que $\nu = 1/2$ corresponde a um material incompressível e $\nu = -1$ corresponde a um material infinitamente rígido a distorção. Note-se também que

$$K > 0 \quad \text{e} \quad G > 0 \quad \Leftrightarrow \quad E > 0 \quad \text{e} \quad -1 < \nu < \frac{1}{2}\,. \tag{10.44}$$

A partir de (10.18), e com a ajuda de (10.22) e (10.28), pode-se mostrar que a energia de deformação por unidade de volume de materiais elásticos lineares isótropos é dada por

$$\psi(\boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}K\vartheta^2 + G(\boldsymbol{E}^{\mathrm{a}} : \boldsymbol{E}^{\mathrm{a}})\,. \tag{10.45}$$

Logo, com a ajuda de (10.44), tem-se

$$\psi(\boldsymbol{E}) > 0\,, \quad \forall \boldsymbol{E} \neq \boldsymbol{O} \quad \Leftrightarrow \quad E > 0 \quad \text{e} \quad -1 < \nu < \frac{1}{2}\,. \tag{10.46}$$

3 Compatibilidade

Observe-se a equação (10.1). Ela não oferece nenhum problema quando o campo de deslocamentos $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ é conhecido e os campos $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})$ são obtidos por diferenciação. No entanto, caso se deseje inverter o processo, isto é, caso se suponha conhecido o campo $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ e se deseje obter um campo $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ que produza aquelas deformações, pode ser que este campo não exista. Serão deduzidas nesta seção as condições de compatibilidade que, satisfeitas por um campo $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$, garantem que exista um campo $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ do qual ele derive.

Diferenciando-se E_{11} em relação a x_2 e x_2, diferenciando-se E_{22} em relação a x_1 e x_1, somando-se, obtém-se

$$\begin{aligned} E_{11,22} + E_{22,11} &= u_{1,122} + u_{2,211} \\ &= u_{1,212} + u_{2,112} \\ &= 2E_{12,12}\,. \end{aligned} \tag{10.47}$$

Diferenciando-se E_{12} em relação a x_1 e x_3, diferenciando-se E_{13} em relação a x_1 e x_2, somando-se, obtém-se

$$\begin{aligned} E_{12,13} + E_{13,12} &= \frac{1}{2}\big(u_{1,213} + u_{2,113} + u_{1,312} + u_{3,112}\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(u_{1,123} + u_{1,132} + u_{2,311} + u_{3,211}\big) \\ &= E_{11,23} + E_{23,11}\,. \end{aligned} \tag{10.48}$$

De forma análoga, obtém-se mais quatro equações. Ao todo são as seis equações abaixo

$$\begin{aligned} H_{11} &= E_{22,33} + E_{33,22} - 2E_{23,23} = 0\,, \\ H_{22} &= E_{33,11} + E_{11,33} - 2E_{31,31} = 0\,, \\ H_{33} &= E_{11,22} + E_{22,11} - 2E_{12,12} = 0\,, \\ H_{12} &= E_{23,31} + E_{31,23} - E_{33,12} - E_{12,33} = 0\,, \\ H_{23} &= E_{31,12} + E_{12,31} - E_{11,23} - E_{23,11} = 0\,, \\ H_{31} &= E_{12,23} + E_{23,12} - E_{22,31} - E_{31,22} = 0\,, \end{aligned} \tag{10.49}$$

que podem ser reunidas da seguinte forma

$$E_{ij,kl} + E_{kl,ij} - E_{ik,jl} - E_{jl,ik} = 0 \,. \tag{10.50}$$

Embora (10.50) represente 81 equações, tem-se apenas 6 como (10.49) indica.

Equações de Compatibilidade de Saint-Venant

Introduzindo-se o tensor de segunda ordem simétrico $\boldsymbol{H}$, cujas componentes são dadas por (10.49), pode-se escrever

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{O} \,. \tag{10.51}$$

(10.50) ou (10.51) são as *equações de compatibilidade de Saint-Venant*.

Observação 10.5

Para se mostrar que as equações de compatibilidade são condição necessária para a existência de um campo de deslocamentos num sólido, seja $\boldsymbol{u}^Q$ o deslocamento de um ponto Q do sólido e seja $\boldsymbol{u}^P$ o deslocamento de um ponto P do sólido. Seja C uma curva qualquer que una P a Q, então

$$u_j^Q = u_j^P + \int_P^Q du_j = u_j^P + \int_P^Q u_{j,k} dx_k = u_j^P + \int_P^Q \left(E_{jk} + W_{jk} \right) dx_k \,. \tag{10.52}$$

Agora, eliminar-se-á W_{jk} em termos de E_{jk}. Para isso integrar-se-á por partes a última parcela da integral de (10.52)

$$\int_P^Q W_{jk} dx_k = \int_P^Q W_{jk} d\left(x_k - x_k^P \right) = W_{jk}^P \left(x_k^Q - x_k^P \right) - \int_P^Q \left(x_k - x_k^P \right) W_{jk,m} dx_m \,, \tag{10.53}$$

onde W_{jk}^P são as componentes do tensor das pequenas rotações $\boldsymbol{W}^P$ no ponto P, admitido conhecido assim como $\boldsymbol{u}^P$. É fácil mostrar que

$$W_{jk,m} = E_{mj,k} - E_{mk,j} \,, \tag{10.54}$$

que, introduzida em (10.53), permite escrever (10.52) da seguinte forma

$$u_j^Q = u_j^P + \int_P^Q E_{jk} dx_k + W_{jk}^P \left(x_k^Q - x_k^P \right) - \int_P^Q \left(x_k - x_k^P \right) \left(E_{mj,k} - E_{mk,j} \right) dx_m \,. \tag{10.55}$$

Logo

$$u_j^Q = u_j^P + W_{jk}^P \left(x_k^Q - x_k^P \right) + \int_P^Q G_{jm} dx_m \,, \tag{10.56}$$

onde

$$G_{jm} = E_{jm} - \left(x_k - x_k^P \right) \left(E_{mj,k} - E_{mk,j} \right) . \tag{10.57}$$

Considere-se a seguinte proposição. Seja $v_m(x_k)$ um campo vetorial num sólido. Uma condição necessária para que a integral $\int_P^Q v_m dx_m$ seja independente do caminho de integração é que exista um potencial $\psi(x_m)$ tal que

$$v_m = \psi_{,m} \,. \tag{10.58}$$

Isto é fácil de verificar, pois

$$\int_P^Q v_m dx_m = \int_P^Q \psi_{,m} dx_m = \psi\left(x_k^Q \right) - \psi\left(x_k^P \right) . \tag{10.59}$$

De (10.58) decorre $v_{m,n} = v_{n,m}$. Logo, uma condição necessária para que a integral $\int_P^Q G_{jm} dx_m$ não dependa do caminho é

$$G_{jm,n} = G_{jn,m} \ . \tag{10.60}$$

Introduzindo-se (10.57) em (10.60), tem-se

$$\big(x_k - x_k^P\big)\big(E_{ij,kl} + E_{kl,ij} - E_{ik,jl} - E_{jl,ik}\big) = 0 \ , \tag{10.61}$$

que implica em (10.50).

Observação 10.6

Um *sólido simplesmente conexo* é aquele no qual qualquer curva fechada pode ir reduzindo seu comprimento até se degenerar em um ponto sem que a fronteira do sólido seja ultrapassada. Uma câmera de pneu, por exemplo, não é um sólido simplesmente conexo. Cubos, esferas e prismas são simplesmente conexos. Pode-se demonstrar que para sólidos simplesmente conexos (10.51) é necessária e suficiente. Em sólidos multiplamente conexos, isto é, aqueles que não são simplesmente conexos, (10.51) é apenas necessária e precisa-se de condições suficientes adicionais, que não serão abordadas aqui.

4 O Problema Estático da Teoria Linear da Elasticidade

Formula-se agora o Problema Estático da Teoria Linear da Elasticidade. Seja um sólido ocupando a região V, limitada pela superfície externa S, do espaço afim euclidiano $\mathbb{E}_3$.

4.1 Equações do Problema Estático da Teoria Linear da Elasticidade

Dispõe-se das seguintes *equações locais do equilíbrio* em V

$$\operatorname{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T \ , \tag{10.62}$$

assim como das seguintes *equações cinemáticas* em V

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T\big) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{W} = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}^T\big) , \tag{10.63}$$

onde

$$\boldsymbol{L} = \nabla \boldsymbol{u} \ . \tag{10.64}$$

Tem-se também a seguinte *equação constitutiva* em V

$$\boldsymbol{T} = \mathbb{D}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}_0 , \tag{10.65}$$

onde $\mathbb{D}$ é um tensor de quarta ordem, denominado tensor dos módulos elásticos de rigidez, e $\boldsymbol{T}_0$ é o tensor das tensões iniciais.

Em um Problema Estático são conhecidas ou impostas as forças volúmicas $\boldsymbol{b}$ e as seguintes *condições de contorno*

$$\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} , \quad \text{em } S_u , \tag{10.66}$$

e

$$\boldsymbol{t} = \overline{\boldsymbol{t}} , \quad \text{em } S_t , \tag{10.67}$$

onde S_u e S_t são as partes da superfície externa onde as condições de contorno são impostas. Veja que $S = S_u \cup S_t$ e $S_u \cap S_t = \varnothing$. Lembre-se que, conforme o Teorema de Cauchy,

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}\,, \tag{10.68}$$

para qualquer superfície, interna ou externa, cujo vetor normal é $\boldsymbol{n}$. Em alguns problemas, impõe-se em pontos de S uma condição mista, na qual algumas componentes de $\boldsymbol{u}$ em uma base ortonormal local são impostas enquanto que, na mesma base, outras componentes de $\boldsymbol{t}$ são impostas. Neste caso, um dos vetores da base local é freqüentemente normal a S. Daqui em diante considera-se apenas condições de contorno dadas por (10.66) e (10.67). A consideração de condições mistas não é difícil e não perturba os resultados obtidos a seguir.

Chama-se de *solução* do Problema Estático da Teoria Linear da Elasticidade ao conjunto de campos $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\}$ que satisfaçam as seguintes equações e condições de contorno

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{L} = \nabla\boldsymbol{u} \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{E} = \mathbb{I}_S\boldsymbol{L} \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \quad \text{em } V\,,\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{T} = \mathbb{D}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}_0 \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u\,,\\
&\boldsymbol{t} = \overline{\boldsymbol{t}} \quad \text{em } S_t\,.
\end{aligned} \tag{10.69}$$

4.2 Superposição dos Efeitos

Note-se que as equações de (10.69) são lineares em $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$. Isto significa que, se $\mathcal{S}_1 = \{\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{x})\}$ é uma solução de um problema estático sem tensões iniciais com $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1$ em V, $\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}}_1$ em S_u e $\boldsymbol{t} = \overline{\boldsymbol{t}}_1$ em S_t e $\mathcal{S}_2 = \{\boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{T}_2(\boldsymbol{x})\}$ é uma solução de um problema estático com $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_2$ em V, $\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}}_2$ em S_u e $\boldsymbol{t} = \overline{\boldsymbol{t}}_2$ em S_t, então $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 = \{\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{T}_2(\boldsymbol{x})\}$ é uma solução do problema estático sem tensões iniciais com $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$ em V, $\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}}_1 + \overline{\boldsymbol{u}}_2$ em S_u e $\boldsymbol{t} = \overline{\boldsymbol{t}}_1 + \overline{\boldsymbol{t}}_2$ em S_t. Esta propriedade chama-se *superposição dos efeitos*.

Propriedade 10.1

Uma aplicação da superposição dos efeitos é que todo problema estático descrito por (10.69) pode ser decomposto nos dois problemas abaixo,

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{L} = \nabla \boldsymbol{u}\,, \quad \text{em } V\,, && \boldsymbol{L} = \nabla \boldsymbol{u} \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{E} = \mathbb{I}_S \boldsymbol{L}\,, \quad \text{em } V\,, && \boldsymbol{E} = \mathbb{I}_S \boldsymbol{L} \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \quad \text{em } V\,, && \boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \quad \text{em } V\,,\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V\,, && \operatorname{div}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T \quad \text{em } V\,, \qquad \text{e} && \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{T} = \mathbb{D}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}_0 \quad \text{em } V\,, && \boldsymbol{T} = \mathbb{D}\boldsymbol{E} \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } S_u\,, && \boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u\,,\\
&\boldsymbol{t} = \overline{\boldsymbol{t}} \quad \text{em } S_t\,, && \boldsymbol{t} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } S_t\,.
\end{aligned}
\tag{10.70}
$$

Os problemas de (10.70), uma vez resolvidos, podem ser superpostos. $(10.70)_1$ é um problema de forças impostas e $(10.70)_2$ é um problema de deslocamentos impostos.

4.3 Unicidade da Solução

Suponha-se que $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ sejam duas soluções de um mesmo problema estático. Então

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{div}\boldsymbol{T}_1 = \operatorname{div}\boldsymbol{T}_2 = -\boldsymbol{b} \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u\,,\\
&\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{t}_2 = \overline{\boldsymbol{t}} \quad \text{em } S_t\,.
\end{aligned}
\tag{10.71}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{div}\Delta\boldsymbol{T} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V\,,\\
&\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } S_u\,,\\
&\Delta\boldsymbol{t} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } S_t\,,
\end{aligned}
\tag{10.72}
$$

onde

$$
\Delta(\bullet) = (\bullet)_1 - (\bullet)_2\,. \tag{10.73}
$$

Utilizando-se o teorema do divergente, conforme o Capítulo 3, tem-se

$$
\int_S \Delta\boldsymbol{t}\cdot\Delta\boldsymbol{u}\,dS = \int_S (\Delta\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\cdot\Delta\boldsymbol{u}\,dS = \int_V (\Delta\boldsymbol{T} : \Delta\boldsymbol{E} + \operatorname{div}\Delta\boldsymbol{T}\cdot\Delta\boldsymbol{u})\,dV\,. \tag{10.74}
$$

Com a ajuda de (10.72), tem-se então

$$
\int_V \Delta\boldsymbol{T} : \Delta\boldsymbol{E}\,dV = 0\,. \tag{10.75}
$$

4.3.1 Condição de Hill

Por redução ao absurdo, decorre de (10.75) a seguinte condição suficiente para que a solução do problema estático da Teoria Linear da Elasticidade seja única (*condição de Hill*[52])

$$
\int_V \Delta\boldsymbol{T} : \Delta\boldsymbol{E}\,dV > 0\,, \quad \forall\Delta\boldsymbol{E} \neq \boldsymbol{O}\,. \tag{10.76}
$$

No caso de material hiperelástico linear, tem-se para o integrando de (10.76) a seguinte expressão

$$
\Delta\boldsymbol{T} : \Delta\boldsymbol{E} = \Delta\boldsymbol{E} : \mathbb{D}\Delta\boldsymbol{E} = 2\psi(\Delta\boldsymbol{E})\,. \tag{10.77}
$$

[52] Hill, R.: *On constitutive inequalities for simple materials - I*, J. Mech. Phys. Solids, 16, 229-242, 1968

4.3.2 Teorema de Kirchhoff

Uma condição suficiente para que (10.76) seja satisfeita é, conforme (10.77),

$$\psi(\boldsymbol{E}) > 0\,, \quad \forall \boldsymbol{E} \neq \boldsymbol{O}\,. \tag{10.78}$$

No caso de isotropia, de acordo com (10.46), de (10.78) conclui-se que $E > 0$ e $-1 < \nu < \frac{1}{2}$ são uma condição suficiente para que a solução de um problema estático seja única. (10.78) é conhecida na literatura técnica como *teorema de Kirchhoff*[53].

4.4 Método dos Deslocamentos

O Método dos Deslocamentos para a solução de problemas estáticos na Teoria Linear da Elasticidade deixa o campo dos deslocamentos como incógnita básica. Ele consiste em encontrar o campo de deslocamentos $u_i(x_j)$ tal que

$$u_i = \overline{u}_i\,, \quad \text{em } S_u\,, \tag{10.79}$$

de modo que, das deformações

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{em } V\,, \tag{10.80}$$

decorram as tensões

$$T_{ij} = D_{ijkl}E_{kl} + T_{0ij}\,, \quad \text{em } V\,, \tag{10.81}$$

as quais devem satisfazer as seguintes equações

$$\begin{aligned} &T_{ij,j} + b_i = 0, \quad \text{em } V\,, \text{ e} \\ &T_{ij}n_j = \overline{t}_i\,, \quad \text{em } S_t. \end{aligned} \tag{10.82}$$

Introduzindo-se (10.80) em (10.81), lembrando que

$$D_{ijkl}\frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) = D_{ijkl}u_{k,l}\,, \tag{10.83}$$

pois $D_{ijkl} = D_{ijlk}$, e colocando esta em (10.82), pode-se formular o seguinte *Problema de Valor de Contorno* (PVC)

$$\begin{aligned} &\left(D_{ijkl}u_{k,l} + T_{0ij}\right)_{,j} + b_i = 0, \quad \text{em } V\,, \\ &u_i = \overline{u}_i\,, \quad \text{em } S_u\,, \\ &\left(D_{ijkl}u_{k,l} + T_{0ij}\right)n_j = \overline{t}_i\,, \quad \text{em } S_t. \end{aligned} \tag{10.84}$$

No caso de sólidos homogêneos D_{ijkl} não depende do ponto material. Se além disso se supuser que as tensões iniciais são nulas, isto é, $T_{0ij} = 0$, (10.84) reduz-se a

$$\begin{aligned} &D_{ijkl}u_{k,lj} + b_i = 0, \quad \text{em } V\,, \\ &u_i = \overline{u}_i\,, \quad \text{em } S_u\,, \\ &D_{ijkl}u_{k,l}n_j = \overline{t}_i\,, \quad \text{em } S_t. \end{aligned} \tag{10.85}$$

No caso de sólidos isótropos D_{ijkl} é dado por

[53] Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887)

$$D_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\big(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\big)\,, \tag{10.86}$$

e a equação diferencial de (10.85) para sólidos homogêneos torna-se

$$\lambda u_{k,ki} + \mu\big(u_{i,kk} + u_{k,ki}\big) + b_i = 0, \quad \text{em } V\,. \tag{10.87}$$

Lembrando-se que $\nabla^2 u_i = u_{i,kk}$, pode-se escrever (10.87) da seguinte forma

$$\mu\nabla^2 u_i + (\lambda + \mu)\,u_{k,ki} + b_i = 0, \quad \text{em } V\,. \tag{10.88}$$

Observação 10.7: Equações de Lamé-Navier

Lembrando-se que, conforme o Capítulo 3, $\nabla(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) = u_{k,ki}\boldsymbol{e}_i$ e $\nabla^2\boldsymbol{u} = u_{i,kk}\boldsymbol{e}_i$, de (10.88) decorre em notação tensorial

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{u} + (\lambda + \mu)\nabla(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}, \quad \text{em } V\,, \tag{10.89}$$

que são conhecidas como as *equações de Lamé-Navier*[54] da Teoria Linear da Elasticidade para sólidos elásticos isótropos homogêneos. Na ausência de forças volúmicas e com a ajuda de (10.37), (10.31) e (10.25), a equação (10.89) torna-se

$$\nabla^2\boldsymbol{u} + \frac{1}{1-2\nu}\nabla(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}, \quad \text{em } V\,. \tag{10.90}$$

Note-se que (10.90) não depende do módulo de elasticidade E. Logo, as soluções $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ do problema estático $(10.70)_2$ não dependem de E. Este resultado será utilizado no Capítulo 16.

Observação 10.8

Considere-se a equação (10.88) na ausência de forças volúmicas, ou seja,

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu)\,u_{k,ki} = 0\,. \tag{10.91}$$

Extraindo-lhe o divergente, obtém-se

$$\mu u_{i,kki} + (\lambda + \mu)\,u_{k,kii} = (\lambda + 2\mu)\,u_{k,kii} = 0\,. \tag{10.92}$$

Portanto,

$$u_{k,kii} = 0\,. \tag{10.93}$$

Logo a deformação volumétrica $\vartheta = u_{k,k}$ é harmônica, isto é

$$\nabla^2\vartheta = 0\,. \tag{10.94}$$

Observação 10.9

Extraindo o Laplaciano de (10.91), obtém-se

$$\mu u_{i,kkmm} + (\lambda + \mu)\,u_{k,kimm} = 0\,. \tag{10.95}$$

Observando-se que (10.93) anula a segunda parcela de (10.95), conclui-se que

$$\nabla^4 u_i = 0\,. \tag{10.96}$$

Logo, as componentes do vetor deslocamento são biarmônicas.

[54] Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836)

Observação 10.10

(10.94) e (10.96) em notação tensorial são respectivamente

$$\nabla^2 (\,\mathrm{tr}\,(\,\mathrm{div}\boldsymbol{u})) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^4 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}\,. \tag{10.97}$$

4.5 Método dos Esforços

O Método dos Esforços na Teoria Linear da Elasticidade consiste em encontrar o campo de tensões $T_{ij}\,(\,x_k\,)$, tal que

$$\begin{aligned} T_{ij,j} + b_i &= 0, \quad \text{em } V\,, \text{ e} \\ T_{ij} n_j &= \overline{t}_i\,, \quad \text{em } S_t, \end{aligned} \tag{10.98}$$

de modo que as deformações dadas por

$$E_{ij} = C_{ijkl} T_{kl}\,, \tag{10.99}$$

satisfaçam

$$E_{ij,kl} + E_{kl,ij} - E_{ik,jl} - E_{jl,ik} = 0\,, \tag{10.100}$$

e que os deslocamentos $u_i\,(\,x_k\,)$ obtidos pela integração de

$$du_i = \big(\,E_{ij} + W_{ij}\,\big)\,dx_j\,, \tag{10.101}$$

onde W_{ij} é um campo de rotações obtido pela integração de (10.54), ou seja

$$dW_{ij} = \big(\,E_{ki,j} - E_{kj,i}\,\big)\,dx_k\,, \tag{10.102}$$

satisfaçam

$$u_i = \overline{u}_i\,, \quad \text{em } S_u\,. \tag{10.103}$$

Pode-se perceber que é muito mais difícil operar com o método dos esforços, pois diversas integrações de compatibilidade de deslocamentos são necessárias.

Supondo-se sólidos homogêneos e sem deformação inicial, introduzindo-se (10.99) em (10.100), tem-se

$$C_{ijmn} T_{mn,kl} + C_{klmn} T_{mn,ij} - C_{kjmn} T_{mn,il} - C_{ilmn} T_{mn,kj} = 0\,. \tag{10.104}$$

Observação 10.11: Equações de Beltrami-Mitchell

Para sólidos homogêneos e isótropos, de (10.104) e

$$C_{ijkl} = -\frac{\nu}{E}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1+\nu}{E}\big(\,\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\,\big) \tag{10.105}$$

obtém-se

$$\frac{1+\nu}{E}\big(\,T_{ij,kl} + T_{kl,ij} - T_{il,kj} - T_{kj,il}\,\big) - \frac{\nu}{E}\big(\,\delta_{ij}T_{mm,kl} + \delta_{kl}T_{mm,ij} - \delta_{il}T_{mm,kj} - \delta_{kj}T_{mm,il}\,\big) = 0.$$

Fazendo-se $k = l$ na expressão acima e com a ajuda de

$$T_{ij,kk} = \nabla^2 T_{ij}\,, \quad \delta_{kk} = 3\,, \quad T_{ik,kj} = -b_{i,j} \quad \text{e} \quad T_{jk,ki} = -b_{j,i}\,, \tag{10.106}$$

chega-se a

$$\nabla^2 T_{ij} + \frac{1}{1+\nu} T_{mm,ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \nabla^2 T_{mm} + b_{i,j} + b_{j,i} = 0 \,. \tag{10.107}$$

Fazendo-se $i = j$ em (10.107), obtém-se

$$\nabla^2 T_{mm} = -\frac{1+\nu}{1-\nu} b_{m,m} \,. \tag{10.108}$$

Introduzindo-se (10.108) em (10.107) chega-se facilmente nas seguintes equações

$$\nabla^2 T_{ij} + \frac{1}{1+\nu} T_{mm,ij} + \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} b_{m,m} + b_{i,j} + b_{j,i} = 0 \,. \tag{10.109}$$

(10.109) são conhecidas como as *equações de Beltrami-Mitchell*[55] da Teoria Linear da Elasticidade para sólidos elásticos isótropos homogêneos.

Observação 10.12

A equação de Beltrami-Mitchell em notação tensorial torna-se

$$\nabla^2 \boldsymbol{T} + \frac{1}{1+\nu} \nabla(\nabla(\operatorname{tr}(\boldsymbol{T}))) + \frac{\nu}{1+\nu} \operatorname{tr}(\nabla \boldsymbol{b}) \boldsymbol{I} + 2\operatorname{Sym}(\nabla \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{O} \,. \tag{10.110}$$

Observação 10.13

Note-se que (10.109) não depende do módulo de elasticidade E. Logo, a solução $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ do problema estático (10.70) não depende de E.

Observação 10.14

Considere-se a equação (10.109) na ausência de forças volúmicas, ou seja,

$$\nabla^2 T_{ij} + \frac{1}{1+\nu} T_{mm,ij} = 0 \,. \tag{10.111}$$

Fazendo-se $i = j$, obtém-se

$$\nabla^2 T_{ii} + \frac{1}{1+\nu} T_{mm,ii} = \frac{2+\nu}{1+\nu} \nabla^2 T_{ii} = 0 \,. \tag{10.112}$$

Portanto,

$$\nabla^2 T_{ii} = 0 \tag{10.113}$$

e T_{ii} é harmônico. Extraindo o Laplaciano de (10.111), obtém-se

$$T_{ij,kkmm} + \frac{1}{1+\nu} T_{mm,ijkk} = 0 \,. \tag{10.114}$$

Observando-se que (10.113) anula a segunda parcela de (10.114), conclui-se que

$$\nabla^4 T_{ij} = 0 \,, \tag{10.115}$$

ou seja, que as componentes do tensor das tensões são biarmônicas.

Observação 10.15

(10.113) e (10.115) em notação tensorial são

$$\nabla^2 (\operatorname{tr}(\boldsymbol{T})) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^4 \boldsymbol{T} = \boldsymbol{O} \,. \tag{10.116}$$

[55] E. Beltrami, Atti reale Accad. Lincei, Roma, 5, 1, 1892, J.H. Mitchell, proc. London Math. Soc., 31, 100-124, 1900.

4.6 Princípio de Saint-Venant

O *Princípio de Saint-Venant* diz que o campo de tensões distante da região de aplicação do carregamento não depende da real distribuição dos esforços aplicados.

Figura 10.3: Sólido sob Carregamentos Estaticamente Equivalentes

Considerando-se a Figura 10.3, isto significa que, se $\boldsymbol{t}_1$ e $\boldsymbol{t}_2$ são dois carregamentos estaticamente equivalentes aplicados sobre uma pequena área S_ε, isto é, se $\boldsymbol{t}_1$ e $\boldsymbol{t}_2$ satisfazem

$$\int_{S_\varepsilon} \boldsymbol{t}_1 dS = \int_{S_\varepsilon} \boldsymbol{t}_2 dS \quad \text{e} \quad \int_{S_\varepsilon} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t}_1 dS = \int_{S_\varepsilon} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t}_2 dS \,, \tag{10.117}$$

então

$$\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{T}_2 \tag{10.118}$$

em pontos distantes de S_ε.

O que de fato pode-se demonstrar[56] é que se segue: se os esforços externos forem estaticamente equivalentes a um carregamento nulo, isto é, se

$$\int_{S_\varepsilon} \boldsymbol{t} dS = \boldsymbol{o} \quad \text{e} \quad \int_{S_\varepsilon} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t} dS = \boldsymbol{o} \,, \tag{10.119}$$

então

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = O\left(\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^3\right), \tag{10.120}$$

onde r é a distância do ponto à área S_ε. Isto significa que, se os esforços externos forem estaticamente equivalentes a um carregamento nulo, então as tensões em pontos distantes de S_ε são desprezíveis. Esta demonstração requer que o sólido tenha dimensões em qualquer direção bem maiores que ε. Por isso, o Princípio de Saint-Venant pode não valer para sólidos esbeltos, como barras com seção transversal esbelta, placas e cascas. O Princípio de Saint-Venant não é um princípio verdadeiro, mas sim uma propriedade das soluções do problema estático da Teoria Linear da Elasticidade. Ele é muito utilizado para justificar aproximações na Teoria Linear da Elasticidade.

4.7 Notação Técnica

Na solução de problemas da Teoria Linear da Elasticidade e no desenvolvimento de Teorias Estruturais a seguinte notação para componentes dos vetores e tensores é muito utilizada

[56] Veja por exemplo E. Sternberg, *On Saint-Venant's Principle*, Quart. Appl.Math., 11, pp 393-402, 1954.

$$
\begin{aligned}
&x = x_1,\, y = x_2,\, z = x_3,\\
&u = u_1,\, v = u_2,\, w = u_3,\\
&\sigma_x = T_{11},\, \sigma_y = T_{22},\, \sigma_z = T_{33},\, \tau_{xy} = T_{12},\, \tau_{yz} = T_{23},\, \tau_{xz} = T_{13},\\
&\varepsilon_x = E_{11},\, \varepsilon_y = E_{22},\, \varepsilon_z = E_{33},\, \gamma_{xy} = 2E_{12},\, \gamma_{yz} = 2E_{23},\, \gamma_{xz} = 2E_{13},\\
&(\bullet)_x = (\bullet)_1\,,\, (\bullet)_y = (\bullet)_2\,,\, (\bullet)_z = (\bullet)_3 \text{ para os demais vetores.}
\end{aligned}
\tag{10.121}
$$

4.8 Problemas Planos da Teoria Linear da Elasticidade

4.8.1 Estado Plano de Deformações

Um *estado plano de deformações* é definido pelas seguintes hipóteses cinemáticas em notação técnica.

$$
\begin{aligned}
&u = u(x,y),\\
&v = v(x,y) \quad \text{e}\\
&w = 0\,.
\end{aligned}
\tag{10.122}
$$

Este estado ocorre em corpos muito longos na direção z com forma e carregamento homogêneo nesta direção, conforme a Figura 10.4. Como conseqüência de (10.122), tem-se

$$
\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0\,. \tag{10.123}
$$

Para materiais elásticos lineares isótropos sem tensões iniciais, em estado plano de deformações, tem-se da Lei de Hooke generalizada, na notação técnica,

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\big[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\big]\,,\\
&\sigma_y = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\big[\nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y\big] \quad \text{e}\\
&\tau_{xy} = G\gamma_{xy}\,.
\end{aligned}
\tag{10.124}
$$

Figura 10.4: Estado plano de deformações

Além de (10.124) tem-se também

$$
\sigma_z = -\frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\big(\varepsilon_x + \varepsilon_y\big) = -\nu\big(\sigma_x + \sigma_y\big)\,. \tag{10.125}
$$

De forma inversa, tem-se

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y\right], \\
\varepsilon_y &= \frac{1+\nu}{E}\left[-\nu\sigma_x + (1-\nu)\sigma_y\right] \quad \text{e} \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \,.
\end{aligned}
\tag{10.126}
$$

As equações locais de equilíbrio em notação técnica são dadas por

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + b_x &= 0 \quad \text{e} \\
\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + b_y &= 0 \,.
\end{aligned}
\tag{10.127}
$$

A terceira equação de equilíbrio é identicamente satisfeita. Na ausência de forças volúmicas, tem-se

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \quad \text{e} \\
\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} &= 0 \,.
\end{aligned}
\tag{10.128}
$$

Derivando-se a primeira em relação a x e a segunda em relação a y e somando, tem-se

$$
\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} = 0 \,. \tag{10.129}
$$

A única equação de compatibilidade não identicamente satisfeita é

$$
\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \,. \tag{10.130}
$$

Introduzindo-se (10.126) em (10.130), chega-se em

$$
\frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\nabla^2\left(\sigma_x + \sigma_y\right) - \frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right] = \frac{1+\nu}{E}2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} \,, \tag{10.131}
$$

onde

$$
\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{10.132}
$$

é o operador diferencial Laplaciano em notação técnica para problemas planos. Na ausência de forças volúmicas, com a ajuda de (10.132), de (10.131) decorre

$$
\nabla^2\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0 \,. \tag{10.133}
$$

(10.133) é a equação de Beltrami-Mitchell para estados planos de deformação na ausência de forças volúmicas. O mesmo resultado poderia ser obtido a partir de (10.113) e (10.125).

4.8.2 Estado Plano de tensões

O estado plano de tensões é definido por

$$
\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \,. \tag{10.134}
$$

Ele realiza-se aproximadamente em chapas esbeltas com carregamento em seu próprio plano (Figura 10.5).

Figura 10.5: Estado plano de tensões

Para materiais elásticos lineares isótropos sem tensões iniciais, em estado plano de tensões, tem-se da Lei de Hooke generalizada, na notação técnica,

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\left[\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right], \\ \sigma_y &= \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\left[\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y\right] \quad \text{e} \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}\ . \end{aligned} \tag{10.135}$$

De forma inversa, tem-se

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\sigma_y\right], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[-\nu\sigma_x + \sigma_y\right] \quad \text{e} \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}\ . \end{aligned} \tag{10.136}$$

Além disso, tem-se

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right). \tag{10.137}$$

As equações locais de equilíbrio em notação técnica são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + b_x &= 0 \quad \text{e} \\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + b_y &= 0\ . \end{aligned} \tag{10.138}$$

A terceira equação de equilíbrio é identicamente satisfeita. Na ausência de forças volúmicas, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \quad \text{e} \\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} &= 0\ . \end{aligned} \tag{10.139}$$

Introduzindo-se (10.136) na equação de compatibilidade abaixo

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}\ . \tag{10.140}$$

chega-se, de forma análoga a empregada em (10.133), a

$$\nabla^2 \left(\sigma_x + \sigma_y \right) = 0 \,, \tag{10.141}$$

que é uma das equações de Beltrami-Mitchell para estados planos de tensão na ausência de forças volúmicas.

Observação 10.16

No estado plano de tensões apenas a equação de compatibilidade (10.140) é satisfeita. As cinco demais equações não são identicamente satisfeitas como no caso do estado plano de deformações. Isto significa que o estado plano de tensões não é rigorosamente compatível. Pode-se mostrar que, para chapas com espessura tendendo a zero, o estado plano de tensões é assintoticamente compatível.

4.9 Função de Airy

Uma função $A(x,y)$, tal que

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \,, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad \text{e} \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} \,, \tag{10.142}$$

é denominada *função de Airy*[57]. $A(x,y)$ satisfaz automaticamente as equações locais de equilíbrio (10.139) dos estados planos de deformação e tensão na ausência de forças volúmicas. Introduzindo-se $A(x,y)$ em (10.141), tem-se

$$\nabla^4 A = 0 \,. \tag{10.143}$$

Isto significa que $A(x,y)$ precisa ser biarmônica.

Exemplo 10.2

A função

$$A = -3c^2 axy + axy^3 \,, \tag{10.144}$$

onde a e c são constantes, é biarmônica. De (10.142) tem-se

$$\sigma_x = 6ax \,, \quad \sigma_y = 0 \quad \text{e} \quad \tau_{xy} = 3a\left(c^2 - y^2\right). \tag{10.145}$$

Considere-se, agora, a região retangular no plano (x,y) descrita na figura 8.6 abaixo.

Figura 10.6: legenda da figura

[57] George Airy (1801-1892)

Na seção $x = 0$ tem-se

$$\sigma_x = 0\,, \quad \sigma_y = 0 \quad \text{e} \quad \tau_{xy} = 3a\left(c^2 - y^2\right). \tag{10.146}$$

Na seção $x = \ell$ tem-se

$$\sigma_x = 6a\ell\,, \quad \sigma_y = 0 \quad \text{e} \quad \tau_{xy} = 3a\left(c^2 - y^2\right). \tag{10.147}$$

O problema resolvido, de forma inversa na terminologia de Saint-Venant, é o de uma chapa engastada em $x = \ell$ submetida na extremidade $x = 0$ a uma força vertical P dada por

$$P = \int_{-c}^{c} \tau_{xy} t dy = 4tac^3\,, \tag{10.148}$$

onde t é a espessura da chapa. Assim tem-se que

$$a = \frac{P}{4tc^3} \tag{10.149}$$

e, portanto,

$$\sigma_x = 6axy = \frac{M}{I} y\,, \tag{10.150}$$

onde

$$M = Px \quad \text{e} \quad I = \frac{t(2c)^3}{12}\,, \tag{10.151}$$

que é a solução da Resistência dos Materiais.

4.10 Teoria da Torção Uniforme

Considere-se uma barra reta de seção transversal A constante com o eixo ao logo do eixo z, submetida ao torque T^* nas extremidades $z = 0$ e $z = \ell$, conforme a figura 8.7 abaixo. A superfície lateral da barra não é submetida a forças superficiais.

4.10.1 Introdução

Quando a seção transversal é circular, com raio R, por simetria, as seções devem permanecer planas após a deformação e as deformações num ponto de uma seção são apenas de distorção circunferencial dadas por

$$\gamma = r\frac{d\theta}{dz} = r\theta'\,,$$

onde r é a distância de um ponto da seção ao eixo da barra (z) e θ é a rotação da seção. $\theta' = d\theta / dz$ é denominada rotação específica. As tensões de cisalhamento circunferenciais são dadas por

$$\tau = G\gamma = Gr\theta'\,.$$

O momento de torção é a resultante das tensões de cisalhamento, sendo dado por

$$T = \int_A r\tau dA = GI_0\theta'\,,$$

onde

$$I_0 = \int_0^{2\pi}\int_0^R r^3 dr d\theta = \frac{\pi}{2}R^4$$

é o momento polar de inércia da seção circular. Então, tem-se

$$\theta' = \frac{T}{GI_0} .$$

Figura 10.7: Barra sob torção

Como, por equilíbrio, $T = T^*$ em todas as seções, θ' é constante ao longo da barra e por isso a torção é denominada *torção uniforme*. Note-se, também, que

$$\tau = \frac{T}{I_0} r .$$

4.10.2 Solução de Saint-Venant

Ao resolver este problema estático para barras prismáticas de seção não-circular, Saint-Venant, baseado em observações experimentais, supôs inicialmente que as seções empenam na direção do eixo mas que suas projeções no plano (x, y) giram como figuras rígidas. Saint-Venant observou também que o empenamento era semelhante em todas as seções e que sua intensidade era proporcional à rotação específica. Assim o campo de deslocamentos inicialmente suposto por Saint-Venant para uma barra prismática pode ser expresso por

$$u = -\theta' yz , \quad v = \theta' xz \quad \text{e} \quad w = \theta' \phi(x, y) , \tag{10.152}$$

onde $\phi(x, y)$ é chamada de *função de empenamento de Saint-Venant* e θ' é suposto constante. De (10.152) tem-se as seguintes deformações

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0 , \\ \gamma_{xz} &= \theta' \left(\phi_{,x} - y \right) \quad \text{e} \\ \gamma_{yz} &= \theta' \left(\phi_{,y} + x \right) . \end{aligned} \tag{10.153}$$

As tensões para um material elástico linear isótropo são

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 , \\ \tau_{xz} &= G\theta' \left(\phi_{,x} - y \right) \quad \text{e} \\ \tau_{yz} &= G\theta' \left(\phi_{,y} + x \right) . \end{aligned} \tag{10.154}$$

As duas primeiras equações locais de equilíbrio, na ausência de forças volúmicas, são identicamente satisfeitas por (10.154). A terceira, juntamente com as tensões dadas por (10.154), fornece

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{em } A . \tag{10.155}$$

Logo $\phi(x, y)$ é harmônica em A.

As condições de contorno na superfície lateral da barra reduzem-se a

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = 0 \quad \text{em } \Gamma \,, \tag{10.156}$$

onde Γ o contorno da seção transversal e n_x e n_y são as componentes do vetor normal à superfície lateral da barra. Introduzindo-se (10.154) em (10.156), tem-se

$$\big(\phi_{,x} - y\big) n_x + \big(\phi_{,y} + x\big) n_y = 0 \quad \text{em } \Gamma \,. \tag{10.157}$$

(10.155) e (10.157) constituem um *problema de valor de contorno* (PVC). Este PVC tem solução única a menos de uma constante. Esta constante livre pode ser eliminada, por exemplo, com a imposição da seguinte condição

$$\int_A \phi dA = 0 \,. \tag{10.158}$$

Observação 10.17: Centro de rotação

Deve-se aqui salientar que o PVC (10.155) e (10.157), com a condição (10.158), tem solução única, mas ela depende da posição do eixo da barra, isto é, da posição da origem na seção transversal. A origem será denominada aqui de *centro de rotação*[58], pois é em torno dela que se supõem que todas as seções da barra giram. Quando se muda o eixo da barra, ou seja, quando se muda o centro de rotação, o PVC (10.155) e (10.157), com a condição (10.158), se altera. Sejam $\overline{x}$ e $\overline{y}$ as coordenadas de um novo centro de rotação. A nova função de empenamento passa a ser solução do seguinte PVC

$$\nabla^2 \overline{\phi} = 0 \quad \text{em } A \,, \quad \big[\overline{\phi}_{,x} - (y - \overline{y})\big] n_x + \big[\overline{\phi}_{,y} + (x - \overline{x})\big] n_y = 0 \quad \text{em } \Gamma \,. \tag{1.159}$$

É imediato que $\overline{\phi}$ é dada por

$$\overline{\phi} = \phi - \overline{y} x + \overline{x} y - c \,, \tag{1.160}$$

onde

$$c = A\big(\overline{x} y_{\mathrm{g}} - \overline{y} x_{\mathrm{g}}\big) \,. \tag{1.161}$$

Em (1.161), x_{g} e y_{g} são as coordenadas do *centro de gravidade* da seção transversal, dadas por

$$x_{\mathrm{g}} = \frac{1}{A} \int_A x dA \quad \text{e} \quad y_{\mathrm{g}} = \frac{1}{A} \int_A y dA \,. \tag{1.162}$$

Observação 10.18: Centro de cisalhamento

O ponto da seção transversal $C = (\overline{x}, \overline{y})$ para o qual

$$\int_A (x - \overline{x}) \overline{\phi} dA = \int_A (y - \overline{y}) \overline{\phi} dA = 0 \tag{1.163}$$

são válidas, é denominado *centro de cisalhamento*[59] da seção transversal e sua posição é uma propriedade geométrica como a posição do centro de gravidade. De (1.160), (1.161) e (1.163), obtém-se

[58] Às vezes o centro de rotação é chamado de centro de torção.

[59] Às vezes o centro de cisalhamento também é chamado de centro de torção. Para não aumentar ainda mais a confusão, optou-se aqui por não utilizar a terminologia centro de torção.

$$\overline{x} = \frac{1}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}\Big[I_{yy}\Big(\int_A y\phi dA\Big) - I_{xy}\Big(\int_A x\phi dA\Big)\Big] \quad \text{e}$$
$$\overline{y} = \frac{1}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}\Big[I_{xy}\Big(\int_A y\phi dA\Big) - I_{xx}\Big(\int_A x\phi dA\Big)\Big], \tag{1.164}$$

onde

$$I_{xx} = \int_A \big(y - y_{\text{g}}\big)^2 dA\,, \quad I_{yy} = \int_A \big(x - x_g\big)^2 dA \quad \text{e}$$
$$I_{xy} = \int_A \big(x - x_g\big)\big(y - y_{\text{g}}\big) dA \tag{1.165}$$

são propriedades geométricas da seção transversal em relação aos eixos que passam pelo centro de gravidade. I_{xx} e I_{yy} são conhecidos como os *momentos de inércia* da seção transversal em relação aos eixos que passam pelo centro de gravidade ou simplesmente *momentos centrais de inércia*. Quando o *produto de inércia* I_{xy} é nulo, os eixos que passam pelo centro de gravidade são chamados de *principais* e I_{xx} e I_{yy} são conhecidos como os *momentos principais de inércia* O centro de cisalhamento não coincide necessariamente com o centro de gravidade da seção transversal. Em seções simétricas em relação aos eixos x e y, o centro de cisalhamento coincide com o centro de gravidade e com a origem dos eixos.

Observação 10.19: Condições de contorno

As condições de contorno nas extremidades da barra nas extremidades $z = 0$ e $z = \ell$ são

$$\int_A \tau_{xz} dA = 0\,, \quad \int_A \tau_{yz} dA = 0 \quad \text{e} \quad \int_A \big(x\tau_{yz} - y\tau_{xz}\big) dA = T\,. \tag{10.166}$$

(10.166) indicam que as tensões nas extremidades têm como resultante apenas o momento torçor T. As duas primeiras equações de (10.166) são automaticamente satisfeitas se a função ϕ satisfizer (10.157). Para se mostrar isto, considere-se apenas a primeira equação de (10.166), já que a segunda pode ser tratada de forma análoga. Assim

$$\int_A \tau_{xz} dA = G\theta' \int_A \big(\phi_{,x} - y\big) dA =$$
$$= G\theta' \int_A \Big[\frac{\partial}{\partial x}\big(x\big(\phi_{,x} - y\big)\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(x\big(\phi_{,y} + x\big)\big)\Big] dA\,. \tag{10.167}$$

pois ϕ satisfaz (10.155). Aplicando-se o teorema do divergente em (10.167), tem-se

$$\int_A \tau_{xz} dA = G\theta' \int_\Gamma x\big[\big(\phi_{,x} - y\big)n_x + \big(\phi_{,y} + x\big)n_y\big] d\Gamma = 0\,, \tag{10.168}$$

que é nula pois o termo entre colchetes satisfaz (10.157). Uma conseqüência desta demonstração é que ϕ tem as seguintes propriedades

$$\int_A \phi_{,x} dA = -\int_A y dA \quad \text{e} \quad \int_A \phi_{,y} dA = \int_A x dA\,. \tag{1.169}$$

Observação 10.20: Momento de inércia à torção

Com (10.154), a terceira equação de (10.166) fornece

$$T = GI_T\theta'\,, \tag{10.170}$$

onde

$$I_T = \int_A \big[x^2 + y^2 + x\phi_{,y} - y\phi_{,x}\big] dA \tag{10.171}$$

é o *momento de inércia à torção* de Saint-Venant. Note-se que, com a ajuda de (10.157), (10.155), do *momento polar de inércia* da seção transversal,

$$I_0 = \int_A \left(x^2 + y^2 \right) dA \,, \tag{10.172}$$

e do Teorema do Divergente, pode-se concluir que

$$\begin{aligned} I_T &= I_0 + \int_A \left[x\phi_{,y} - y\phi_{,x} \right] dA = I_0 - \int_A \left[(y\phi)_{,x} - (x\phi)_{,y} \right] dA = \\ &= I_0 - \int_\Gamma \phi \left(y n_x - x n_y \right) d\Gamma = I_0 - \int_\Gamma \phi \left(\phi_{,x} n_x + \phi_{,y} n_y \right) d\Gamma = \\ &= I_0 - \int_A \left[\left(\phi\phi_{,x} \right)_{,x} + \left(\phi\phi_{,y} \right)_{,y} \right] dA \,. \end{aligned} \tag{10.173}$$

Logo

$$I_T = I_0 - \int_A \left[\left(\phi_{,x} \right)^2 + \left(\phi_{,y} \right)^2 \right] dA \,. \tag{1.174}$$

Portanto, $I_T \leq I_0$ por causa do empenamento.

Propriedade 10.2: Invariância do momento de inércia a torção

Sejam $\overline{x}$ e $\overline{y}$ as coordenadas de um novo centro de rotação. O novo momento de inércia a torção é dado por

$$\overline{I}_T = \int_A \left[(x - \overline{x})^2 + (y - \overline{y})^2 + (x - \overline{x})\overline{\phi}_{,y} - (y - \overline{y})\overline{\phi}_{,x} \right] dA \,. \tag{10.175}$$

Com a ajuda de (1.160) e (1.169), conclui-se que

$$\begin{aligned} \overline{I}_T &= \int_A \left[(x - \overline{x})^2 + (y - \overline{y})^2 + (x - \overline{x})\left(\phi_{,y} + \overline{x} \right) - (y - \overline{y})\left(\phi_{,x} - \overline{y} \right) \right] dA = \\ &= I_T - \overline{x} \int_A \left(\phi_{,y} + x \right) dA + \overline{y} \int_A \left(\phi_{,x} - y \right) dA = \\ &= I_T \,. \end{aligned} \tag{10.176}$$

Logo o momento de inércia a torção não depende do centro de rotação.

Observação 10.21:

Quando o eixo z está colocado ao longo dos centros de cisalhamento das seções transversais, tem-se, portanto, que

$$\int_A \phi dA = \int_A x\phi dA = \int_A y\phi dA = 0 \tag{1.177}$$

são válidas.

4.10.3 Solução de Prandtl

Prandtl[60], dezenas de anos depois de Saint-Venant, resolveu o problema da torção uniforme supondo inicialmente que

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \tag{10.178}$$

e introduzindo a função $\varphi(x, y)$, denominada *função de Prandtl*, tal que

$$\tau_{xz} = \varphi_{,y} \quad \text{e} \quad \tau_{yz} = -\varphi_{,x} \,. \tag{10.179}$$

Desta forma as equações locais de equilíbrio ficam automaticamente satisfeitas.

[60] Ludwig Prandtl (1875-1953)

Das seis equações de Beltrami-Mitchell, quatro são automaticamente satisfeitas por causa de (10.178), restando apenas duas a serem satisfeitas, que, em notação técnica, são

$$\nabla^2\tau_{xz} = \nabla^2\tau_{yz} = 0 \,. \tag{10.180}$$

Introduzindo (10.179) em (10.180), tem-se

$$\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\varphi = -\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\varphi = 0 \,. \tag{10.181}$$

Logo

$$\nabla^2\varphi = k \quad \text{em } A \,, \tag{10.182}$$

onde k é uma constante. Para determiná-la basta verificar que de (10.154) e (10.179) tem-se

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x} = \nabla^2\varphi = 2G\theta' \,. \tag{10.183}$$

Portanto

$$k = 2G\theta' \,. \tag{10.184}$$

Da condição de contorno (10.156) com (10.179) tem-se

$$\varphi_{,y}n_x - \varphi_{,x}n_y = 0 \quad \text{em } \Gamma \,. \tag{10.185}$$

Mas,

$$n_x = \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{e} \quad n_y = -\frac{\partial x}{\partial s} \quad \text{em } \Gamma \,, \tag{10.186}$$

se Γ for orientado no sentido anti-horário. Assim, de (10.185) com (10.186), vem

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = 0 \quad \text{em } \Gamma \,. \tag{10.187}$$

Para uma seção simplesmente conexa pode-se, portanto, adotar, sem perda da generalidade, que

$$\varphi = 0 \quad \text{em } \Gamma \,. \tag{10.188}$$

Com a ajuda do teorema do divergente e de (8.151) tem-se

$$\begin{aligned} &\int_A \tau_{xz}dA = \int_A \varphi_{,y}dA = \int_\Gamma \varphi n_y d\Gamma = 0 \quad \text{e} \\ &\int_A \tau_{yz}dA = -\int_A \varphi_{,x}dA = -\int_\Gamma \varphi n_x d\Gamma = 0 \,. \end{aligned} \tag{10.189}$$

Logo as duas primeiras condições de contorno de (10.166) são satisfeitas, restando apenas a terceira, que, com (10.179), fornece

$$\begin{aligned} T &= -\int_A [x\varphi_{,x} + y\varphi_{,y}]dA = \\ &= -\int_A \left[\frac{\partial}{\partial x}(x\varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(y\varphi) - 2\varphi\right]dA = \\ &= -\int_\Gamma [xn_x + yn_y]\varphi d\Gamma + 2\int_A \varphi dA = \\ &= 2\int_A \varphi dA \,. \end{aligned} \tag{10.190}$$

5 O Problema Dinâmico da Teoria Linear da Elasticidade

5.1 Equações do Problema Dinâmico da Teoria Linear da Elasticidade

Formular-se-á agora o Problema Dinâmico da Teoria Linear da Elasticidade. Seja um sólido ocupando a região V, limitada pela superfície externa S, do espaço afim euclidiano $\mathbb{E}_3$. Tem-se as seguintes *equações locais do movimento* em V

$$\operatorname{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \rho\ddot{\boldsymbol{u}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T \,, \tag{10.191}$$

e as seguintes *equações cinemáticas* em V

$$\boldsymbol{E} = \mathbb{I}_S\boldsymbol{L} \,, \tag{10.192}$$

onde

$$\boldsymbol{L} = \nabla\boldsymbol{u} \,. \tag{10.193}$$

Tem-se as seguintes *equações constitutivas* em V

$$\boldsymbol{T} = \mathbb{D}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}_0 \,, \tag{10.194}$$

onde $\mathbb{D}$ é um tensor de quarta ordem, denominado tensor dos módulos de rigidez elástica, e $\boldsymbol{T}_0$ é o tensor das tensões iniciais.

No caso particular de material isótropo sem tensões iniciais, tem-se

$$\boldsymbol{T} = \mathbb{D}\boldsymbol{E}, \tag{10.195}$$

onde

$$\mathbb{D} = \lambda\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} + 2\mu\mathbb{I} \,. \tag{10.196}$$

Em um Problema Dinâmico são conhecidas ou impostas as forças volúmicas $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(t)$ e as seguintes *condições de contorno*

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}}(t), \quad \text{em } S_u \,, \tag{10.197}$$

e

$$\boldsymbol{t} = \bar{\boldsymbol{t}}(t), \quad \text{em } S_t \,, \tag{10.198}$$

onde S_u e S_t são as partes da superfície externa onde as condições de contorno são impostas. Veja que $S = S_u \cup S_t$ e $S_u \cap S_t = \varnothing$. Em alguns problemas, impõe-se em pontos de S uma condição mista, na qual algumas componentes de $\boldsymbol{u}$ em uma base ortonormal local são impostas enquanto que, na mesma base, outras componentes de $\boldsymbol{t}$ são impostas. Neste caso, freqüentemente, um dos vetores da base local é normal a S. Daqui em diante considera-se apenas condições de contorno dadas por (10.197) e (10.198). A consideração de condições mistas não é difícil e não perturba os resultados obtidos a seguir. Além das condições de contorno acima, num Problema Dinâmico as seguintes *condições iniciais* são supostas conhecidas

$$\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}_0 \quad \text{e} \quad \dot{\boldsymbol{u}}(t_0) = \dot{\boldsymbol{u}}_0 \,. \tag{10.199}$$

Chama-se de *solução* do Problema Dinâmico da Teoria Linear da Elasticidade ao conjunto de campos $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},t)\}$ que satisfaçam, ao longo do tempo, as equações e condições de contorno e condições iniciais abaixo

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{L} = \nabla \boldsymbol{u} \quad \text{em } V, \\
&\boldsymbol{E} = \mathbb{I}_S \boldsymbol{L} \quad \text{em } V, \\
&\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \quad \text{em } V, \\
&\operatorname{div} \boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \rho \ddot{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } V, \\
&\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T \quad \text{em } V, \\
&\boldsymbol{T} = \mathbb{D}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}_0 \quad \text{em } V, \\
&\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u, \\
&\boldsymbol{t} = \overline{\boldsymbol{t}} \quad \text{em } S_t, \\
&\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}_0 \quad \text{e} \quad \dot{\boldsymbol{u}}(t_0) = \dot{\boldsymbol{u}}_0 \quad \text{em } V.
\end{aligned}
\tag{10.200}
$$

5.2 Superposição dos Efeitos

Note-se que as equações de (10.200) são lineares em $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ e $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},t)$. Se $\mathcal{S}_1 = \{\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{x},t)\}$ for uma solução de um problema dinâmico com condições iniciais $\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}_1^*$ e $\dot{\boldsymbol{u}}(t_0) = \dot{\boldsymbol{u}}_1^*$, com $\boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{b}_1(t)$ em V, $\boldsymbol{u}(t) = \overline{\boldsymbol{u}}_1(t)$ em S_u e $\boldsymbol{t}(t) = \overline{\boldsymbol{t}}_1(t)$ em S_t e se $\mathcal{S}_2 = \{\boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{T}_2(\boldsymbol{x},t)\}$ for uma solução de um problema dinâmico com condições iniciais $\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}_2^*$ e $\dot{\boldsymbol{u}}(t_0) = \dot{\boldsymbol{u}}_2^*$, com $\boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{b}_2(t)$ em V, $\boldsymbol{u}(t) = \overline{\boldsymbol{u}}_2(t)$ em S_u e $\boldsymbol{t}(t) = \overline{\boldsymbol{t}}_2(t)$ em S_t, então $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 = \{\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{T}_2(\boldsymbol{x},t)\}$ é uma solução do problema dinâmico com condições iniciais $\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}_1^* + \boldsymbol{u}_2^*$ e $\dot{\boldsymbol{u}}(t_0) = \dot{\boldsymbol{u}}_1^* + \dot{\boldsymbol{u}}_2^*$, com $\boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{b}_1(t) + \boldsymbol{b}_2(t)$ em V, $\boldsymbol{u}(t) = \overline{\boldsymbol{u}}_1(t) + \overline{\boldsymbol{u}}_2(t)$ em S_u e $\boldsymbol{t}(t) = \overline{\boldsymbol{t}}_1(t) + \overline{\boldsymbol{t}}_2(t)$ em S_t. Esta propriedade chama-se *superposição dos efeitos*.

Propriedade 10.3

Uma aplicação da superposição dos efeitos é que todo problema dinâmico descrito por (10.200) pode ser decomposto nos dois problemas abaixo,

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{L} = \nabla \boldsymbol{u} \quad \text{em } V, \\
&\boldsymbol{E} = \mathbb{I}_S \boldsymbol{L} \quad \text{em } V, \\
&\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \quad \text{em } V, \\
&\operatorname{div} \boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \rho \ddot{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } V, \\
&\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T \quad \text{em } V, \\
&\boldsymbol{T} = \mathbb{D}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}_0 \quad \text{em } V, \\
&\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } S_u, \\
&\boldsymbol{t} = \overline{\boldsymbol{t}} \quad \text{em } S_t, \\
&\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V, \quad \text{e} \\
&\dot{\boldsymbol{u}}(t_0) = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V,
\end{aligned}
\qquad \text{e} \qquad
\begin{aligned}
&\boldsymbol{L} = \nabla \boldsymbol{u} \quad \text{em } V, \\
&\boldsymbol{E} = \mathbb{I}_S \boldsymbol{L} \quad \text{em } V, \\
&\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \quad \text{em } V, \\
&\operatorname{div} \boldsymbol{T} = \rho \ddot{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } V, \\
&\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T \quad \text{em } V, \\
&\boldsymbol{T} = \mathbb{D}\boldsymbol{E} \quad \text{em } V, \\
&\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u, \\
&\boldsymbol{t} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } S_t, \\
&\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}_0 \quad \text{em } V, \quad \text{e} \\
&\dot{\boldsymbol{u}}(t_0) = \dot{\boldsymbol{u}}_0 \quad \text{em } V.
\end{aligned}
\tag{10.201}
$$

Os problemas de (10.201), uma vez resolvidos, podem ser superpostos. $(10.201)_1$ é um problema de forças impostas e $(10.201)_2$ é um problema de deslocamentos impostos.

5.3 Método dos Deslocamentos

O *Método dos Deslocamentos* para a solução de problemas dinâmicos na Teoria Linear da Elasticidade consiste em encontrar o campo de deslocamentos $u_i\left(x_j, t\right)$ tal que, ao longo do tempo,

$$u_i = \overline{u}_i\,, \quad \text{em } S_u\ , \tag{10.202}$$

de modo que, das deformações

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \quad \text{em } V\ , \tag{10.203}$$

decorram as tensões

$$T_{ij} = D_{ijkl}E_{kl} + T_{0ij}\,, \quad \text{em } V\ , \tag{10.204}$$

as quais devem satisfazer as seguintes equações

$$\begin{aligned} &T_{ij,j} + b_i = \rho\ddot{u}_i\,, \quad \text{em } V\text{ , e} \\ &T_{ij}n_j = \overline{t}_i\,, \quad \text{em } S_t. \end{aligned} \tag{10.205}$$

Lembrando-se que

$$D_{ijkl}\frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right) = D_{ijkl}u_{k,l}\ , \tag{10.206}$$

pois $D_{ijkl} = D_{ijlk}$, e colocando esta em (10.204), pode-se formular o seguinte *Problema de Valor Inicial* (PVI)

$$\begin{aligned} &\left(D_{ijkl}u_{k,l} + T_{0ij}\right)_{,j} + b_i = \rho\ddot{u}_i\,, \quad \text{em } V\ , \\ &u_i = \overline{u}_i\,, \quad \text{em } S_u\ , \\ &\left(D_{ijkl}u_{k,l} + T_{0ij}\right)n_j = \overline{t}_i\,, \quad \text{em } S_t, \\ &u_i\left(t_0\right) = u_{0i}\,, \quad \text{em } V\ , \\ &\dot{u}_i\left(t_0\right) = \dot{u}_{0i}\,, \quad \text{em } V\ . \end{aligned} \tag{10.207}$$

No caso de sólidos homogêneos D_{ijkl} não depende do ponto material. Se além disso se supuser que as tensões iniciais são nulas, isto é, $T_{0ij} = 0$, (10.207) reduz-se a

$$\begin{aligned} &D_{ijkl}u_{k,lj} + b_i = \rho\ddot{u}_i\,, \quad \text{em } V\ , \\ &u_i = \overline{u}_i\,, \quad \text{em } S_u\ , \\ &D_{ijkl}u_{k,l}n_j = \overline{t}_i\,, \quad \text{em } S_t, \\ &u_i\left(t_0\right) = u_{0i}\,, \quad \text{em } V\ , \\ &\dot{u}_i\left(t_0\right) = \dot{u}_{0i}\,, \quad \text{em } V\ . \end{aligned} \tag{10.208}$$

No caso de sólidos homogêneos e isótropos D_{ijkl} é dado por (10.86) e a equação diferencial de (10.208) torna-se

$$\lambda u_{k,ki} + \mu\left(u_{i,kk} + u_{k,ki}\right) + b_i = \rho\ddot{u}_i\,, \quad \text{em } V\ . \tag{10.209}$$

Lembrando-se que $\nabla^2 u_i = u_{i,kk}$, pode-se escrever (10.209) da seguinte forma

$$\mu\nabla^2 u_i + (\lambda+\mu)\, u_{k,ki} + b_i = \rho\ddot{u}_i\,, \quad \text{em } V\,. \tag{10.210}$$

Lembrando-se que, conforme o Capítulo 3, $\nabla(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) = u_{k,ki}\boldsymbol{e}_i$ e $\nabla^2\boldsymbol{u} = u_{i,kk}\boldsymbol{e}_i$, de (10.210) decorre em notação tensorial

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{b} = \rho\ddot{\boldsymbol{u}}\,, \quad \text{em } V\,, \tag{10.211}$$

que são conhecidas como as *equações de Lamé-Navier* da Teoria Linear da Elasticidade para sólidos elásticos isótropos homogêneos.

5.4 Ondas Elásticas

Na ausência de forças de volume, de (10.210), tem-se

$$\mu\nabla^2 u_i + (\lambda+\mu)\, u_{k,ki} = \rho\ddot{u}_i\,, \quad \text{em } V\,. \tag{10.212}$$

É fácil verificar que o movimento descrito por

$$u_1 = A_l \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\ell_l}(x_1 \pm c_l t)\right), \quad u_2 = u_3 = 0 \tag{10.213}$$

satisfaz (10.212) se

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}\,. \tag{10.214}$$

(10.213) corresponde ao movimento de ondas longitudinais ao longo do eixo x_1 com comprimento ℓ_l, amplitude A_l e velocidade c_l. É fácil verificar também que o movimento descrito por

$$u_2 = A_t \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\ell_t}(x_1 \pm c_t t)\right), \quad u_1 = u_3 = 0 \tag{10.215}$$

satisfaz (10.212) se

$$c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}\,. \tag{10.216}$$

(10.215) corresponde ao movimento de ondas transversais ao longo do eixo x_1 com comprimento ℓ_t, amplitude A_t e velocidade c_t. Note-se que

$$c_t \le c_l\,. \tag{10.217}$$

Observação 10.22

As ondas acima não são as únicas possíveis em meios elásticos. Na superfície de sólidos é possível encontrar-se outras soluções que caracterizam as chamadas *ondas de Rayleigh*.

5.5 Vibrações Livres

Definição 10.2: Problema de vibrações livres

Um problema dinâmico sem esforços externos, como o caracterizado pelas equações $(10.201)_2$, com $\bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{o}$ em S_u, é denominado *problema de vibrações livres*.

Definição 10.3: Freqüência e modo natural de vibração

Se

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = (A\text{sen}\omega t + B\cos\omega t)\,\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}), \tag{1.218}$$

onde A, B e $\omega > 0$ são constantes, for uma solução do problema de vibrações livres, então ω é denominada *freqüência circular natural de vibração*,

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \tag{1.219}$$

é denominada *freqüência natural de vibração* e o campo $\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$ é denominado *modo natural de vibração*. O *período natural de vibração* é dado por

$$T = f^{-1} = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{1.220}$$

Propriedade 10.4

De (1.219) tem-se que as velocidades e acelerações são dadas por

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t) = \omega(A\cos\omega t - B\text{sen}\omega t)\,\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) \quad \text{e} \\ &\ddot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t) = -\omega^2(A\text{sen}\omega t + B\cos\omega t)\,\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = -\omega^2\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t). \end{aligned} \tag{1.221}$$

Portanto, o modo natural de vibração $\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$ é solução do seguinte problema homogêneo

$$\begin{aligned} &\hat{\boldsymbol{E}} = \mathbb{I}_S(\nabla\hat{\boldsymbol{u}}), \quad \text{em } V, \\ &\hat{\boldsymbol{T}} = \mathbb{D}\hat{\boldsymbol{E}}, \quad \text{em } V, \\ &\text{div}\,\hat{\boldsymbol{T}} + \rho\omega^2\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{o}, \quad \text{em } V, \\ &\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{o}, \quad \text{em } S_u \quad \text{e} \\ &\hat{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{o}, \quad \text{em } S_t. \end{aligned} \tag{1.222}$$

Definição 10.4: Autoproblema de vibrações livres

(1.222) é denominado *autoproblema de vibrações livres*. Ele possui, em geral, infinitos pares de soluções $\{\omega_i, \hat{\boldsymbol{u}}_i(\boldsymbol{x})\}$, $i = 1,2,\ldots$, onde $\omega_i = 2\pi f_i$ é uma freqüência circular natural de vibração, f_i é uma freqüência natural de vibração e $\hat{\boldsymbol{u}}_i(\boldsymbol{x})$ é um modo natural de vibração.

Exercícios 10.1

- Mostre (10.45);
- Verifique (10.54);
- Escreva as equações de Lamé-Navier e Beltrami-Mitchell em notação técnica;
- Para uma barra prismática de seção elíptica, com a e b sendo os semi-eixos da elipse, verifique se

$$\varphi = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \quad \text{e} \quad \phi = -\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}xy. \tag{10.223}$$

11

Teoria Não-linear da Elasticidade

1 Introdução

Neste capítulo, a Teoria Linear da Elasticidade formulada é generalizada de duas formas. Na *Teoria Não-linear da Elasticidade sob Linearidade Geométrica* a não-linearidade é introduzida apenas na equação material. Já na *Teoria da Elasticidade sob Não-linearidade Geométrica* a não-linearidade é introduzida também na cinemática do sólido deformável, que é tratada de forma exata sem aproximações.

2 Linearidade Geométrica

Na Teoria da Elasticidade sob Linearidade Geométrica, já descrita no Capítulo 10, adota-se o conjunto formado pelas hipóteses de pequenas deformações, rotações e deslocamentos, que foi denominado de Linearidade Geométrica. Estas hipóteses resultam em uma descrição simplificada da cinemática dos sólidos.

2.1 Elasticidade linear

Na Teoria Linear da Elasticidade são adotadas as hipóteses de linearidade geométrica e física.

2.1.1 Problema Estático

Considere-se um sólido deformável ocupando uma região V de nosso espaço físico, conforme a Figura 11.1. Seja S a superfície externa que limita esta região. Designe-se por $\boldsymbol{x}$ o vetor posição dos pontos materiais do sólido, e por $\boldsymbol{u}$ o vetor deslocamento destes mesmos pontos. O conjunto dos vetores dos deslocamentos dos pontos do sólido forma um campo vetorial $\boldsymbol{u} : V \to \mathcal{V}_3$, onde $\mathcal{V}_3$ é o espaço tri-dimensional dos vetores.

Figura 11.1: Sólido Deformável sob Linearidade Geométrica

O gradiente do campo dos deslocamentos é definido, de acordo com (10.2), por

$$\boldsymbol{L} = \nabla \boldsymbol{u} \,. \tag{11.1}$$

O tensor das deformações em linearidade geométrica é dado pela parte simétrica do gradiente dos deslocamentos, ou seja, por

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{Sym}(\boldsymbol{L}) = \mathbb{I}_S \boldsymbol{L} = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T\big)\,, \tag{11.2}$$

onde foi empregado, de acordo com $(2.216)_1$ e $(2.217)_1$, o seguinte tensor de quarta ordem

$$\mathbb{I}_S = \frac{1}{2}(\boldsymbol{I} \underline{\otimes} \boldsymbol{I} + \boldsymbol{I} \bar{\otimes} \boldsymbol{I})\,. \tag{11.3}$$

O conjunto dos tensores das deformações nos pontos do sólido forma um campo tensorial $\boldsymbol{E} : V \to \mathcal{S}_3$, onde $\mathcal{S}_3$ é o espaço dos tensores simétricos de segunda ordem.

O vetor unitário normal a uma superfície do sólido, seja ela interna ou seja ela a externa, é designado por $\boldsymbol{n}$. O vetor da força superficial ou o vetor tensão atuante sobre uma superfície de normal $\boldsymbol{n}$ é designado por $\boldsymbol{t}$. O tensor das tensões é denotado por $\boldsymbol{T}$ e pode ser considerado como um operador vetorial $\boldsymbol{T} : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_3$ tal que

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}\,. \tag{11.4}$$

O conjunto dos tensores das tensões nos pontos do sólido forma um campo tensorial $\boldsymbol{T} : V \to \mathcal{S}_3$, onde $\mathcal{S}_3$ é o espaço dos tensores simétricos de segunda ordem. Conforme detalhado nos Capítulos 7 e 10, tem-se duas equações locais do equilíbrio, (10.62), como se segue,

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T, \tag{11.5}$$

onde $\boldsymbol{b}$ é o vetor das forças de volume e $\boldsymbol{o}$ é o vetor nulo.

De acordo com a hipótese de linearidade física o tensor das tensões é dado pela seguinte equação constitutiva linear

$$\boldsymbol{T} = \mathbb{D}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}_0\,, \tag{11.6}$$

onde $\mathbb{D}$ é um tensor de quarta ordem simétrico, denominado tensor dos módulos de rigidez elástica, e $\boldsymbol{T}_0$ é o tensor das tensões iniciais. Diz-se que a configuração de referência é uma configuração de referência natural quando estas tensões forem nulas, ou seja, quando $\boldsymbol{T}_0 = \boldsymbol{O}$, onde $\boldsymbol{O}$ é o tensor

de segunda ordem nulo. O tensor $\mathbb{D}$ possui as simetrias menores que podem ser expressas como disposto abaixo

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}\mathbb{I}_S = \mathbb{I}_S\mathbb{D} \ . \tag{11.7}$$

As condições de contorno de um problema estático da Teoria Linear da Elasticidade podem ser

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}}, \quad \text{em } S_u \ , \tag{11.8}$$

e

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u \quad \text{e} \quad \boldsymbol{t} = \bar{\boldsymbol{t}} \quad \text{em } S_t \ , \tag{11.9}$$

onde S_u e S_t são respectivamente, conforme a Figura 11.1, as partes da superfície externa onde as condições de contorno cinemáticas e estáticas são impostas, isto é, $S = S_u \cup S_t$ e $S_u \cap S_t = \varnothing$. As equações (11.1) a (11.9) caracterizam o *Problema Estático da Teoria Linear da Elasticidade.* A solução do Problema Estático da Teoria Linear da Elasticidade é o conjunto de campos $\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\}$ que satisfazem as equações (11.1) a (11.9) acima.

Segundo o Método dos Deslocamentos, introduz-se (11.1) em (11.2), este em (11.6) e este em (11.5) e $(11.9)_2$, levando-se em conta a simetria de (11.7), para se obter o seguinte Problema de Valor de Contorno (PVC), denominado *Problema Estático da Teoria Linear da Elasticidade,*

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}(\mathbb{D}\nabla\boldsymbol{u} + \boldsymbol{T}_0) + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V \ , \\ &(\mathbb{D}\nabla\boldsymbol{u} + \boldsymbol{T}_0)\boldsymbol{n} = \bar{\boldsymbol{t}} \quad \text{em } S_t \quad \text{e} \\ &\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u \ . \end{aligned} \tag{11.10}$$

Quando não existem tensões iniciais o PVC (11.10) reduz-se a

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}(\mathbb{D}\nabla\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V \ , \\ &(\mathbb{D}\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{n} = \bar{\boldsymbol{t}} \quad \text{em } S_t \quad \text{e} \\ &\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u \ . \end{aligned} \tag{11.11}$$

Resolvendo-se (11.10) ou (11.11), obtém-se o campo dos deslocamentos $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, e a partir deste os campos $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$. Saliente-se que o PVC acima é linear, sendo válida, portanto, a superposição dos efeitos.

2.1.2 Material elástico linear isótropo

Um material elástico linear isótropo, ou seja, com as mesmas propriedades em todas as direções, e sem tensões iniciais, isto é $\boldsymbol{T}_0 = \boldsymbol{O}$, o tensor dos módulos de rigidez elástica tem a seguinte expressão (veja (10.16))

$$\mathbb{D} = \lambda(\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I}) + 2\mu\mathbb{I}_S \ , \tag{11.12}$$

onde λ e μ são constantes de Lamé, dadas por

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{11.13}$$

em função do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν.

Lembrando-se que $(\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I})\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{I} : \boldsymbol{E})\boldsymbol{I}$ e $\mathbb{I}_S\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}$, o tensor das tensões é dado por

$$\boldsymbol{T} = \mathbb{D}\boldsymbol{E} = \lambda(\boldsymbol{I} : \boldsymbol{E})\boldsymbol{I} + 2\mu\boldsymbol{E} \ , \tag{11.14}$$

(11.14) é conhecida na literatura como *Lei de Hooke generalizada*.

A função energia de deformação específica $\psi(\boldsymbol{E})$ associada a (11.14) pode ser definida por

$$\psi(\boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + 2\mu I_2 \ , \tag{11.15}$$

onde I_i, $i = 1,2,$ são os invariantes do tensor das deformações abaixo definidos

$$I_1 = \mathrm{tr}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{I} : \boldsymbol{E} \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\boldsymbol{E}^2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{I} : \boldsymbol{E}^2. \tag{11.16}$$

A função energia de deformação específica $\psi(\boldsymbol{E})$ representa um potencial para as tensões. Assim o tensor das tensões pode ser obtido por meio de

$$\boldsymbol{T} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{E}} \ . \tag{11.17}$$

Com a ajuda da regra da cadeia obtém-se

$$\boldsymbol{T} = \frac{\partial \psi}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{E}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{E}} \ . \tag{11.18}$$

Considerando-se que $\dfrac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{E}} = \boldsymbol{I}$ e $\dfrac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}$, cuja demonstração é objeto de um exercício neste capítulo (veja (11.102)), de (11.15) e (11.18) obtém-se

$$\boldsymbol{T} = \lambda I_1 \boldsymbol{I} + 2\mu \boldsymbol{E} \ . \tag{11.19}$$

Note-se, finalmente, que

$$\psi(\boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \mathbb{D}\boldsymbol{E} \ , \tag{11.20}$$

onde $\mathbb{D}$ é dado por (11.12).

2.1.3 Problema Quase-estático

O problema estático (11.10) pode ser generalizado supondo-se que as forças de volume $\boldsymbol{b}$ e as condições de contorno $\overline{\boldsymbol{u}}$ e $\overline{\boldsymbol{t}}$ são variáveis no tempo. Logo a cada instante t um Problema Estático da Teoria Linear da Elasticidade deverá ser resolvido. A solução ao longo do tempo deste problema generalizado, denominado *Problema Quase-estático da Teoria Linear da Elasticidade*, é o conjunto de campos $\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},t)\}$ que satisfazem as equações (11.10) acima em cada instante

$$t \in \mathcal{T} = \left(t_0 \, , \, t_f\right) \subset \mathbb{R} \ , \tag{11.21}$$

onde t_0 e t_f são os instantes inicial e final do problema.

Pode-se também, de forma similar ao Problema Estático da Teoria Linear da Elasticidade, formular o seguinte PVC em cada instante t do Problema Quase-estático da Teoria Linear da Elasticidade

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}(\mathbb{D}\nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{T}_0) + \boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V \times \mathcal{T} \ , \\ &(\mathbb{D}\nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{T}_0)\boldsymbol{n} = \overline{\boldsymbol{t}}(t) \quad \text{em } S_t \times \mathcal{T} \quad \text{e} \\ &\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}}(t) \quad \text{em } S_u \times \mathcal{T} \ . \end{aligned} \tag{11.22}$$

Observação 11.1

Cabe salientar que, em problemas elásticos quase-estáticos, a escala do tempo não é relevante, servindo o tempo apenas como parâmetro para identificar a seqüência dos eventos.

2.1.4 Problema Tangente

Indicando-se por um ponto superposto a derivada temporal de uma grandeza para um mesmo ponto material, obtém-se de (11.1) a (11.9)

$$
\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{L}} = \nabla \dot{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } V\,,\\
&\dot{\boldsymbol{E}} = \mathbb{I}_S \dot{\boldsymbol{L}} \quad \text{em } V\,,\\
&\dot{\boldsymbol{t}} = \dot{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{n} \quad \text{em } V\,,\\
&\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{T}} + \dot{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V\,,\\
&\dot{\boldsymbol{T}} = \dot{\boldsymbol{T}}^T \quad \text{em } V\,,\\
&\dot{\boldsymbol{T}} = \mathbb{D}\dot{\boldsymbol{E}} \quad \text{em } V\,,\\
&\dot{\boldsymbol{u}} = \dot{\bar{\boldsymbol{u}}} \quad \text{em } S_u \quad \text{e}\\
&\dot{\boldsymbol{t}} = \dot{\bar{\boldsymbol{t}}} \quad \text{em } S_t\,.
\end{aligned}
\tag{11.23}
$$

As equações acima caracterizam o chamado *Problema Tangente da Teoria Linear da Elasticidade*. Pode-se então formular o seguinte PVC para cada instante t

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{div}(\mathbb{D}\nabla\dot{\boldsymbol{u}}) + \dot{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V \times \mathcal{T}\,,\\
&(\mathbb{D}\nabla\dot{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{n} = \dot{\bar{\boldsymbol{t}}} \quad \text{em } S_t \times \mathcal{T} \quad \text{e}\\
&\dot{\boldsymbol{u}} = \dot{\bar{\boldsymbol{u}}} \quad \text{em } S_u \times \mathcal{T}\,.
\end{aligned}
\tag{11.24}
$$

Observação 11.2

O problema tangente acima é formalmente idêntico ao PVC (11.11), ou seja, ao Problema Estático da Teoria Linear da Elasticidade sem tensões iniciais. Logo, qualquer método analítico ou numérico de solução de problemas estáticos da Teoria Linear da Elasticidade pode ser diretamente utilizado na sua solução.

2.2 Elasticidade não-linear

2.2.1 Problema Estático

Na Teoria Não-linear da Elasticidade sob linearidade geométrica é adotada apenas a hipótese de linearidade geométrica. As equações (11.1) a (11.5), assim como as equações (11.8) e (11.9), permanecem válidas. A equação (11.6) é substituída pela função tensorial $\hat{\boldsymbol{T}} : \mathcal{S}_3 \to \mathcal{S}_3$, onde $\mathcal{S}_3$ é o espaço dos tensores simétricos de segunda ordem, tal que

$$\boldsymbol{T} = \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{E})\,. \tag{11.25}$$

Note-se que, agora, a tensão inicial é dada por

$$\boldsymbol{T}_0 = \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{O})\ . \tag{11.26}$$

O Problema Estático da Teoria Não-linear da Elasticidade sob Linearidade Geométrica pode ser então definido pelas seguintes equações

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{L} = \nabla \boldsymbol{u} \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{E} = \mathbb{I}_S \boldsymbol{L} \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \quad \text{em } V\,,\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{T} = \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{E}) \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u \quad \text{e}\\
&\boldsymbol{t} = \bar{\boldsymbol{t}} \quad \text{em } S_t\,.
\end{aligned}
\tag{11.27}
$$

A solução do Problema Estático da Teoria Não-linear da Elasticidade sob Linearidade Geométrica é o conjunto de campos $\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\}$ que satisfazem as equações (11.27) acima.

Utilizando-se o Método dos Deslocamentos, ou seja, colocando-se o problema (11.27) em termos do campo dos deslocamentos apenas, pode-se formular o seguinte Problema de Valor de Contorno (PVC)

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{div}\Big(\hat{\boldsymbol{T}}(\mathbb{I}_S \nabla \boldsymbol{u})\Big) + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V\,,\\
&\Big(\hat{\boldsymbol{T}}(\mathbb{I}_S \nabla \boldsymbol{u})\Big)\boldsymbol{n} = \bar{\boldsymbol{t}} \quad \text{em } S_t \quad \text{e}\\
&\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u\,.
\end{aligned}
\tag{11.28}
$$

Observação 11.3

Saliente-se que o PVC acima não é linear, não sendo válida mais a superposição dos efeitos. (11.28) é conhecido como o PVC do Problema Estático da Teoria Não-linear da Elasticidade sob Linearidade Geométrica.

2.2.2 Material elástico não-linear isótropo

Uma maneira de se formular equações constitutivas elásticas não-lineares é através da função energia de deformação específica $\psi(\boldsymbol{E})$. Assim a tensão é dada por

$$
\boldsymbol{T} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{E}}\,. \tag{11.29}
$$

Para se formular equações constitutivas elásticas não-lineares para materiais isótropos a função energia de deformação específica pode ser colocada na seguinte forma

$$
\psi(\boldsymbol{E}) = \psi(I_1, I_2, I_3)\,, \tag{11.30}
$$

onde I_i, $i = 1,2,3,$ são os invariantes do tensor das deformações abaixo definidos

$$
I_1 = \operatorname{tr}\boldsymbol{E}\,, \quad I_2 = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\boldsymbol{E}^2 \quad \text{e} \quad I_3 = \frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{E}^3\,. \tag{11.31}
$$

Pela regra da cadeia, o tensor das tensões é dado, então, por

$$
\boldsymbol{T} = \frac{\partial \psi}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{E}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{E}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{E}}\,. \tag{11.32}
$$

Considerando-se que $\dfrac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{E}} = \boldsymbol{I}$, $\dfrac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}$ e $\dfrac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}^2$, cujas demonstrações são objeto de um exercício no final deste Capítulo (veja (11.102)), tem-se

$$\boldsymbol{T} = \frac{\partial \psi}{\partial I_1}\boldsymbol{I} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2}\boldsymbol{E} + \frac{\partial \psi}{\partial I_3}\boldsymbol{E}^2 \ . \tag{11.33}$$

2.2.3 Problema Quase-estático

O problema estático (11.27) pode ser generalizado supondo-se que as forças de volume $\boldsymbol{b}$ e as condições de contorno $\overline{\boldsymbol{u}}$ e $\overline{\boldsymbol{t}}$ são variáveis no tempo. Logo a cada instante t um Problema Estático da Teoria Linear da Elasticidade deverá ser resolvido. A solução ao longo do tempo deste problema generalizado, denominado *Problema Quase-estático da Teoria Não-linear da Elasticidade sob Linearidade Geométrica*, é o conjunto de campos $\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},t)\}$ que satisfazem as equações (11.27) acima em cada instante $t \in \mathcal{T}$.

Pode-se então formular o seguinte PVC em cada instante t do Problema Quase-estático da Teoria Não-linear da Elasticidade sob Linearidade Geométrica

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\left(\hat{\boldsymbol{T}}(\mathbb{I}_S \nabla \boldsymbol{u})\right) + \boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V \times \mathcal{T} \ , \\
&\left(\hat{\boldsymbol{T}}(\mathbb{I}_S \nabla \boldsymbol{u})\right)\boldsymbol{n} = \overline{\boldsymbol{t}}(t) \quad \text{em } S_t \times \mathcal{T} \quad \text{e} \\
&\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}}(t) \quad \text{em } S_u \times \mathcal{T} \ .
\end{aligned} \tag{11.34}$$

2.2.4 Problema Tangente

Indicando-se por um ponto superposto a derivada temporal de uma grandeza para um mesmo ponto material, obtém-se de (11.25), pela regra da cadeia,

$$\dot{\boldsymbol{T}} = \mathbb{D}\dot{\boldsymbol{E}} \ , \tag{11.35}$$

onde

$$\mathbb{D} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{E}} \tag{11.36}$$

é um tensor de quarta ordem denominado *tensor dos módulos tangentes de rigidez elástica*.

Obtém-se de (11.27) por derivação no tempo as seguintes equações

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{L}} = \nabla \dot{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } V \ , \\
&\dot{\boldsymbol{E}} = \mathbb{I}_S \dot{\boldsymbol{L}} \quad \text{em } V \ , \\
&\dot{\boldsymbol{t}} = \dot{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{n} \quad \text{em } V \ , \\
&\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{T}} + \dot{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V \ , \\
&\dot{\boldsymbol{T}} = \dot{\boldsymbol{T}}^T \quad \text{em } V \ , \\
&\dot{\boldsymbol{T}} = \mathbb{D}\dot{\boldsymbol{E}} \quad \text{em } V \ , \\
&\dot{\boldsymbol{u}} = \dot{\overline{\boldsymbol{u}}} \quad \text{em } S_u \quad \text{e} \\
&\dot{\boldsymbol{t}} = \dot{\overline{\boldsymbol{t}}} \quad \text{em } S_t \ .
\end{aligned} \tag{11.37}$$

As equações acima caracterizam o chamado *Problema Tangente da Teoria Não-linear da Elasticidade sob Linearidade Geométrica*. Colocando-se o problema (11.37) em termos do campo das velocidades, pode-se então formular o seguinte PVC para cada instante t

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{div}(\mathbb{D}\nabla\dot{\boldsymbol{u}}) + \dot{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V \times \mathcal{T}\ , \\
&(\mathbb{D}\nabla\dot{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{n} = \dot{\bar{\boldsymbol{t}}} \quad \text{em } S_t \times \mathcal{T} \quad \text{e} \\
&\dot{\boldsymbol{u}} = \dot{\bar{\boldsymbol{u}}} \quad \text{em } S_u \times \mathcal{T}\ .
\end{aligned}
\tag{11.38}
$$

Observação 11.4

Note-se que o tensor $\mathbb{D}$ é, em geral, uma função de $\boldsymbol{E}$, enquanto que em (11.23) ele é constante.

Observação 11.5

Note-se que o Problema Tangente da Teoria Não-linear da Elasticidade sob Linearidade Geométrica (11.38) é linear e idêntico ao Problema Tangente da Teoria Linear da Elasticidade (11.24).

Observação 11.6

O problema tangente (11.38) também é formalmente idêntico ao PVC (11.11), ou seja, ao Problema Estático da Teoria Linear da Elasticidade sem tensões iniciais. Logo, qualquer método analítico ou numérico de solução de problemas estáticos da Teoria Linear da Elasticidade pode ser diretamente utilizado na sua solução.

2.3 Solução de Problemas Quase-estáticos

No Capítulo 4 foi visto o Método de Euler Explícito para a solução de Problemas de Valor Inicial (PVI). Mostrar-se-á nesta seção como utilizá-lo na solução de problemas quase-estáticos.

Para se obter soluções numéricas aproximadas de problemas quase-estáticos, escolhe-se pontos $t_i \in \mathcal{T}$, $i = 0,1,2\ldots,$ tais que

$$
t_{i+1} - t_i = \Delta t \tag{11.39}
$$

O valor de Δt é arbitrário, sendo escolhido conforme as necessidades de precisão da solução aproximada obtida. Quanto menor for Δt mais precisa será a solução numérica obtida. Pelo Método de Euler Explícito o campo $\boldsymbol{u}_{i+1}$ é determinado a partir de $\boldsymbol{u}_i$ através de

$$
\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i + \Delta t\dot{\boldsymbol{u}}_i\,, \quad i = 0,1,2,\ldots, \tag{11.40}
$$

Desta forma, a partir do campo inicial $\boldsymbol{u}_0$, suposto conhecido, em cada passo um novo campo $\boldsymbol{u}_i$ é obtido. O método é sumarizado a seguir.

- Faça $i = 0$;
- Resolva o problema tangente (11.38) para t_i, encontrando o campo $\dot{\boldsymbol{u}}_i$;
- Atualize os deslocamentos e o gradiente dos deslocamentos através de

  $$\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i + \Delta t\dot{\boldsymbol{u}}_i \quad \text{e} \quad \boldsymbol{L}_{i+1} = \boldsymbol{L}_i + \Delta t\nabla\dot{\boldsymbol{u}}_i;$$
- Calcule as deformações e tensões em t_{i+1} por meio de

  $$\boldsymbol{E}_{i+1} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{L}_{i+1} + \boldsymbol{L}_{i+1}^T\right) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{T}_{i+1} = \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{E}_{i+1})\,;$$
- Faça $t_{i+1} = t_i + \Delta t$; se $t_{i+1} > t_{\text{final}}$ pare; senão faça $i = i + 1$ e volte para o passo 2 acima.

Logo, para se resolver numericamente problemas quase-estáticos sob linearidade geométrica, basta saber resolver PVC's dados por (11.38), ou seja, similares ao problema estático da Teoria Linear da Elasticidade sem tensões iniciais expresso por (11.11).

Observação 11.7

O leitor deve atentar para o fato do método acima ser exato para Problemas Quase-estáticos da Teoria Linear da Elasticidade.

3 Não-linearidade Geométrica

Na Teoria da Elasticidade sob Não-linearidade Geométrica a cinemática dos sólidos deformáveis é tratada de forma exata. Não são feitas restrições aos deslocamentos, rotações, alongamentos e distorções. A consideração da Não-linearidade Geométrica é necessária para o desenvolvimento da Teoria da Estabilidade de Sólidos e Estruturas.

3.1 Problema Estático

Considere-se, agora, o sólido deformável da Figura 11.2. Na configuração de referência ele ocupa a região V^r do espaço físico. Na configuração atual ou deformada ele ocupa a região V do mesmo espaço. As superfícies externas do sólido nestas configurações são S^r e S, respectivamente. Na maioria das aplicações a configuração de referência escolhida é a configuração inicial do sólido.

Figura 11.2: Sólido Deformável sob Não-linearidade Geométrica

A transformação do sólido é descrita pelo campo vetorial, tal que

$$\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^r) \tag{11.41}$$

onde $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{x}^r$ são os vetores posição de um mesmo ponto material nas configurações atual e de referência, respectivamente. O gradiente da transformação é definido por

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}^r}\,, \tag{11.42}$$

ou seja, por

$$\boldsymbol{F} = \nabla \boldsymbol{x}\,. \tag{11.43}$$

Os deslocamentos $\boldsymbol{u}$ são obtidos de acordo com

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^r \tag{11.44}$$

e formam um campo vetorial dado por

$$\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}^r) . \tag{11.45}$$

O gradiente do campo dos deslocamentos é definido, conseqüentemente, por

$$\boldsymbol{L} = \nabla \boldsymbol{u} . \tag{11.46}$$

De (11.46), (11.44) e (11.43) tem-se que

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I} , \tag{11.47}$$

onde $\boldsymbol{I}$ é o tensor identidade de segunda ordem.

O tensor das deformações de Green é definido por

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}\right), \tag{11.48}$$

ou, com a ajuda de (11.47), por

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T + \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{L}\right). \tag{11.49}$$

O tensor simétrico das tensões de Cauchy é o operador vetorial $\boldsymbol{T}$ que associa o vetor força superficial ou vetor tensão por unidade de área na configuração atual $\boldsymbol{t}$ com o vetor unitário normal a uma superfície nesta configuração $\boldsymbol{n}$, como indicado abaixo

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}. \tag{11.50}$$

O tensor de Cauchy forma o campo tensorial dado por $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$. O vetor força superficial, vetor tensão nominal ou vetor tensão por unidade de área na configuração de referência, denotado por $\boldsymbol{t}^r$, é definido por intermédio de

$$\boldsymbol{t}^r dS^r = \boldsymbol{t} dS , \tag{11.51}$$

onde dS^r e dS são os elementos infinitesimais de superfície nas configurações de referência e atual, respectivamente. Lembrando-se da relação de Nanson (6.70), tem-se

$$\boldsymbol{n} dS = J\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{n}^r dS^r , \tag{11.52}$$

onde $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{n}^r$ são respectivamente os vetores unitários normais a dS e dS^r,

$$J = \det \boldsymbol{F} \tag{11.53}$$

é o Jacobiano da transformação e $-T$ indica as operações comutáveis de transposição e inversão. Com a ajuda de (11.50) a (11.52) pode-se escrever

$$\boldsymbol{t}^r = \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r , \tag{11.54}$$

onde

$$\boldsymbol{P} = J\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{-T} \tag{11.55}$$

é o Primeiro Tensor das Tensões de Piola-Kirchhoff, que não é simétrico. De acordo com (11.54) $\boldsymbol{P}$ é o operador vetorial que associa o vetor força superficial ou vetor tensão relativo à configuração de referência $\boldsymbol{t}^r$ definido por (11.51) com o vetor unitário normal a uma superfície nesta configuração denotado por $\boldsymbol{n}^r$. Já o Segundo Tensor das Tensões de Piola-Kirchhoff é simétrico e é definido por

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P} = J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{-T} . \tag{11.56}$$

Os tensores de Piola-Kirchhoff formam dois campos tensoriais. De (11.56) tem-se

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{S} . \tag{11.57}$$

O seguinte tensor simétrico das tensões pode, conforme (8.57), ainda ser introduzido

$$\boldsymbol{\Sigma} = J\boldsymbol{T} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{S}\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^T \ . \tag{11.58}$$

$\boldsymbol{\Sigma}$ é conhecido na literatura por tensor de Kirchhoff-Trefftz.

O vetor das forças de volume por unidade de volume da configuração de referência é denotado por $\boldsymbol{b}^r$. Já o vetor das forças de volume por unidade de volume da configuração atual é denotado por $\boldsymbol{b}$. Logo

$$\boldsymbol{b}dV = \boldsymbol{b}^r dV^r \ . \tag{11.59}$$

onde dV e dV^r são os elementos infinitesimais de volume nas configurações atual e de referência. Lembrando-se da Relação de Euler

$$dV = J dV^r \ , \tag{11.60}$$

pode-se escrever

$$\boldsymbol{b} = J^{-1}\boldsymbol{b}^r \ . \tag{11.61}$$

Na prática, forças de volume por unidade de volume na configuração de referência são muito mais utilizadas. Como já detalhado no Capítulo 8, tem-se em V as seguintes equações locais de equilíbrio

$$\text{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T. \tag{11.62}$$

Por outro lado, conforme também detalhado no Capítulo 8, tem-se em V^r as seguintes equações locais de equilíbrio

$$\text{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r = \boldsymbol{o} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{F}\boldsymbol{P}^T. \tag{11.63}$$

Uma vez que $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{E}$, ao contrário de $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{P}$, não são afetados por movimentos superpostos de corpo rígido, pode-se expressar a equação constitutiva elástica através da seguinte função tensorial

$$\boldsymbol{S} = \hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{E}) \ , \tag{11.64}$$

pois com certeza ela irá satisfazer o Princípio da Objetividade. Com (11.64) na mão, pode-se escrever

$$\boldsymbol{P} = \hat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{F}) \ , \tag{11.65}$$

onde

$$\hat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{E}) \circ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{F}) \tag{11.66}$$

e $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{F})$ é dado por (11.48). As condições de contorno, quando expressas na configuração de referência, são

$$\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u^r \quad \text{e} \quad \boldsymbol{t}^r = \overline{\boldsymbol{t}}^r \quad \text{em } S_t^r \ , \tag{11.67}$$

onde S_u^r e S_t^r são respectivamente, conforme a figura 11.2, as partes da superfície externa onde as condições de contorno cinemáticas e estáticas são impostas. Note-se que $S^r = S_u^r \cup S_t^r$ e $S_u^r \cap S_t^r = \varnothing$.

O Problema Estático da Teoria da Elasticidade sob Não-linearidade Geométrica pode ser então definido pelas seguintes equações

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + \nabla \boldsymbol{u} \quad \text{em } V^r \,, \\
&\boldsymbol{t}^r = \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r \quad \text{em } V^r \,, \\
&\text{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V^r \,, \\
&\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{F}\boldsymbol{P}^T \quad \text{em } V^r \,, \\
&\boldsymbol{P} = \hat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{F}) \quad \text{em } V^r \,, \\
&\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u^r \quad \text{e} \\
&\boldsymbol{t} = \overline{\boldsymbol{t}} \quad \text{em } S_t^r \,.
\end{aligned}
\tag{11.68}
$$

A solução do Problema Estático da Teoria Não-linear da Elasticidade sob Não-linearidade Geométrica é o conjunto de campos $\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})\}$ que satisfazem as equações (11.68) acima.

Utilizando-se o Método dos Deslocamentos, pode-se formular o seguinte Problema de Valor de Contorno (PVC)

$$
\begin{aligned}
&\text{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V^r \,, \\
&\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r = \overline{\boldsymbol{t}}^r \quad \text{em } S_t^r \quad \text{e} \\
&\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u^r \,.
\end{aligned}
\tag{11.69}
$$

Observação 11.8

Saliente-se que o PVC acima não é linear, não sendo válida, portanto, a superposição dos efeitos. (11.69) é conhecido como o PVC do Problema Estático da Teoria Não-linear da Elasticidade sob Não-linearidade Geométrica.

Observação 11.9

Da mesma forma que na Teoria da Elasticidade sob Linearidade Geométrica, pode-se formular na Teoria da Elasticidade sob Não-linearidade Geométrica problemas estáticos, quase-estáticos e problemas tangentes.

3.2 Material elástico isótropo

Uma forma de se formular equações constitutivas elásticas não-lineares é através da função energia de deformação específica $\psi(\boldsymbol{E})$ de modo que o segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff seja dado por

$$
\boldsymbol{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{E}} \,, \tag{11.70}
$$

onde $\boldsymbol{E}$ é o tensor das deformações de Green. Para materiais isótropos a função energia de deformação específica pode ser colocada da seguinte forma

$$
\psi(\boldsymbol{E}) = \psi(I_1, I_2, I_3) \,, \tag{11.71}
$$

onde I_i, $i = 1,2,3,$ são os invariantes do tensor das deformações abaixo definidos

$$
I_1 = \text{tr}\boldsymbol{E} \,, \quad I_2 = \frac{1}{2}\text{tr}\boldsymbol{E}^2 \quad \text{e} \quad I_3 = \frac{1}{3}\text{tr}\boldsymbol{E}^3 \,. \tag{11.72}
$$

O tensor das tensões é dado então por

$$\boldsymbol{S} = \frac{\partial \psi}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{E}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{E}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{E}} = \frac{\partial \psi}{\partial I_1}\boldsymbol{I} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2}\boldsymbol{E} + \frac{\partial \psi}{\partial I_3}\boldsymbol{E}^2 \ . \tag{11.73}$$

Exemplo 11.1

Um exemplo de material elástico sob grandes deformações é o *material de Kirchhoff-St.-Venant* dado por

$$\psi(\boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}\lambda I_1^2 + 2\mu I_2 \ . \tag{11.74}$$

Note-se que (11.74) é uma extensão direta de (11.15) para a Não-linearidade Geométrica. λ e μ são coeficientes generalizados de Lamé. De (11.74) resulta

$$\boldsymbol{S} = \mathbb{D}\boldsymbol{E} = \lambda I_1 \boldsymbol{I} + 2\mu \boldsymbol{E} \ , \tag{11.75}$$

onde

$$\mathbb{D} = \lambda(\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I}) + 2\mu \mathbb{I}_S \ . \tag{11.76}$$

(11.75) e (11.76) são extensões diretas de (11.19) e (11.12). Com a ajuda de (11.57), tem-se de (11.75) a seguinte expressão para o 1º tensor das tensões de Piola-Kirchhoff

$$\boldsymbol{P} = \lambda I_1 \boldsymbol{F} + \mu \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}\big) \ . \tag{11.77}$$

Observação 11.10

Note-se que, embora (11.75) seja linear para o par $\{\boldsymbol{S}, \boldsymbol{E}\}$, o Problema Estático (11.68) permanece não-linear. Assim não há vantagem em se utilizar (11.75).

Observação 11.11: Material Neo-Hookeano de Ciarlet-Simo

O material de Kirchhoff-St.-Venant foi muito utilizado no passado em teorias estruturais por sua simplicidade. No entanto, ele padece de sérios problemas teóricos e práticos, pois pode levar a Problemas Estáticos sem solução. Um material que não apresenta esse problema é o *material neo-Hookeano de Ciarlet-Simo* dado por

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\lambda\big(J^2 - 1\big)\boldsymbol{C}^{-1} + 2\mu\frac{1}{2}\big(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^{-1}\big) \ , \tag{11.78}$$

onde $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{E}$ é o tensor dos estiramentos quadráticos de Cauchy-Green, introduzido em **(6.35)** e λ e μ são coeficientes generalizados de Lamé. Com a ajuda de (11.57), tem-se de (11.78) para o 1º tensor das tensões de Piola-Kirchhoff a seguinte expressão

$$\boldsymbol{P} = \left[\frac{1}{2}\lambda\big(J^2 - 1\big) - \mu\right]\boldsymbol{F}^{-T} + \mu\boldsymbol{F} \ . \tag{11.79}$$

Observação 11.12: Materiais neo-Hookeanos

Tanto (11.75) como (11.78) pertencem a uma classe de materiais elásticos isótropos, aqui denominada *classe dos materiais neo-Hookeanos*. Todos os membros desta classe representam extensões da Lei de Hooke Generalizada (11.14) para a Não-linearidade Geométrica e possuem apenas dois parâmetros constitutivos.

3.3 Problema Quase-estático

O problema estático (11.68) pode ser generalizado supondo-se que as forças de volume $\boldsymbol{b}^r$ e as condições de contorno $\overline{\boldsymbol{u}}$ e $\overline{\boldsymbol{t}}^r$ são variáveis no tempo. Logo a cada instante t um Problema Estático da Teoria da Elasticidade sob Não-linearidade Geométrica deverá ser resolvido. A solução ao longo do tempo deste problema generalizado, denominado *Problema Quase-estático da Teoria da Elasticidade sob Não-linearidade Geométrica*, é o conjunto de campos $\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^r,t),\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^r,t),\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}^r,t)\}$ que satisfazem as equações (11.68) acima em cada instante $t \in \mathcal{T}$.

Pode-se também formular o seguinte PVC em cada instante t do Problema Quase-estático da Teoria Não-linear da Elasticidade sob Linearidade Geométrica

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V^r \times \mathcal{T} \ , \\ &\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r = \overline{\boldsymbol{t}}^r(t) \quad \text{em } S_t^r \times \mathcal{T} \quad \text{e} \\ &\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}}(t) \quad \text{em } S_u^r \times \mathcal{T} \ . \end{aligned} \tag{11.80}$$

3.4 Problema Tangente

Indicando-se por um ponto superposto a derivada temporal de uma grandeza para um mesmo ponto material, obtém-se de (11.64), pela regra da cadeia,

$$\dot{\boldsymbol{S}} = \mathbb{D}\dot{\boldsymbol{E}} \ , \tag{11.81}$$

onde

$$\mathbb{D} = \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \boldsymbol{E}} \tag{11.82}$$

é o tensor dos módulos tangentes de rigidez elástica para o par $\{\boldsymbol{S},\boldsymbol{E}\}$. Derivando-se (11.57) no tempo, tem-se

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{F}\dot{\boldsymbol{S}} \ . \tag{11.83}$$

Da mesma forma, de (11.48), tem-se

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{F}}^T\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^T\dot{\boldsymbol{F}}\right) = \mathbb{I}_S\left(\boldsymbol{F}^T\dot{\boldsymbol{F}}\right). \tag{11.84}$$

Introduzindo-se (11.84) em (11.81), e lembrando-se que $\boldsymbol{F}^T\dot{\boldsymbol{F}} = (\boldsymbol{F} \underline{\otimes} \boldsymbol{I})\dot{\boldsymbol{F}}$ e $\mathbb{D}\mathbb{I}_S = \mathbb{D}$, tem-se

$$\dot{\boldsymbol{S}} = \mathbb{D}\mathbb{I}_S\left(\boldsymbol{F}^T\dot{\boldsymbol{F}}\right) = \mathbb{D}(\boldsymbol{F} \underline{\otimes} \boldsymbol{I})\dot{\boldsymbol{F}} \ . \tag{11.85}$$

Introduzindo-se (11.85) em (11.83) e considerando-se que

$$\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{I} \underline{\otimes} \boldsymbol{S})\dot{\boldsymbol{F}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{F}\dot{\boldsymbol{S}} = \left(\boldsymbol{F}^T \underline{\otimes} \boldsymbol{I}\right)\dot{\boldsymbol{S}}, \tag{11.86}$$

chega-se a

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \mathbb{G}\dot{\boldsymbol{F}} \ , \tag{11.87}$$

onde

$$\mathbb{G} = (\boldsymbol{I} \underline{\otimes} \boldsymbol{S}) + \left(\boldsymbol{F}^T \underline{\otimes} \boldsymbol{I}\right)\mathbb{D}(\boldsymbol{F} \underline{\otimes} \boldsymbol{I}) \tag{11.88}$$

é o *tensor dos módulos tangentes de rigidez elástica* para o par $\{\boldsymbol{P},\boldsymbol{F}\}$, ou simplesmente *tensor dos módulos tangentes nominais de rigidez elástica*. O tensor $\mathbb{G}$ é muito importante na Teoria da Estabilidade Elástica, como será visto no Capítulo 17.

Obtém-se diretamente de (11.68), por derivação no tempo, as seguintes equações

$$
\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{L}} = \dot{\boldsymbol{F}} = \nabla \dot{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } V^r\,,\\
&\dot{\boldsymbol{t}}^r = \dot{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{n}^r \quad \text{em } V^r\,,\\
&\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{P}} + \dot{\boldsymbol{b}}^r = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V^r\,,\\
&\dot{\boldsymbol{P}} = \mathbb{G}\dot{\boldsymbol{F}} \quad \text{em } V^r\,,\\
&\dot{\boldsymbol{u}} = \dot{\bar{\boldsymbol{u}}} \quad \text{em } S_u^r\,,\\
&\dot{\boldsymbol{t}} = \dot{\bar{\boldsymbol{t}}} \quad \text{em } S_t^r.
\end{aligned}
\tag{11.89}
$$

As equações acima caracterizam o chamado Problema Tangente da Teoria da Elasticidade sob Não-linearidade Geométrica. Pode-se então formular o seguinte PVC para cada instante t

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{div}(\mathbb{G}\nabla\dot{\boldsymbol{u}}) + \dot{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V^r \times \mathcal{T}\,,\\
&(\mathbb{G}\nabla\dot{\boldsymbol{u}})\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{r}} = \dot{\bar{\boldsymbol{t}}}^{\boldsymbol{r}} \quad \text{em } S_t^r \times \mathcal{T} \quad \text{e}\\
&\dot{\boldsymbol{u}} = \dot{\bar{\boldsymbol{u}}} \quad \text{em } S_u^r \times \mathcal{T}\,.
\end{aligned}
\tag{11.90}
$$

Observação 11.13

Note-se que o Problema Tangente da Teoria da Elasticidade sob Não-linearidade Geométrica (11.90) é linear e semelhante ao Problema Tangente da Teoria Linear da Elasticidade (11.24).

Observação 11.14

O problema tangente (11.90) também é formalmente idêntico ao PVC (11.11), ou seja, ao Problema Estático da Teoria Linear da Elasticidade sem tensões iniciais. Logo, qualquer método analítico ou numérico de solução de problemas estáticos da Teoria Linear da Elasticidade pode ser diretamente utilizado na sua solução.

Exemplo 11.2: Material Neo-Hookeano de Ciarlet-Simo

A derivada no tempo de (11.79) fornece

$$
\dot{\boldsymbol{P}} = \lambda J \dot{J} \boldsymbol{F}^{-T} + \left[\frac{1}{2}\lambda\left(J^2 - 1\right) - \mu\right]\dot{\boldsymbol{F}}^{-T} + \mu\dot{\boldsymbol{F}}\,. \tag{11.91}
$$

Lembrando-se que $\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{I}$ e, por conseguinte, $\dot{\boldsymbol{F}}^{-T}\boldsymbol{F}^T + \boldsymbol{F}^{-T}\dot{\boldsymbol{F}}^T = \boldsymbol{O}$, obtém-se

$$
\dot{\boldsymbol{F}}^{-T} = -\boldsymbol{F}^{-T}\dot{\boldsymbol{F}}^T\boldsymbol{F}^{-T} = -\left(\boldsymbol{F}^{-1} \mathbin{\bar{\otimes}} \boldsymbol{F}^{-T}\right)\dot{\boldsymbol{F}}\,. \tag{11.92}
$$

Logo, de (11.87), (11.91) e (11.92) e $\dot{J} = J\boldsymbol{F}^{-T} : \dot{\boldsymbol{F}}$ (veja (7.92)), chega-se em

$$
\mathbb{G} = \lambda J^2\left(\boldsymbol{F}^{-T} \otimes \boldsymbol{F}^{-T}\right) + \left[\mu - \frac{1}{2}\lambda\left(J^2 - 1\right)\right]\left(\boldsymbol{F}^{-1} \mathbin{\bar{\otimes}} \boldsymbol{F}^{-T}\right) + \mu\mathbb{I}\,. \tag{11.93}
$$

Observação 11.15

O tensor $\mathbb{G}$ é simétrico, isto é

$$
\mathbb{G} = \mathbb{G}^T\,, \tag{11.94}
$$

se $\mathbb{D}$ for. $\mathbb{G}$, entretanto, não possui as simetrias menores ($\mathbb{D} = \mathbb{D}\mathbb{I}_S = \mathbb{I}_S\mathbb{D}$) do tensor $\mathbb{D}$.

Observação 11.16: Teoria de primeira ordem

De acordo com (11.88), $\mathbb{G}$ depende de $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{S}$. Logo, para que se tenha

$$\mathbb{G} = \mathbb{D} \tag{11.95}$$

é necessário que

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{S} = \boldsymbol{O}\,, \tag{11.96}$$

ou seja, que o gradiente dos deslocamentos seja nulo e que as tensões sejam nulas. Portanto, o problema tangente sob não-linearidade geométrica e o problema tangente sob linearidade geométrica coincidem rigorosamente se e somente se o sólido estiver na configuração de referência, ou a uma translação desta, e esta for natural.

Observação 11.17: Teoria de primeira ordem

Uma conclusão interessante é obtida fazendo-se a seguinte expansão em séries

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}(t_0) + (t - t_0)\dot{\boldsymbol{u}}(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\,\ddot{\boldsymbol{u}}(t_0) + \ldots \tag{11.97}$$

Assim,

$$\boldsymbol{u}(t) = (t - t_0)\dot{\boldsymbol{u}}(t_0) \tag{11.98}$$

até primeira ordem em $t - t_0$, se $\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{o}$. Logo, os Problemas Estáticos da Teoria Linear da Elasticidade sob Linearidade Geométrica, da Teoria Não-linear da Elasticidade sob Linearidade Geométrica e da Teoria Não-linear da Elasticidade sob Não-linearidade Geométrica coincidem até primeira ordem nos deslocamentos se e somente se o sólido estiver inicialmente na configuração de referência e se esta for natural. Por isso, e somente nestas condições, a Teoria Linear da Elasticidade pode ser chamada de Teoria de Primeira Ordem. Esta nomenclatura, no entanto, é freqüentemente utilizada, e de forma errônea, como sinônimo de Linearidade Geométrica.

Observação 11.18

Com a ajuda de (11.87), pode-se concluir que

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{F}} = \mathbb{G}\,. \tag{11.99}$$

Logo, se existir a função escalar energia de deformação específica $\psi(\boldsymbol{E})$, então

$$\psi(\boldsymbol{F}) = \psi(\boldsymbol{E}) \circ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{F})\,, \quad \boldsymbol{P} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{F}} \quad \text{e} \quad \mathbb{G} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{F}^2}\,. \tag{11.100}$$

Estes resultados serão utilizados no Capítulo de Teoria da Estabilidade.

3.5 Solução de Problemas Quase-estáticos

Foi visto acima como utilizar o Método de Euler Explícito para a solução de Problemas Quase-estáticos da Teoria da Elasticidade sob Linearidade Geométrica. Aplica-se agora o mesmo método para se obter soluções aproximadas de Problemas Quase-estáticos da Teoria da Elasticidade sob Não-linearidade Geométrica. Desta forma, a partir do campo inicial $\boldsymbol{u}_0$, suposto conhecido, em cada passo um novo campo $\boldsymbol{u}_i$ é obtido. O método é sumarizado a seguir.

1. Faça $i = 0$;
2. Resolva o problema tangente (11.90) para t_i, encontrando o campo $\dot{\boldsymbol{u}}_i$;
3. Atualize os deslocamentos, o gradiente dos deslocamentos e o gradiente da transformação através de

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i + \Delta t \dot{\boldsymbol{u}}_i \ , \quad \boldsymbol{L}_{i+1} = \boldsymbol{L}_i + \Delta t \nabla \dot{\boldsymbol{u}}_i \quad \text{e} \quad \boldsymbol{F}_{i+1} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_{i+1} \ ;$$

4. Calcule as deformações e tensões em t_{i+1} por meio de

$$\boldsymbol{E}_{i+1} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}_{i+1}^T \boldsymbol{F}_{i+1} - \boldsymbol{I}\right), \quad \boldsymbol{S}_{i+1} = \hat{\boldsymbol{S}}\left(\boldsymbol{E}_{i+1}\right) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{P}_{i+1} = \boldsymbol{F}_{i+1}\boldsymbol{S}_{i+1} \ ;$$

5. Faça $t_{i+1} = t_i + \Delta t$; se $t_{i+1} > t_{\text{final}}$ pare; senão faça $i = i + 1$ e volte para o passo 2 acima.

Logo, para se resolver numericamente problemas quase-estáticos sob linearidade geométrica, basta saber resolver PVC's dados por (11.90), ou seja, similares ao problema estático da Teoria Linear da Elasticidade sem tensões iniciais expresso por (11.11).

Exercícios 11.1

- Mostre que o Método de Euler explícito é exato para Problemas Quase-estáticos da Teoria Linear da Elasticidade.
- Mostre que as simetrias de $\mathbb{D}$, descritas em (11.7), podem ser expressas, em uma base ortonormal, por

$$D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{ijlk} = D_{klij} \ . \tag{11.101}$$

- Mostre que o tensor $\mathbb{G}$ é simétrico, mas que não tem as demais simetrias que $\mathbb{D}$ tem.
- Com I_i, $i = 1,2,3$, dados por (11.31), mostre que

$$\dot{I}_1 = \boldsymbol{I} : \dot{\boldsymbol{E}} \ , \quad \dot{I}_2 = \boldsymbol{E} : \dot{\boldsymbol{E}} \quad \text{e} \quad \dot{I}_3 = \boldsymbol{E}^2 : \dot{\boldsymbol{E}} \ .$$

- Com I_i, $i = 1,2,3$, dados por (11.31) e com o resultado acima, mostre que

$$\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{E}} = \boldsymbol{I} \ , \quad \frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E} \quad \text{e} \quad \frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}^2 \ . \tag{11.102}$$

- Para uma viga em balanço, homogênea, prismática, de comprimento ℓ, sob carregamento transversal q e considerando-se a teoria de Bernoulli-Euler, a equação constitutiva entre os momentos fletores e as curvaturas é dada por $M = EIv''$, onde $v(x)$ é o deslocamento transversal da viga, E é o módulo de elasticidade e I é o momento de inércia da seção transversal. Formule o problema estático, o problema quase-estático e o problema tangente, indicando as equações de equilíbrio e as condições de contorno.
- Idem para a mesma viga com os momentos fletores dados por $M = \hat{M}\left(v''\right)$.
- Formule a solução pelo método de Euler explícito do problema quase-estático do item anterior.
- Seja um bloco de borracha cúbico com dimensões $(a \times a \times a)$ que é distorcido com o seguinte campo de deslocamentos $u_1 = \alpha x_2$, $u_2 = u_3 = 0$. Determine $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{T}$ no bloco, como também $\boldsymbol{t}^r$ e $\boldsymbol{t}$ nas bordas. Use (11.75) e (11.78). Repita para Linearidade Geométrica.
- Mostre que as componentes de $\mathbb{G}$ em uma base ortonormal são dadas por

$$G_{ijkl} = S_{jl}\delta_{ik} + D_{njml}F_{in}F_{km} \ . \tag{11.103}$$

12

Formulações Integrais da Mecânica dos Sólidos

Neste capítulo os elementos de Cálculo Variacional apresentados no Capítulo 5 são aplicados à Mecânica dos Sólidos e das Estruturas.

1 Formulações sob Não-linearidade Geométrica

Inicialmente formulações integrais para a Mecânica dos Sólidos Deformáveis sob Não-linearidade Geométrica serão apresentadas. Estas formulações têm validade geral e não fazem restrições aos deslocamentos, deformações e rotações.

1.1 Potência e Trabalho dos Esforços Externos

Como introdução, os conceitos de potência e trabalho de uma força na Física são apresentados. Seja $\boldsymbol{f}$ uma força e $\dot{\boldsymbol{u}}$ a velocidade do seu ponto de aplicação. A *potência* de $\boldsymbol{f}$ é definida por

$$P = \boldsymbol{f} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} \ . \tag{12.1}$$

O *trabalho* de $\boldsymbol{f}$ durante um intervalo de tempo (t_a, t_b) é definido por

$$W = \int_{t_a}^{t_b} P dt = \int_{t_a}^{t_b} \boldsymbol{f} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} dt \ . \tag{12.2}$$

Agora estes conceitos são generalizados para os esforços da Mecânica dos Sólidos Deformáveis.

Definição 12.1: Potência das forças de volume

A *potência das forças volúmicas* atuantes num sólido deformável é então definida por

$$P_V = \int_{V^r} \boldsymbol{b}^r \cdot \dot{\boldsymbol{u}} dV^r \ . \tag{12.3}$$

Definição 12.2: Potências das forças superficiais

Já a *potência das forças superficiais* sobre a superfície externa de um sólido deformável é dada por

$$P_S = \int_{S^r} \boldsymbol{t}^r \cdot \dot{\boldsymbol{u}} dS^r \ . \tag{12.4}$$

Definição 12.3: Potência dos esforços externos

A *potência dos esforços externos* é definida por

$$P_{\text{ext}} = P_V + P_S = \int_{V^r} \boldsymbol{b}^r \cdot \dot{\boldsymbol{u}} dV^r + \int_{S^r} \boldsymbol{t}^r \cdot \dot{\boldsymbol{u}} dS^r \ . \tag{12.5}$$

Observação 12.1

Note-se que (12.3) a (12.5) foram definidas por integração na configuração de referência. Na configuração atual, a expressão equivalente para a potência dos esforços externos é

$$P_{\text{ext}} = P_V + P_S = \int_V \boldsymbol{b} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} dV + \int_S \boldsymbol{t} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} dS \ . \tag{12.6}$$

Definição 12.4: Trabalho dos esforços externos

O *trabalho dos esforços externos* em um intervalo de tempo $\mathcal{I} = (t_a, t_b)$ é definido por

$$W_{\text{ext}} = \int_{t_a}^{t_b} P_{\text{ext}} dt \ . \tag{12.7}$$

1.2 Potência e Trabalho dos Esforços Internos

Definição 12.5: Potência dos esforços internos

A *potência dos esforços internos* de um sólido deformável é definida por

$$P_{\text{int}} = \int_{V^r} \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} dV^r \ . \tag{12.8}$$

Observação 12.2

Lembrando-se que $\boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{E}}$, onde

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \text{Sym}\left(\boldsymbol{F}^T \dot{\boldsymbol{F}}\right), \tag{12.9}$$

pode-se escrever

$$P_{\text{int}} = \int_{V^r} \boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{E}} dV^r \ . \tag{12.10}$$

Observação 12.3

Na configuração atual, tendo em vista que $\boldsymbol{S} = J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{-T}$ e $dV = JdV^r$, a expressão equivalente para a potência dos esforços internos é

$$P_{\text{int}} = \int_V \boldsymbol{T} : \boldsymbol{F}^{-T}\dot{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{F}^{-1} dV = \int_V \boldsymbol{T} : \text{Sym}\left(\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}\right) dV. \tag{12.11}$$

Considere-se a seguinte aplicação da regra da cadeia

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{u}}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{u}}}{\partial \boldsymbol{x}^r} \frac{\partial \boldsymbol{x}^r}{\partial \boldsymbol{x}} \ , \tag{12.12}$$

onde as velocidades dos pontos materiais do sólido foram consideradas uma função da posição na configuração atual ou deformada. Considerando-se que $\dot{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\partial \dot{\boldsymbol{u}}}{\partial \boldsymbol{x}^r}$ e $\boldsymbol{F}^{-1} = \dfrac{\partial \boldsymbol{x}^r}{\partial \boldsymbol{x}}$, de (12.12) resulta

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{u}}}{\partial \boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1} \ , \tag{12.13}$$

que é conhecido como *gradiente espacial das velocidades*.

Definição 12.6: Trabalho dos esforços internos

O *trabalho dos esforços internos* num intervalo de tempo (t_a, t_b) é definido por

$$W_{\text{int}} = \int_{t_a}^{t_b} P_{\text{int}} dt \ . \tag{12.14}$$

1.3 Energia Cinética

Definição 12.7: Energia cinética de um sólido

A *energia cinética* de um sólido deformável é um funcional definido por

$$T = \int_{V^r} \frac{1}{2} \rho^r \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} dV^r \ . \tag{12.15}$$

Em (12.15), ρ^r é a *massa específica na configuração de referência*.

Observação 12.4

A derivada no tempo de (12.15) fornece

$$\dot{T} = \int_{V^r} \frac{1}{2} \rho^r (\dot{\boldsymbol{u}} \cdot \ddot{\boldsymbol{u}} + \ddot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}) dV^r = \int_{V^r} \rho^r \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \ddot{\boldsymbol{u}} dV^r. \tag{12.16}$$

1.4 Teorema das Potências

A cada instante em um sólido deformável vale

$$P_{\text{ext}} = P_{\text{int}} + \dot{T} \ . \tag{12.17}$$

Este resultado é conhecido como *Teorema das Potências*. Para demonstrá-lo, deve-se lembrar que $\boldsymbol{t}^r = \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r$ em S^r. Logo, com a ajuda do teorema do divergente (Capítulo 3) e de (12.8), tem-se

$$\begin{aligned} P_S &= \int_{S^r} \boldsymbol{t}^r \cdot \dot{\boldsymbol{u}} dS^r = \int_{S^r} (\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r) \cdot \dot{\boldsymbol{u}} dS^r = \\ &= \int_{V^r} \left(\text{div}\boldsymbol{P} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} \right) dV^r = \\ &= \int_{V^r} (\text{div}\boldsymbol{P} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}) dV^r + P_{\text{int}} \ . \end{aligned} \tag{12.18}$$

Introduzindo-se em (12.18) a primeira equação local do movimento $\text{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r = \rho^r \ddot{\boldsymbol{u}}$, obtém-se

$$P_S = \int_{V^r} (\rho^r \ddot{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{b}^r) \cdot \dot{\boldsymbol{u}} dV^r + P_{\text{int}} \ . \tag{12.19}$$

Logo, com a ajuda de (12.3) e (12.16), tem-se

$$P_S = \dot{T} - P_V + P_{\text{int}} \ . \tag{12.20}$$

Donde, com o concurso de (12.5), decorre (12.17).

Observação 12.5

Integrando-se (12.17) num intervalo de tempo $\mathcal{I} = (t_a, t_b)$, obtém-se

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{int}} + \Delta T \ , \tag{12.21}$$

onde se introduziu a notação

$$\Delta(\bullet) = (\bullet)_b - (\bullet)_a \ . \tag{12.22}$$

Definição 12.8: Processo quase-estático

Chama-se processo quase-estático qualquer processo no qual a energia cinética e sua variação possam ser desprezadas.

Propriedades 12.1: Teorema das Potências para processos quase-estáticos

Num processo quase-estático, tem-se

$$P_{\text{ext}} = P_{\text{int}} \ , \tag{12.23}$$

e, num intervalo $\mathcal{I} = (t_a, t_b)$,

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{int}} \ , \tag{12.24}$$

1.5 Teorema dos Trabalhos Virtuais

Definição 12.9: Deslocamentos virtuais

Seja um campo de deslocamentos $\delta \boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1(V^r)$ [61], denominados *deslocamentos virtuais*.

Definição 12.10: Trabalho virtual dos esforços externos

O *trabalho virtual dos esforços externos* é definido de forma semelhante a (12.5), ou seja,

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_{V^r} \boldsymbol{b}^r \cdot \delta \boldsymbol{u} dV^r + \int_{S^r} \boldsymbol{t}^r \cdot \delta \boldsymbol{u} dS^r \ . \tag{12.25}$$

Definição 12.11: Trabalho virtual dos esforços internos

O *trabalho virtual dos esforços internos* é definido, de forma análoga a (12.8), como se segue

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{V^r} \boldsymbol{P} : \delta \boldsymbol{F} dV^r \ , \tag{12.26}$$

onde

$$\delta \boldsymbol{F} = \nabla \delta \boldsymbol{u} \ . \tag{12.27}$$

Definição 12.12: Variação virtual da energia cinética

A variação virtual da energia cinética é, por sua vez, dada por

$$\delta T = \int_{V^r} \rho^r \ddot{\boldsymbol{u}} \cdot \delta \boldsymbol{u} dV^r \ . \tag{12.28}$$

---

[61] $\mathcal{H}_n(\Omega)$ aqui, e doravante, é o espaço de Sobolev de ordem n para campos escalares, vetoriais ou tensoriais, em geral, definido no domínio Ω.

1.5.1 Processos dinâmicos

Aplicando-se o teorema do divergente de forma semelhante a (12.18), por ocasião da demonstração do Teorema das Potências, tem-se a seguinte identidade

$$\int_{S_t} (\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r) \cdot \delta\boldsymbol{u} dS^r = \int_{V^r} (\text{div}\boldsymbol{P} \cdot \delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{P} : \nabla\delta\boldsymbol{u}) dV^r \ . \tag{1.29}$$

Portanto, com a ajuda das definições (12.25), (12.26) e (12.28), pode-se escrever

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} + \delta T + \int_{V^r} (\text{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r - \rho^r \ddot{\boldsymbol{u}}) \cdot \delta\boldsymbol{u} dV^r + \int_{S^r} (\boldsymbol{t}^r - \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r) \cdot \delta\boldsymbol{u} dS^r \ . \tag{12.30}$$

Logo, pode-se concluir que

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} + \delta T \ , \quad \forall \delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1(V^r) \ \Leftrightarrow \begin{cases} \text{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r = \rho^r \ddot{\boldsymbol{u}} & \text{em } V^r \quad \text{e} \\ \boldsymbol{t}^r = \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r & \text{em } S^r \end{cases} \ . \tag{12.31}$$

Assim

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} + \delta T \ , \quad \forall \delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1(V^r) \ , \tag{12.32}$$

é uma condição necessária e suficiente para que o sólido esteja externa e internamente em equilíbrio dinâmico, entendendo-se por *equilíbrio interno* a equação

$$\text{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r = \rho^r \ddot{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } V^r \tag{12.33}$$

e por *equilíbrio externo* a equação

$$\boldsymbol{t}^r = \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r \quad \text{em } S^r \ . \tag{12.34}$$

Esta proposição é conhecida como *teorema dos trabalhos virtuais*.

1.5.2 Processos quase-estáticos

Em processos quase-estáticos, tem-se

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} + \int_{V^r} (\text{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r) \cdot \delta\boldsymbol{u} dV^r + \int_{S^r} (\boldsymbol{t}^r - \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r) \cdot \delta\boldsymbol{u} dS^r \ . \tag{12.35}$$

Logo

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} \ , \quad \forall \delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1(V^r) \ \Leftrightarrow \begin{cases} \text{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r = \boldsymbol{o} & \text{em } V^r \quad \text{e} \\ \boldsymbol{t}^r = \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r & \text{em } S^r \end{cases} \ . \tag{12.36}$$

Portanto

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} \ , \quad \forall \delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1(V^r) \ , \tag{12.37}$$

é uma condição necessária e suficiente para que o sólido esteja externa e internamente em equilíbrio estático, entendendo-se por *equilíbrio interno* a equação

$$\text{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V^r \tag{12.38}$$

e por *equilíbrio externo* a equação

$$\boldsymbol{t}^r = \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r \quad \text{em } S^r \ . \tag{12.39}$$

1.5.3 Condições de contorno

Na Mecânica dos Sólidos Deformáveis as condições de contorno essenciais são

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} \ , \quad \text{em } S_u^r \ , \tag{12.40}$$

e as condições de contorno naturais são

$$\boldsymbol{t}^r = \overline{\boldsymbol{t}}^r \ , \quad \text{em } S_t^r \ . \tag{12.41}$$

com $S^r = S_t^r \cup S_u^r$. Assim sendo, podem-se restringir os campos de deslocamentos virtuais àqueles nos quais

$$\delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } S_u^r \tag{12.42}$$

e o trabalho virtual dos esforços externos pode ser definido como

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_{V^r} \boldsymbol{b}^r \cdot \delta \boldsymbol{u} dV^r + \int_{S_t^r} \overline{\boldsymbol{t}}^r \cdot \delta \boldsymbol{u} dS^r \ . \tag{12.43}$$

Desta forma, com a ajuda de (1.29), (12.41) e (12.42), tem-se

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} + \delta T + \int_{V^r} (\text{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r - \rho^r \ddot{\boldsymbol{u}}) \cdot \delta \boldsymbol{u} dV^r + \int_{S_t^r} (\overline{\boldsymbol{t}}^r - \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r) \cdot \delta \boldsymbol{u} dS^r \ . \tag{12.44}$$

Logo, a seguinte proposição é válida

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} + \delta T \ , \quad \forall \delta \boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1(V^r) \ \Leftrightarrow \begin{cases} \text{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r = \rho^r \ddot{\boldsymbol{u}} & \text{em } V^r \quad \text{e} \\ \overline{\boldsymbol{t}}^r = \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r & \text{em } S_t^r \end{cases} \ . \tag{12.45}$$

Assim

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} + \delta T \ , \quad \forall \delta \boldsymbol{u} \in \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1(V^r) \mid \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \ \text{ em } S_u^r \right\}, \tag{12.46}$$

é uma condição necessária e suficiente para que o sólido esteja externa e internamente em equilíbrio dinâmico, entendendo-se por *equilíbrio dinâmico interno* a equação

$$\text{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r = \rho^r \ddot{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } V^r \tag{12.47}$$

e por *equilíbrio dinâmico externo* a equação

$$\overline{\boldsymbol{t}}^r = \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r \quad \text{em } S_t^r \ . \tag{12.48}$$

Esta proposição também é conhecida como *teorema dos trabalhos virtuais*. Em processos quase-estáticos, tem-se

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} + \int_{V^r} (\text{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r) \cdot \delta \boldsymbol{u} dV^r + \int_{S_t^r} (\overline{\boldsymbol{t}}^r - \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r) \cdot \delta \boldsymbol{u} dS^r \ . \tag{12.49}$$

Logo

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} \ , \quad \forall \delta \boldsymbol{u} \ \Leftrightarrow \begin{cases} \text{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r = \boldsymbol{o} & \text{em } V^r \quad \text{e} \\ \overline{\boldsymbol{t}}^r = \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r & \text{em } S_t^r \end{cases} \ . \tag{12.50}$$

Assim, portanto,

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} \ , \quad \forall \delta \boldsymbol{u} \in \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1(V^r) \mid \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \ \text{ em } S_u^r \right\}, \tag{12.51}$$

é uma condição necessária e suficiente para que o sólido esteja externa e internamente em equilíbrio estático, ou seja, para que sejam satisfeitas as seguintes equações

$$\text{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V^r \quad \text{e} \quad \overline{\boldsymbol{t}}^r = \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r \quad \text{em } S_t^r \ . \tag{12.52}$$

Observação 12.6

Lembrando-se de (12.9), pode-se definir a deformação virtual

$$\delta \boldsymbol{E} = \text{Sym}\left(\boldsymbol{F}^T \delta \boldsymbol{F}\right), \tag{12.53}$$

de modo que

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{V^r} \boldsymbol{S} : \delta \boldsymbol{E} dV^r \ . \tag{12.54}$$

1.6 Potenciais

Chama-se *potencial* de uma força $\boldsymbol{f}$ aplicada em um ponto, cujo deslocamento é dado por $\boldsymbol{u}$, a função $\psi(\boldsymbol{u})$ tal que

$$\boldsymbol{f} = -\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{u}} \ . \tag{12.55}$$

Note-se que

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} = -\boldsymbol{f} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} = -P \tag{12.56}$$

e

$$W = -\int_{t_a}^{t_b} \dot{u} dt = -\Delta u \ . \tag{12.57}$$

Uma força que possui o potencial ψ acima é dita *conservativa*.

Definição 12.13: Potencial das forças de volume

Chama-se *potencial das forças de volume* $\boldsymbol{b}^r$, ou forças por unidade de volume de referência, a função $\psi_V(\boldsymbol{u})$ tal que

$$\boldsymbol{b}^r = -\frac{\partial \psi_V}{\partial \boldsymbol{u}} \ . \tag{12.58}$$

Definição 12.14: Potencial das forças superficiais externas

Chama-se *potencial das forças superficiais externas* $\overline{\boldsymbol{t}}^r$, ou forças por unidade de superfície de referência, a função $\psi_S(\boldsymbol{u})$ tal que

$$\overline{\boldsymbol{t}}^r = -\frac{\partial \psi_S}{\partial \boldsymbol{u}} \ . \tag{12.59}$$

Definição 12.15: Energia Potencial dos esforços internos

Chama-se *energia potencial dos esforços externos* o funcional $U_{\text{ext}}(\boldsymbol{u})$ dado por

$$U_{\text{ext}} = \int_{V^r} \psi_V(\boldsymbol{u}) dV^r + \int_{S^r} \psi_S(\boldsymbol{u}) dS^r \ . \tag{12.60}$$

Sólidos submetidos a carregamentos externos para os quais exista o funcional $U_{\text{ext}}(\boldsymbol{u})$ são chamados de *externamente conservativos*. Os carregamentos externos são então denominados *conservativos*.

Propriedades 12.2

Se o potencial dos esforços externos existir, então

$$P_{\text{ext}} = -\dot{U}_{\text{ext}} \tag{12.61}$$

A verificação de (12.61) é feita diferenciando-se (12.60) no tempo e utilizando-se a regra da cadeia e as definições (12.58) e (12.59). De (12.61) conclui-se que

$$W_{\text{ext}} = -\Delta U_{\text{ext}} \ . \tag{12.62}$$

Exemplos 12.1

Quando o carregamento externo não depende dos deslocamentos, o potencial dos esforços externos é dado por

$$U_{\text{ext}} = -\int_{V^r} \boldsymbol{b}^r \cdot \boldsymbol{u} dV^r - \int_{S_t^r} \overline{\boldsymbol{t}}^r \cdot \boldsymbol{u} dS^r \ . \tag{12.63}$$

Definição 12.16: Energia de deformação específica

Chama-se *potencial dos esforços internos por unidade de volume de referência* a função $\psi(\boldsymbol{F})$ tal que

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{F}} \ . \tag{12.64}$$

O potencial dos esforços internos por unidade de volume de referência também pode ser definido pela função $\psi(\boldsymbol{E})$ tal que

$$\boldsymbol{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{E}} \ . \tag{12.65}$$

O potencial dos esforços internos por unidade de volume de referência também é chamado de *energia de deformação por unidade de volume de referência* ou *energia de deformação específica*. Somente sólidos de materiais hiperelásticos possuem energia de deformação e, por isso, são chamados de *internamente conservativos*.

Definição 12.17: Energia de deformação do sólido

Chama-se *energia potencial dos esforços internos* o funcional

$$U_{\text{int}}(\boldsymbol{u}) = \int_{V^r} \psi \circ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) dV^r \ . \tag{12.66}$$

onde $\psi \circ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = \psi(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}))$ e $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{I} + \nabla \boldsymbol{u}$, conforme a notação usual de composição de funções. O potencial dos esforços internos também é denominado *energia de deformação* do sólido.

Propriedades 12.3

Se o potencial dos esforços internos existir, então

$$P_{\text{int}} = \dot{U}_{\text{int}} \tag{12.67}$$

e

$$W_{\text{int}} = \Delta U_{\text{int}} \ . \tag{12.68}$$

num intervalo de tempo $\mathcal{I} = (t_a, t_b)$. A verificação de (12.67) é feita diferenciando-se (12.66) no tempo e utilizando-se a regra da cadeia e (12.64).

1.7 Energia Potencial e Energia Mecânica

Definição 12.18: Energia potencial de um sólido

Chama-se *energia potencial* do sólido o funcional

$$U(\boldsymbol{u}) = U_{\text{int}}(\boldsymbol{u}) + U_{\text{ext}}(\boldsymbol{u}) \ . \tag{12.69}$$

Observação 12.7

Observe-se que U é um funcional do campo de deslocamentos $\boldsymbol{u}$, sendo que $\boldsymbol{u}$ deve satisfazer as condições de contorno essenciais

$$\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u^r \,. \tag{12.70}$$

Logo o domínio do funcional $U : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ é

$$\mathcal{D} = \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1(V^r) \mid \boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u^r \right\}. \tag{12.71}$$

O espaço das variações admissíveis é, por sua vez, dado por

$$\delta\mathcal{D} = \left\{ \delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1(V^r) \mid \delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } S_u^r \right\}. \tag{12.72}$$

Propriedades 12.4

- A variação de (12.69) leva a

$$\delta U = \int_{V^r} \boldsymbol{P} : \delta\boldsymbol{F} dV^r - \int_{V^r} \boldsymbol{b}^r \cdot \delta\boldsymbol{u} dV^r - \int_{S_t^r} \overline{\boldsymbol{t}}^r \cdot \delta\boldsymbol{u} dS^r \quad , \tag{12.73}$$

  ou seja,

$$\delta U = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} \quad . \tag{12.74}$$

- A diferenciação de (12.69) no tempo leva, por sua vez, a

$$\dot{U} = P_{\text{int}} - P_{\text{ext}} \,. \tag{12.75}$$

Definição 12.19: Energia mecânica de um sólido

Chama-se *energia mecânica* o funcional de dois campos $E(\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}})$ dado por

$$E = U + T \,. \tag{12.76}$$

Sólidos para os quais U e, portanto, E existam são chamados de *conservativos*.

Propriedades 12.5: Conservação da energia mecânica

resultado é conhecido como *Teorema da Conservação da Energia Mecânica para Sólidos Conservativos*. Para demonstrá-lo, deriva-se (12.76) no tempo, obtendo-se, com a ajuda de (12.75) e (12.17),

$$\dot{E} = \dot{U} + \dot{T} = P_{\text{int}} - P_{\text{ext}} + \dot{T} = 0 \,. \tag{12.77}$$

Propriedades 12.6: Teorema da Energia Potencial

O campo de deslocamentos correspondente a uma configuração de equilíbrio estático de um sólido conservativo é um ponto estacionário da energia potencial. Isto vem diretamente de (12.74) e do Teorema dos Trabalhos Virtuais (12.50), ou seja,

$$\delta U = 0 \,, \quad \forall \delta\boldsymbol{u} \in \delta\mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r = \boldsymbol{o} & \text{em } V^r \quad \text{e} \\ \overline{\boldsymbol{t}}^r = \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r & \text{em } S_t^r \end{cases} . \tag{12.78}$$

Este resultado é conhecido como *Teorema da Energia Potencial*.

1.8 Funcional misto de Hu-Washizu

O funcional misto de Hu-Washizu foi formulado em 1960 no contexto da Linearidade Geométrica (veja seção 2.8 ainda neste Capítulo). Aqui ele é generalizado para a Não-Linearidade Geométrica, da seguinte forma

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{L},\boldsymbol{P}) = \int_{V^r} \psi(\boldsymbol{L})\,dV^r + \int_{S_t^r} \psi_S(\boldsymbol{u})\,dS^r + \int_{V^r} \psi_V(\boldsymbol{u})\,dV^r + \\ - \int_{V^r} \boldsymbol{P} : (\boldsymbol{L} - \nabla \boldsymbol{u})\,dV^r - \int_{S_u^r} (\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r)\cdot(\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}})\,dS^r \ . \end{aligned} \tag{12.79}$$

Observação 12.8

Note-se que $H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ é um funcional de três campos com

$$\mathcal{D} = \mathcal{H}_1(V^r) \times \mathcal{H}_0(V^r) \times \mathcal{H}_0(V^r) \tag{12.80}$$

e sem condições de contorno essenciais. Logo $\delta\mathcal{D} = \mathcal{D}$. A variação de (12.79) resulta em

$$\begin{aligned} \delta H = \int_{V^r} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{L}} : \delta\boldsymbol{L} + \frac{\partial \psi_V}{\partial \boldsymbol{u}} \cdot \delta\boldsymbol{u} - \delta\boldsymbol{P} : (\boldsymbol{L} - \nabla\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{P} : (\delta\boldsymbol{L} - \nabla\delta\boldsymbol{u}) \right] dV^r + \\ + \int_{S_t^r} \frac{\partial \psi_S}{\partial \boldsymbol{u}} \cdot \delta\boldsymbol{u}\,dS^r - \int_{S_u^r} [(\delta\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r)\cdot(\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}}) + (\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r)\cdot\delta\boldsymbol{u}]\,dS^r \ . \end{aligned} \tag{12.81}$$

Aplicando-se o Teorema do Divergente em $\int_{S_u^r} (\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r)\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dS^r$, tem-se

$$\int_{S_u^r} (\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r)\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dS^r = -\int_{S_t^r} (\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r)\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dS^r + \int_{V^r} (\mathrm{div}\boldsymbol{P}\cdot\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{P} : \nabla\delta\boldsymbol{u})\,dV^r. \tag{12.82}$$

Introduzindo (12.82) em (12.81) e reagrupando, obtém-se

$$\begin{aligned} \delta H = \int_{V^r} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{L}} - \boldsymbol{P} \right) : \delta\boldsymbol{L} - \left(\mathrm{div}\boldsymbol{P} - \frac{\partial \psi_V}{\partial \boldsymbol{u}} \right) \cdot \delta\boldsymbol{u} - \delta\boldsymbol{P} : (\boldsymbol{L} - \nabla\boldsymbol{u}) \right] dV^r + \\ + \int_{S_t^r} \left(\frac{\partial \psi_S}{\partial \boldsymbol{u}} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r \right) \cdot \delta\boldsymbol{u}\,dS^r - \int_{S_u^r} (\delta\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r)\cdot(\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}})\,dS^r. \end{aligned} \tag{12.83}$$

Pelo Lema Fundamental do Cálculo Variacional tem-se de (12.83) as seguintes equações

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{P} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{L}}, \quad \mathrm{div}\boldsymbol{P} = \frac{\partial \psi_V}{\partial \boldsymbol{u}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{L} = \nabla\boldsymbol{u} \quad \text{em } V^r \ , \\ &\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r = -\frac{\partial \psi_S}{\partial \boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_t^r \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u^r \ . \end{aligned} \tag{12.84}$$

(12.84) engloba todas as equações e condições de contorno da Teoria da Elasticidade sob Não-linearidade Geométrica. Funcionais como o de Hu-Washizu são utilizados na formulação de métodos diretos mistos.

1.9 Funcional híbrido-misto geral

Considere-se o seguinte funcional

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{u},\boldsymbol{L},\boldsymbol{P},\boldsymbol{d},\boldsymbol{t}^r) = \int_{V^r} \psi(\boldsymbol{L})\,dV^r - \int_{V^r} \boldsymbol{b}^r\cdot\boldsymbol{u}\,dV^r - \int_{V^r} \boldsymbol{P} : (\boldsymbol{L} - \nabla\boldsymbol{u})\,dV^r + \\ - \int_{S_t^r} \overline{\boldsymbol{t}}^r\cdot\boldsymbol{d}\,dS^r - \int_{S_t^r} \boldsymbol{t}^r\cdot(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{d})\,dS^r - \int_{S_u^r} \boldsymbol{t}^r\cdot(\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}})\,dS^r \ . \end{aligned} \tag{1.85}$$

(1.85) é o *funcional híbrido-misto geral* da Mecânica dos Sólidos.

Observação 12.9

Note-se que $G : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ é um funcional de cinco campos com

$$\mathcal{D} = \mathcal{H}_1(V^r) \times \mathcal{H}_0(V^r) \times \mathcal{H}_0(V^r) \times \mathcal{H}_0(S_t^r) \times \mathcal{H}_0(S^r) \tag{1.86}$$

e sem condições de contorno essenciais. Logo $\delta\mathcal{D} = \mathcal{D}$. Realizando-se a variação de (1.86), chega-se a

$$\begin{aligned} \delta G = \int_{V^r} \Big[\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{L}} : \delta \boldsymbol{L} - \boldsymbol{b}^r \cdot \delta \boldsymbol{u} - \delta \boldsymbol{P} : (\boldsymbol{L} - \nabla \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{P} : (\delta \boldsymbol{L} - \nabla \delta \boldsymbol{u}) \Big] dV^r + \\ - \int_{S_t^r} \overline{\boldsymbol{t}}^r \cdot \delta \boldsymbol{d} dS^r - \int_{S_t^r} [\boldsymbol{t}^r \cdot (\delta \boldsymbol{u} - \delta \boldsymbol{d}) + \delta \boldsymbol{t}^r \cdot (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{d})] dS^r + \\ - \int_{S_u^r} [\delta \boldsymbol{t}^r \cdot (\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{t}^r \cdot \delta \boldsymbol{u}] dS^r \ . \end{aligned} \tag{1.87}$$

Adicionando-se a identidade

$$\int_{S_u^r} (\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r) \cdot \delta \boldsymbol{u} dS^r + \int_{S_t^r} (\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r) \cdot \delta \boldsymbol{u} dS^r - \int_{V^r} (\mathrm{div}\boldsymbol{P} \cdot \delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{P} : \nabla \delta \boldsymbol{u}) dV^r = 0 \tag{1.88}$$

a (1.87) e reagrupando, obtém-se

$$\begin{aligned} \delta G = \int_{V^r} \Big[\Big(\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{L}} - \boldsymbol{P} \Big) : \delta \boldsymbol{L} - \delta \boldsymbol{P} : (\boldsymbol{L} - \nabla \boldsymbol{u}) - (\mathrm{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r) \cdot \delta \boldsymbol{u} \Big] dV^r + \\ + \int_{S_t^r} \big[(\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r - \boldsymbol{t}^r) \cdot \delta \boldsymbol{u} + \big(\boldsymbol{t}^r - \overline{\boldsymbol{t}}^r \big) \cdot \delta \boldsymbol{d} - \delta \boldsymbol{t}^r \cdot (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{d}) \big] dS^r + \\ + \int_{S_u^r} [(\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r - \boldsymbol{t}^r) \cdot \delta \boldsymbol{u} - \delta \boldsymbol{t}^r \cdot (\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}})] dS^r. \end{aligned} \tag{1.89}$$

Pelo Lema Fundamental do Cálculo Variacional obtém-se de (1.89) as seguintes equações

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{P} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{L}}, \quad \boldsymbol{L} = \nabla \boldsymbol{u} \quad \text{e} \quad \mathrm{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V^r \ , \\ &\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r = \boldsymbol{t}^r \ , \quad \boldsymbol{t}^r = \overline{\boldsymbol{t}}^r \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{d} \quad \text{em } S_t^r \ , \\ &\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r = \boldsymbol{t}^r \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u^r \ . \end{aligned} \tag{1.90}$$

Note-se que $\boldsymbol{d}$ são os deslocamentos em S_t^r e $\boldsymbol{t}^r$ são as forças superficiais em $S^r = S_t^r \cup S_u^r$. Funcionais como (1.85) são utilizados em métodos diretos híbridos-mistos.

Observação 12.10

Note-se que a equação local do equilíbrio expressa por $\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{F}\boldsymbol{P}^T$ não é obtida em (1.90). Por isso, ela precisa ser garantida na formulação de $\psi(\boldsymbol{L})$.

1.10 Funcionais híbridos de compatibilidade

Adotando-se *ab initio* a equação de compatibilidade $\boldsymbol{L} = \nabla \boldsymbol{u}$ em V^r, de (1.85) decorre o seguinte funcional híbrido de compatibilidade

$$\begin{aligned} Z(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{t}^r) = \int_{V^r} \psi(\nabla \boldsymbol{u}) dV^r - \int_{V^r} \boldsymbol{b}^r \cdot \boldsymbol{u} dV^r - \int_{S_t^r} \overline{\boldsymbol{t}}^r \cdot \boldsymbol{d} \, dS^r + \\ - \int_{S_t^r} \boldsymbol{t}^r \cdot (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{d}) dS^r - \int_{S_u^r} \boldsymbol{t}^r \cdot (\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}}) dS^r \ . \end{aligned} \tag{1.91}$$

Observação 12.11

Note-se que $Z : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ é um funcional de três campos com

$$\mathcal{D} = \mathcal{H}_1(V^r) \times \mathcal{H}_0(S_t^r) \times \mathcal{H}_0(S^r) \tag{1.92}$$

e sem condições de contorno essenciais. Logo $\delta\mathcal{D} = \mathcal{D}$. Realizando-se a variação de (1.91), chega-se a

$$\begin{aligned}\delta Z = &\int_{V^r}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\nabla\boldsymbol{u}} : \nabla\delta\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}^r\cdot\delta\boldsymbol{u}\right]dV^r - \int_{S_t^r}\overline{\boldsymbol{t}}^r\cdot\delta\boldsymbol{d}dS^r + \\ &- \int_{S_t^r}[\boldsymbol{t}^r\cdot(\delta\boldsymbol{u}-\delta\boldsymbol{d}) + \delta\boldsymbol{t}^r\cdot(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{d})]dS^r - \int_{S_u^r}[\delta\boldsymbol{t}^r\cdot(\boldsymbol{u}-\overline{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{t}^r\cdot\delta\boldsymbol{u}]dS^r\ .\end{aligned} \tag{1.93}$$

Adicionando-se a identidade (1.88) a (1.93) e reagrupando, obtém-se

$$\begin{aligned}\delta Z = &\int_{V^r}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\nabla\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{P}\right) : \nabla\delta\boldsymbol{u} - (\mathrm{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r)\cdot\delta\boldsymbol{u}\right]dV^r + \\ &+ \int_{S_t^r}[(\boldsymbol{t}^r - \overline{\boldsymbol{t}}^r)\cdot\delta\boldsymbol{d} + (\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r - \boldsymbol{t}^r)\cdot\delta\boldsymbol{u} - \delta\boldsymbol{t}^r\cdot(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{d})]dS^r + \\ &+ \int_{S_u^r}[(\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r - \boldsymbol{t}^r)\cdot\delta\boldsymbol{u} - \delta\boldsymbol{t}^r\cdot(\boldsymbol{u}-\overline{\boldsymbol{u}})]dS^r\ .\end{aligned} \tag{1.94}$$

Pelo Lema Fundamental do Cálculo Variacional obtém-se de (1.94) as seguintes equações

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{P} = \frac{\partial\psi}{\partial\nabla\boldsymbol{u}} \quad \text{e} \quad \mathrm{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V^r\ ,\\ &\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r = \boldsymbol{t}^r\ , \quad \boldsymbol{t}^r = \overline{\boldsymbol{t}}^r \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{d} \quad \text{em } S_t^r\ ,\\ &\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r = \boldsymbol{t}^r \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u^r\ .\end{aligned} \tag{1.95}$$

Note-se que $\boldsymbol{t}^r$ são as forças superficiais em $S^r = S_t^r \cup S_u^r$ e que $\boldsymbol{d}$ são os deslocamentos em S_t^r.

Observação 12.12

A equação local do equilíbrio dada por $\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{F}\boldsymbol{P}^T$ não é obtida em (1.95). Por isso, ela precisa ser garantida na formulação de $\psi(\nabla\boldsymbol{u})$.

Observação 12.13

Adotando-se *a priori* a equação de compatibilidade $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{d}$ em S_t^r, de (1.91) decorre o seguinte funcional

$$Y(\boldsymbol{u},\boldsymbol{t}^r) = \int_{V^r}\psi(\nabla\boldsymbol{u})dV^r - \int_{V^r}\boldsymbol{b}^r\cdot\boldsymbol{u}dV^r - \int_{S_t^r}\overline{\boldsymbol{t}}^r\cdot\boldsymbol{u}\,dS^r - \int_{S_u^r}\boldsymbol{t}^r\cdot(\boldsymbol{u}-\overline{\boldsymbol{u}})dS^r\ . \tag{1.96}$$

$Y : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ é um funcional de dois campos com

$$\mathcal{D} = \mathcal{H}_1(V^r) \times \mathcal{H}_0(S_u^r) \tag{1.97}$$

e sem condições de contorno essenciais. Logo $\delta\mathcal{D} = \mathcal{D}$. A variação de (1.96) leva a

$$\delta Y = \int_{V^r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial(\nabla\boldsymbol{u})} : \nabla\delta\boldsymbol{u} - \boldsymbol{b}^r\cdot\delta\boldsymbol{u}\right)dV^r + \int_{S_t^r}\overline{\boldsymbol{t}}^r\cdot\delta\boldsymbol{u}dS^r - \int_{S_u^r}\delta\boldsymbol{t}^r\cdot(\boldsymbol{u}-\overline{\boldsymbol{u}})dS^r\ . \tag{1.98}$$

Somando-se a identidade (1.88) a (1.98) e reagrupando, obtém-se

$$\begin{aligned}\delta Y = &\int_{V^r}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial(\nabla\boldsymbol{u})} - \boldsymbol{P}\right) : \nabla\delta\boldsymbol{u} - (\mathrm{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r)\cdot\delta\boldsymbol{u}\right]dV^r + \\ &+ \int_{S_t^r}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r - \overline{\boldsymbol{t}}^r)\cdot\delta\boldsymbol{u}dS^r + \int_{S_u^r}[(\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r - \boldsymbol{t}^r)\cdot\delta\boldsymbol{u} - \delta\boldsymbol{t}^r\cdot(\boldsymbol{u}-\overline{\boldsymbol{u}})]dS^r.\end{aligned} \tag{1.99}$$

Pelo Lema Fundamental do Cálculo Variacional tem-se de (1.99) as seguintes equações

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial \psi}{\partial (\nabla \boldsymbol{u})} \quad \text{e} \quad \text{div}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V^r \ ,$$
$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r = \overline{\boldsymbol{t}}^r \quad \text{em } S_t^r \ , \quad \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r = \boldsymbol{t}^r \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u^r \ . \tag{1.100}$$

Note-se que $\boldsymbol{t}^r$ são as reações em S_u^r.

Observação 12.14

(1.91) ou (1.96) são utilizados na formulação de métodos diretos híbridos de compatibilidade ou de deslocamentos.

1.11 Teorias Estruturais

Definição 12.20: Teoria Estrutural

Dá-se o nome de *Teoria Estrutural* a qualquer teoria mecânica obtida a partir da Mecânica dos Sólidos Deformáveis, em consistência com qualquer das formulações integrais aqui apresentadas, através da introdução de restrições cinemáticas e estáticas.

Observação 12.15

O teorema dos trabalhos virtuais constitui-se em uma poderosa ferramenta para a formulação consistente das equações e condições de contorno de teorias estruturais, como as diversas teorias de barras, de placas e de cascas.

Exemplo 12.2: treliça plana

Considere-se a estrutura plana da Figura 12.1 abaixo. Pelo teorema de Pitágoras, têm-se

$$\ell^{r2} = a^2 + b^2 \quad \text{e} \quad \ell^2 = a^2 + (b-u)^2 \ .$$

Figura 12.1: Treliça

Derivando-se no tempo, obtém-se $2\ell\dot{\ell} = -2(b-u)\dot{u}$. Portanto, pode-se escrever

$$\delta\ell = -\ell^{-1}(b-u)\delta u \ .$$

Os trabalhos virtuais externo e interno são

$$\delta W_{\text{ext}} = P\delta u \quad \text{e} \quad \delta W_{\text{int}} = 2N\delta\ell \ ,$$

onde N é a força normal nas duas barras. De $\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}}$ e $\delta \ell = -\ell^{-1}(b-u)\delta u$ vem

$$P = -2N\ell^{-1}(b-u)\,.$$

Supondo que a elasticidade das barras seja dada por $\sigma = E\varepsilon$, onde $\sigma = \dfrac{N}{A^r}$ e $\varepsilon = \dfrac{\ell - \ell^r}{\ell^r}$, tem-se

$$N = EA^r\,\frac{\ell - \ell^r}{\ell^r} \quad \text{e}$$

$$P = -2EA^r\,\frac{\ell - \ell^r}{\ell^r}\,\frac{b-u}{\ell} = -2EA^r\,\frac{\sqrt{a^2+(b-u)^2} - \sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\frac{b-u}{\sqrt{a^2+(b-u)^2}}\,.$$

Figura 12.2: Resposta quase-estática da treliça

2 Formulações sob Linearidade Geométrica

As formulações a serem apresentadas nesta seção pressupõem a hipótese de Linearidade Geométrica. Como ela confunde a configuração deformada com a de referência, tem-se em geral que, na notação aqui empregada,

$$(\bullet) = (\bullet)^r\,. \tag{12.101}$$

Além disso, as seguintes igualdades passam a ser válidas

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{S} = \boldsymbol{P} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{E} = \mathbb{I}_S\boldsymbol{L} = \text{Sym}(\nabla\boldsymbol{u})\,. \tag{12.102}$$

2.1 Potência e Trabalho dos Esforços Externos

Definição 12.21: Potência das forças de volume

A *potência das forças de volume* atuantes num sólido deformável é então definida por

$$P_V = \int_V \boldsymbol{b}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\,dV\,. \tag{12.103}$$

Definição 12.22: Potência das forças superficiais

Já a *potência das forças superficiais* sobre a superfície externa de um sólido deformável é dada por

$$P_S = \int_S \boldsymbol{t} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} dS \ . \tag{12.104}$$

Definição 12.23: Potência dos esforços externos

A *potência dos esforços externos* é definida por

$$P_{\text{ext}} = P_V + P_S = \int_V \boldsymbol{b} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} dV + \int_S \boldsymbol{t} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} dS \ . \tag{12.105}$$

Definição 12.24: Trabalho dos esforços externos

O *trabalho dos esforços externos* num intervalo de tempo (t_a, t_b) é definido por

$$W_{\text{ext}} = \int_{t_a}^{t_b} P_{\text{ext}} dt \ . \tag{12.106}$$

2.2 Potência e Trabalho dos Esforços Internos

Definição 12.25: Potência dos esforços internos

A *potência dos esforços internos* de um sólido deformável é definida por

$$P_{\text{int}} = \int_{V^r} \boldsymbol{T} : \dot{\boldsymbol{E}} dV^r \ . \tag{12.107}$$

Definição 12.26: Trabalho dos esforços internos

O *trabalho dos esforços internos* num intervalo de tempo $\mathcal{I} = (t_a, t_b)$ é definido por

$$W_{\text{int}} = \int_{t_a}^{t_b} P_{\text{int}} dt \ . \tag{12.108}$$

2.3 Energia Cinética

Definição 12.27: Energia cinética de um sólido

A *energia cinética* de um sólido deformável é um funcional definido por

$$T = \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} dV \ . \tag{12.109}$$

Observação 12.16

A derivada no tempo de (12.110) fornece

$$\dot{T} = \int_V \frac{1}{2} \rho (\dot{\boldsymbol{u}} \cdot \ddot{\boldsymbol{u}} + \ddot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}) dV = \int_{V^r} \rho \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \ddot{\boldsymbol{u}} dV. \tag{12.111}$$

2.4 Teorema das Potências

A cada instante em um sólido deformável vale

$$P_{\text{ext}} = P_{\text{int}} + \dot{T} \ . \tag{12.112}$$

Este resultado é conhecido como *Teorema das Potências*.

Observação 12.17

Para demonstrá-lo, deve-se lembrar que $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}$. Logo, com a ajuda do teorema do divergente, tem-se

$$\begin{aligned} P_S &= \int_S \boldsymbol{t} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} dS = \int_S (\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}) \cdot \dot{\boldsymbol{u}} dS = \\ &= \int_V \left(\operatorname{div} \boldsymbol{T} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{T} : \dot{\boldsymbol{E}} \right) dV = \\ &= \int_V (\operatorname{div} \boldsymbol{T} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}) dV + P_{\text{int}} \ . \end{aligned} \tag{12.113}$$

Introduzindo-se em (12.113) a primeira equação local do movimento $\operatorname{div} \boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \rho \ddot{\boldsymbol{u}}$, obtém-se

$$P_S = \int_{V^r} (\rho^r \ddot{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{b}^r) \cdot \dot{\boldsymbol{u}} dV^r + P_{\text{int}} \ . \tag{12.114}$$

Logo, tem-se

$$P_S = \dot{T} - P_V + P_{\text{int}} \ . \tag{12.115}$$

Donde decorre (12.112).

Observação 12.18

Integrando-se (12.112) num intervalo de tempo $\mathcal{I} = (t_a, t_b)$, obtém-se

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{int}} + \Delta T \ . \tag{12.116}$$

Observação 12.19

Num processo quase-estático, tem-se

$$P_{\text{ext}} = P_{\text{int}} \ , \tag{12.117}$$

e, num intervalo $\mathcal{I} = (t_a, t_b)$,

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{int}} \ . \tag{12.118}$$

2.5 Teorema dos Trabalhos Virtuais

Definição 12.28: Deslocamentos virtuais

Seja um campo de deslocamentos $\delta \boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1(V)$, denominado campo dos *deslocamentos virtuais*.

Observação 12.20

Não é feita nenhuma hipótese sobre a magnitude dos deslocamentos virtuais

Definição 12.29: Trabalho virtual dos esforços externos

O *trabalho virtual dos esforços externos* é definido por

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_V \boldsymbol{b} \cdot \delta \boldsymbol{u} dV + \int_S \boldsymbol{t} \cdot \delta \boldsymbol{u} dS \ . \tag{12.119}$$

Definição 12.30: Trabalho virtual dos esforços internos

O *trabalho virtual dos esforços internos* é definido, como se segue

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V \boldsymbol{T} : \delta \boldsymbol{E} dV \ , \tag{12.120}$$

onde

$$\delta \boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\big[\nabla \delta \boldsymbol{u} + (\nabla \delta \boldsymbol{u})^T\big] = \text{Sym}(\nabla \delta \boldsymbol{u}) \ . \tag{12.121}$$

Definição 12.31: Variação virtual da energia cinética

A *variação virtual da energia cinética* é, por sua vez, dada por

$$\delta T = \int_V \rho \ddot{\boldsymbol{u}} \cdot \delta \boldsymbol{u} dV \ . \tag{12.122}$$

2.5.1 Processos dinâmicos

Aplicando-se o teorema do divergente de forma semelhante ao Teorema das Potências, tem-se

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} + \delta T + \int_V (\text{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} - \rho \ddot{\boldsymbol{u}}) \cdot \delta \boldsymbol{u} dV + \int_S (\boldsymbol{t} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}) \cdot \delta \boldsymbol{u} dS \ . \tag{12.123}$$

Logo

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} + \delta T \ , \quad \forall \delta \boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1(V) \ \Leftrightarrow \begin{cases} \text{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \rho \ddot{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } V \quad \text{e} \\ \boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \quad \text{em } S \end{cases} . \tag{12.124}$$

Portanto

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} + \delta T \ , \quad \forall \delta \boldsymbol{u} \ , \tag{12.125}$$

é uma condição necessária e suficiente para que o sólido esteja externa e internamente em equilíbrio dinâmico, entendendo-se por *equilíbrio dinâmico interno* a equação

$$\text{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \rho \ddot{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } V \tag{12.126}$$

e por *equilíbrio dinâmico externo* a equação

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \quad \text{em } S \ . \tag{12.127}$$

Esta proposição é conhecida como *teorema dos trabalhos virtuais*.

2.5.2 Processos quase-estáticos

Em processos quase-estáticos, tem-se

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} + \int_V (\text{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b}) \cdot \delta \boldsymbol{u} dV + \int_S (\boldsymbol{t} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}) \cdot \delta \boldsymbol{u} dS \ . \tag{12.128}$$

Logo

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} \ , \quad \forall \delta \boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1(V) \ \Leftrightarrow \begin{cases} \text{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V \quad \text{e} \\ \boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \quad \text{em } S \end{cases} . \tag{12.129}$$

Portanto

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} \ , \quad \forall \delta \boldsymbol{u} \ , \tag{12.130}$$

é uma condição necessária e suficiente para que o sólido esteja externa e internamente em equilíbrio estático, entendendo-se por equilíbrio interno e externo respectivamente as equações

$$\text{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V \quad \text{e} \quad \boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \quad \text{em } S \ . \tag{12.131}$$

2.5.3 Condições de contorno

Na Mecânica dos Sólidos Deformáveis as condições de contorno essenciais são

$$\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \ , \quad \text{em } S_u \ , \tag{12.132}$$

e as naturais

$$\boldsymbol{t} = \overline{\boldsymbol{t}} \ , \quad \text{em } S_t \ . \tag{12.133}$$

Assim sendo, pode-se restringir os campos de deslocamentos virtuais àqueles nos quais

$$\delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } S_u \tag{12.134}$$

e o trabalho virtual dos esforços externos pode ser definido como

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_V \boldsymbol{b} \cdot \delta\boldsymbol{u} dV + \int_{S_t} \overline{\boldsymbol{t}} \cdot \delta\boldsymbol{u} dS \ . \tag{12.135}$$

Desta forma, com a ajuda do teorema do divergente, tem-se

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} + \delta T + \int_V (\operatorname{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}}) \cdot \delta\boldsymbol{u} dV + \int_{S_t} (\overline{\boldsymbol{t}} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}) \cdot \delta\boldsymbol{u} dS \ . \tag{12.136}$$

Logo

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} + \delta T \ , \quad \forall \delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1(V) \ \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \rho\ddot{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } V \quad \text{e} \\ \overline{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \quad \text{em } S_t \end{cases} \ . \tag{12.137}$$

Portanto

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} + \delta T \ , \quad \forall \delta\boldsymbol{u} \in \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1(V) \mid \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \text{ em } S_u \right\} , \tag{12.138}$$

é uma condição necessária e suficiente para que o sólido esteja externa e internamente em equilíbrio dinâmico, entendendo-se por equilíbrio dinâmico interno a equação

$$\operatorname{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \rho\ddot{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } V \tag{12.139}$$

e por equilíbrio dinâmico externo a equação

$$\overline{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \quad \text{em } S_t \ . \tag{12.140}$$

Esta proposição é conhecida como *teorema dos trabalhos virtuais*.

Em processos quase-estáticos, tem-se

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} + \int_V (\operatorname{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b}) \cdot \delta\boldsymbol{u} dV + \int_{S_t} (\overline{\boldsymbol{t}} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}) \cdot \delta\boldsymbol{u} dS \ . \tag{12.141}$$

Logo

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} \ , \quad \forall \delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1(V) \ \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V \quad \text{e} \\ \overline{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \quad \text{em } S_t \end{cases} \ . \tag{12.142}$$

Portanto

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} \ , \quad \forall \delta\boldsymbol{u} \in \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1(V) \mid \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \text{ em } S_u \right\} , \tag{12.143}$$

é uma condição necessária e suficiente para que o sólido esteja externa e internamente em equilíbrio estático, entendendo-se por equilíbrio interno e externo as equações

$$\operatorname{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V \quad \text{e} \quad \overline{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \quad \text{em } S_t \ . \tag{12.144}$$

2.6 Potenciais

Definição 12.32: Potencial das forças de volume

Chama-se *potencial das forças de volume* a função $\psi_V(\boldsymbol{u})$ tal que

$$\boldsymbol{b} = -\frac{\partial \psi_V}{\partial \boldsymbol{u}} \,. \tag{12.145}$$

Definição 12.33: Potencial das forças superficiais externas

Chama-se *potencial das forças superficiais externas* a função $\psi_S(\boldsymbol{u})$ tal que

$$\overline{\boldsymbol{t}} = -\frac{\partial \psi_S}{\partial \boldsymbol{u}} \,. \tag{12.146}$$

Definição 12.34: Energia potencial dos esforços externos

Chama-se *energia potencial dos esforços externos* o funcional $U_{\text{ext}}(\boldsymbol{u})$ dado por

$$U_{\text{ext}} = \int_V \psi_V(\boldsymbol{u})\, dV + \int_S \psi_S(\boldsymbol{u})\, dS \,. \tag{12.147}$$

Sólidos submetidos a carregamentos externos para os quais exista o funcional $U_{\text{ext}}(\boldsymbol{u})$ são chamados de *externamente conservativos*. Os carregamentos externos são então denominados *conservativos*.

Propriedades 12.7

- Se o potencial dos esforços externos existir, então

$$P_{\text{ext}} = -\dot{U}_{\text{ext}} \tag{12.148}$$

- De (12.148) conclui-se que

$$W_{\text{ext}} = -\Delta U_{\text{ext}} \,. \tag{12.149}$$

Exemplo 12.3

Quando o carregamento externo não depende dos deslocamentos o potencial dos esforços externos é dado por

$$U_{\text{ext}} = -\int_V \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}\, dV - \int_{S_t} \overline{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{u}\, dS \,. \tag{12.150}$$

Definição 12.35: Energia de deformação específica

Chama-se *potencial dos esforços internos* a função $\psi(\boldsymbol{E})$ tal que

$$\boldsymbol{T} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{E}} \,. \tag{12.151}$$

O potencial dos esforços internos também é chamado de *energia de deformação específica*. Somente sólidos de materiais hiperelásticos possuem energia de deformação e, por isso, são chamados de *internamente conservativos*.

Exemplo 12.4: Material hiperelástico linear

No caso de linearidade física, ou seja, de elasticidade linear, sem tensões iniciais, $\psi(\boldsymbol{E})$ é dado por

$$\psi(\boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \mathbb{D}\boldsymbol{E} \,. \tag{12.152}$$

Assim

$$\boldsymbol{T} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{E}} = \mathbb{D}\boldsymbol{E} \,. \tag{12.153}$$

Logo, pode-se escrever

$$\psi(\boldsymbol{E}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \boldsymbol{T} \,. \tag{12.154}$$

Definição 12.36: Energia de deformação do sólido

Chama-se *energia potencial dos esforços internos* o funcional

$$U_{\text{int}}(\boldsymbol{u}) = \int_V \psi \circ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) dV \,, \tag{12.155}$$

com a notação usual de composição de funções. O potencial dos esforços internos também é denominado *energia de deformação* do sólido.

Exemplo 12.5: Material hiperelástico linear

No caso de elasticidade linear sem tensões iniciais resulta

$$U_{\text{int}}(\boldsymbol{u}) = \int_V \frac{1}{2}\boldsymbol{E} : \mathbb{D}\boldsymbol{E} dV \,. \tag{12.156}$$

Utilizando-se o Teorema dos Trabalhos Virtuais (12.143), com $\delta\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}$ e $\delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$, tem-se

$$\int_V \boldsymbol{T} : \boldsymbol{E} dV = \int_V \boldsymbol{E} : \mathbb{D}\boldsymbol{E} dV = \int_V \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} dV + \int_{S_t} \overline{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{u} dS \,. \tag{12.157}$$

Propriedade 12.8: Teorema de Clapeyron

Se o material for elástico linear sem tensões iniciais, de (12.156) e (12.157), obtém-se

$$U_{\text{int}} = \frac{1}{2}\left(\int_V \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} dV + \int_{S_t} \overline{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{u} dS\right), \tag{12.158}$$

resultado conhecido como *Teorema de Clapeyron*.

Propriedades 12.9

a) Se o potencial dos esforços internos existir, então

$$P_{\text{int}} = \dot{U}_{\text{int}} \tag{12.159}$$

b) Da mesma forma, tem-se, num intervalo de tempo $\mathcal{I} = (t_a, t_b)$,

$$W_{\text{int}} = \Delta U_{\text{int}} \,. \tag{12.160}$$

2.7 Energia Potencial e Energia Mecânica

Definição 12.37: Energia Potencial de um sólido

Chama-se *energia potencial* do sólido o funcional

$$U(\boldsymbol{u}) = U_{\text{int}}(\boldsymbol{u}) + U_{\text{ext}}(\boldsymbol{u}) \,. \tag{12.161}$$

Observação 12.21

Observe-se que U é um funcional do campo de deslocamentos $\boldsymbol{u}$, sendo que $\boldsymbol{u}$ deve satisfazer as condições de contorno essenciais

$$\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u \ . \tag{12.162}$$

Logo o domínio do funcional $U : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ pode ser

$$\mathcal{D} = \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1(V) \mid \boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \text{ em } S_u \right\} . \tag{12.163}$$

O espaço das variações admissíveis é, por sua vez, dado por

$$\delta\mathcal{D} = \left\{ \delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1(V) \mid \delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \text{ em } S_u \right\} . \tag{12.164}$$

Exemplo 12.6: Sólido elástico linear sob carregamento constante

Quando os esforços externos não dependem dos deslocamentos e o material é elástico linear sem tensões iniciais, a energia potencial é dada por

$$U = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{T} : \boldsymbol{E} dV - \int_V \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} dV - \int_{S_t} \overline{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{u} dS \ . \tag{12.165}$$

Observação 12.22

A variação de (12.161) leva a

$$\delta U = \int_V \boldsymbol{T} : \delta\boldsymbol{E} dV - \int_V \boldsymbol{b} \cdot \delta\boldsymbol{u} dV - \int_{S_t} \overline{\boldsymbol{t}} \cdot \delta\boldsymbol{u} dS \ , \tag{12.166}$$

ou seja,

$$\delta U = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} \ . \tag{12.167}$$

Observação 12.23

A diferenciação de (12.161) no tempo leva, por sua vez, a

$$\dot{U} = P_{\text{int}} - P_{\text{ext}} \ . \tag{12.168}$$

Definição 12.38: Energia mecânica

Chama-se *energia mecânica* o funcional de dois campos $E(\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}})$ dado por

$$E = U + T \ . \tag{12.169}$$

Sólidos para os quais U e, portanto, E existam são chamados de *conservativos*.

Propriedades 12.10: Teorema da Conservação da Energia Mecânica

A energia mecânica de um sólido conservativo é constante no tempo, isto é, se conserva. Este resultado é conhecido como *Teorema da Conservação da Energia Mecânica para Sólidos Conservativos* e pode ser expresso por

$$\dot{E} = 0 \ . \tag{12.170}$$

Propriedades 12.11: Teorema da Energia Potencial

O campo de deslocamentos correspondente a uma configuração de equilíbrio estático de um sólido conservativo é um ponto estacionário da energia potencial, ou seja,

$$\delta U = 0\,, \quad \forall \delta \boldsymbol{u} \in \delta\mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \text{ em } V \quad \text{e} \\ \overline{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \text{ em } S_t \end{cases} . \tag{12.171}$$

Este resultado é conhecido como *Teorema da Energia Potencial*. Se U for convexo o ponto estacionário corresponde a um mínimo.

Propriedades 12.12: Unicidade do Mínimo da Energia Potencial

Quando os esforços externos não dependem dos deslocamentos e o material é elástico linear sem tensões iniciais, a energia potencial é dada por

$$U = \int_V \frac{1}{2}\boldsymbol{T} : \boldsymbol{E} dV - \int_V \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u} dV - \int_{S_t} \overline{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{u} dS \ . \tag{12.172}$$

Logo

$$U(\boldsymbol{u}_b) - U(\boldsymbol{u}_a) - \delta U(\boldsymbol{u}_a, \boldsymbol{u}_b - \boldsymbol{u}_a) = \int_V \psi(\boldsymbol{E}_b - \boldsymbol{E}_a)\, dV \ . \tag{12.173}$$

Assim, se

$$u(\boldsymbol{E}) > 0\,, \forall \boldsymbol{E} \neq \boldsymbol{O}\,. \tag{12.174}$$

então U é estritamente convexo e a solução do problema estático da Teoria Linear da Elasticidade existe, é única e minimiza a energia potencial. (12.174) é conhecido como *Teorema de Kirchhoff*.

Observação 12.24

Para materiais elásticos lineares isótropos pode-se mostrar, de acordo com o Teorema de Kirchhoff do Capítulo 10, que (12.174) redunda em

$$E > 0 \quad \text{e} \quad -1 < \nu < \frac{1}{2}\,. \tag{12.175}$$

2.8 Funcional misto de Hu-Washizu

O funcional misto de Hu-Washizu[62] foi formulado em 1955 da seguinte forma

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{T}) = & \int_V \psi(\boldsymbol{E})\, dV + \int_{S_t} \psi_S(\boldsymbol{u})\, dS + \int_V \psi_V(\boldsymbol{u})\, dV + \\ & - \int_V \boldsymbol{T} : (\boldsymbol{E} - \operatorname{Sym}(\nabla\boldsymbol{u}))\, dV - \int_{S_u} (\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}})\, dS\,. \end{aligned} \tag{12.176}$$

Note-se que $H : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ é um funcional de três campos com

$$\mathcal{D} = \mathcal{H}_1(V) \times \mathcal{H}_0(V) \times \mathcal{H}_0(V) \tag{12.177}$$

e sem condições de contorno essenciais. Logo $\delta\mathcal{D} = \mathcal{D}$. Realizando-se a variação de (12.176), obtém-se

$$\begin{aligned} \delta H = & \int_V \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{E}} - \boldsymbol{T} \right) : \delta\boldsymbol{E} - \left(\operatorname{div}\boldsymbol{T} - \frac{\partial\psi_V}{\partial\boldsymbol{u}} \right) \cdot \delta\boldsymbol{u} - \delta\boldsymbol{T} : (\boldsymbol{E} - \operatorname{Sym}(\nabla\boldsymbol{u})) \right] dV + \\ & + \int_{S_t} \left(\frac{\partial\psi_S}{\partial\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \right) \cdot \delta\boldsymbol{u} dS - \int_V dV - \int_{S_u} (\delta\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}})\, dS\,. \end{aligned} \tag{12.178}$$

Pelo Lema Fundamental do Cálculo Variacional tem-se de (12.178) as seguintes equações

[62] H.C. Hu, "*On some Variational Principles in the Theory of Elasticity and Plasticity*", Scientia Sinica, 4, 1, 1955; K. Washizu, "*On the Variational Principles in the Theory of Elasticity and Plasticity*", Aeroelastic and Structures Laboratories, MIT, Tech. Report 25-18,1955.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{T} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{E}}\,, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{T} = \frac{\partial \psi_V}{\partial \boldsymbol{u}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{E} = \operatorname{Sym}(\nabla \boldsymbol{u}) \quad \text{em } V\,, \\
&\boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = -\frac{\partial \psi_S}{\partial \boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_t \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u\,.
\end{aligned}
\tag{12.179}
$$

(12.179) engloba todas as equações e condições de contorno da Teoria da Elasticidade sob Linearidade Geométrica. Funcionais como o Funcional de Hu-Washizu são utilizados na formulação de métodos diretos mistos.

Observação 12.25

H não é convexo. Logo a solução do problema estático da Teoria Linear da Elasticidade não corresponde a um mínimo de H.

Observação 12.26

Note-se que a equação local do equíbrio, expressa por $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T$, não é obtida em (12.179). Por isso, ela precisa ser garantida na formulação de $\psi(\boldsymbol{E})$.

2.9 Funcional híbrido-misto geral

Considere-se o seguinte funcional, que é uma generalização do Funcional de Hu-Washizu mostrado em (12.176),

$$
\begin{aligned}
G(\boldsymbol{u},\boldsymbol{E},\boldsymbol{T},\boldsymbol{d},\boldsymbol{t}) = \int_V \psi(\boldsymbol{E})\,dV^r - \int_V \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}\,dV - \int_V \boldsymbol{T} : (\boldsymbol{E} - \operatorname{Sym}(\nabla\boldsymbol{u}))\,dV + \\
- \int_{S_t} \overline{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{d}\,dS - \int_{S_t} \boldsymbol{t}\cdot(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{d})\,dS - \int_{S_u} \boldsymbol{t}\cdot(\boldsymbol{u}-\overline{\boldsymbol{u}})\,dS\,.
\end{aligned}
\tag{1.180}
$$

Observação 12.27

Note-se que $G : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ é um funcional de cinco campos com

$$
\mathcal{D} = \mathcal{H}_1(V)\times\mathcal{H}_0(V)\times\mathcal{H}_0(V)\times\mathcal{H}_0(S_t)\times\mathcal{H}_0(S_u) \tag{1.181}
$$

e sem condições de contorno essenciais. Logo $\delta\mathcal{D} = \mathcal{D}$. Realizando-se a variação de (1.180), chega-se a

$$
\begin{aligned}
\delta G = \int_V \left[\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{E}} : \delta\boldsymbol{E} - \boldsymbol{b}\cdot\delta\boldsymbol{u} - \delta\boldsymbol{T} : (\boldsymbol{E} - \operatorname{Sym}(\nabla\boldsymbol{u})) - \boldsymbol{T} : (\delta\boldsymbol{E} - \operatorname{Sym}(\nabla\delta\boldsymbol{u}))\right] dV + \\
- \int_{S_t} \overline{\boldsymbol{t}}\cdot\delta\boldsymbol{d}\,dS - \int_{S_t} [\boldsymbol{t}\cdot(\delta\boldsymbol{u}-\delta\boldsymbol{d}) + \delta\boldsymbol{t}\cdot(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{d})]\,dS + \\
- \int_{S_u} [\delta\boldsymbol{t}\cdot(\boldsymbol{u}-\overline{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{t}\cdot\delta\boldsymbol{u}]\,dS\,.
\end{aligned}
\tag{1.182}
$$

Adicionando-se a identidade

$$
\int_{S_u} (\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dS + \int_{S_t} (\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dS - \int_V [\operatorname{div}\boldsymbol{T}\cdot\delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{T} : \operatorname{Sym}(\nabla\delta\boldsymbol{u})]\,dV = 0 \tag{1.183}
$$

a (1.182) e reagrupando, obtém-se

$$\delta G = \int_V \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{E}} - \boldsymbol{T} \right) : \delta \boldsymbol{E} - \delta \boldsymbol{T} : (\boldsymbol{E} - \mathrm{Sym}(\nabla \boldsymbol{u})) - (\mathrm{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b}) \cdot \delta \boldsymbol{u} \right] dV +$$
$$+ \int_{S_t} (\boldsymbol{T}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{t}) \cdot \delta \boldsymbol{u} dS + \int_{S_t} (\boldsymbol{t} - \overline{\boldsymbol{t}}) \cdot \delta \boldsymbol{d}\, dS + \int_{S_t} \delta \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{d} - \boldsymbol{u})\, dS + \tag{1.184}$$
$$+ \int_{S_u} [(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{t}) \cdot \delta \boldsymbol{u} - \delta \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}})]\, dS.$$

Pelo Lema Fundamental do Cálculo Variacional tem-se de (1.184) as seguintes equações

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{T} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{E}}, \quad \boldsymbol{E} = \mathrm{Sym}(\nabla \boldsymbol{u}) \quad \text{e} \quad \mathrm{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V, \\ &\boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}, \quad \boldsymbol{t} = \overline{\boldsymbol{t}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{d} \quad \text{em } S_t, \\ &\boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u. \end{aligned} \tag{1.185}$$

Note-se que $\boldsymbol{d}$ são os deslocamentos em S_t e $\boldsymbol{t}$ são as forças superficiais em $S = S_t \cup S_u$.

Observação 12.28

Funcionais gerais como (1.180) podem ser utilizados na formulação da vários dos métodos diretos conhecidos.

Observação 12.29

Note-se que a equação local do equíbrio, expressa por $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T$, não é obtida em (1.185). Por isso, ela precisa ser garantida na formulação de $\psi(\boldsymbol{E})$.

2.10 Funcionais híbridos de compatibilidade

Adotando-se *ab initio* a equação de compatibilidade $\boldsymbol{E} = \mathrm{Sym}(\nabla \boldsymbol{u})$ em V, de (1.180) decorre o seguinte funcional híbrido de compatibilidade

$$\begin{aligned} Z(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{t}) = &\int_V \psi(\mathrm{Sym}(\nabla \boldsymbol{u}))\, dV - \int_V \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} dV - \int_{S_t} \overline{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{d}\, dS + \\ &- \int_{S_t} \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{d})\, dS - \int_{S_u} \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}})\, dS. \end{aligned} \tag{1.186}$$

Observação 12.30

Note-se que $Z : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ é um funcional de três campos com

$$\mathcal{D} = \mathcal{H}_1(V) \times \mathcal{H}_0(S_t) \times \mathcal{H}_0(S) \tag{1.187}$$

e sem condições de contorno essenciais. Logo $\delta \mathcal{D} = \mathcal{D}$. Realizando-se a variação de (1.186), chega-se a

$$\begin{aligned} \delta Z = &\int_V \left[\frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{Sym}(\nabla \boldsymbol{u})} : \mathrm{Sym}(\nabla \delta \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{b} \cdot \delta \boldsymbol{u} \right] dV - \int_{S_t} \overline{\boldsymbol{t}} \cdot \delta \boldsymbol{d}\, dS + \\ &- \int_{S_t} [\boldsymbol{t} \cdot (\delta \boldsymbol{u} - \delta \boldsymbol{d}) + \delta \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{d})]\, dS - \int_{S_u} [\delta \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{t} \cdot \delta \boldsymbol{u}]\, dS. \end{aligned} \tag{1.188}$$

Adicionando-se a identidade

$$\int_{S_u} (\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}) \cdot \delta \boldsymbol{u} dS + \int_{S_t} (\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}) \cdot \delta \boldsymbol{u} dS - \int_V [\mathrm{div}\boldsymbol{T} \cdot \delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{T} : \mathrm{Sym}(\nabla \delta \boldsymbol{u})]\, dV = 0 \tag{1.189}$$

a (1.188) e reagrupando, obtém-se

$$
\begin{aligned}
\delta Z = \int_V \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{Sym}(\nabla \boldsymbol{u})} - \boldsymbol{T} \right) : \delta \boldsymbol{E} \right] dV + \\
+ \int_{S_t} \left[(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{t}) \cdot \delta \boldsymbol{u} + \left(\boldsymbol{t} - \overline{\boldsymbol{t}} \right) \cdot \delta \boldsymbol{d} - \delta \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{d}) \right] dS + \\
+ \int_{S_u} [(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{t}) \cdot \delta \boldsymbol{u} - \delta \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}})] dS.
\end{aligned} \tag{1.190}
$$

Pelo Lema Fundamental do Cálculo Variacional tem-se de (1.190) as seguintes equações

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{T} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{Sym}(\nabla \boldsymbol{u})} \quad \text{e} \quad \mathrm{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V \,, \\
& \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} \,, \quad \boldsymbol{t} = \overline{\boldsymbol{t}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{d} \quad \text{em } S_t \,, \\
& \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u \,.
\end{aligned} \tag{1.191}
$$

Note-se que $\boldsymbol{t}$ são as forças superficiais em $S = S_t \cup S_u$ e $\boldsymbol{d}$ são os deslocamentos em S_t.

Observação 12.31

Note-se que a equação local do equíbrio, expressa por $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T$, não é obtida em (1.191). Por isso, ela precisa ser garantida na formulação de $\psi(\nabla \boldsymbol{u})$.

Observação 12.32

Adotando-se $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{d}$ em S_t, de (1.186) decorre o seguinte funcional

$$
Y(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t}) = \int_V \psi(\mathrm{Sym}(\nabla \boldsymbol{u})) dV - \int_V \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u} dV - \int_{S_t} \overline{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{u} \, dS - \int_{S_u} \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}}) dS \,. \tag{1.192}
$$

Note-se que $Y : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ é um funcional de dois campos com

$$
\mathcal{D} = \mathcal{H}_1(V) \times \mathcal{H}_0(S_u) \tag{1.193}
$$

e sem condições de contorno essenciais. Logo $\delta \mathcal{D} = \mathcal{D}$. Realizando-se a variação de (1.192), chega-se a

$$
\begin{aligned}
\delta Y = \int_V \left[\frac{\partial \psi}{\partial (\nabla \boldsymbol{u})} : \nabla \delta \boldsymbol{u} - \boldsymbol{b} \cdot \delta \boldsymbol{u} \right] dV + \\
- \int_{S_t} \overline{\boldsymbol{t}} \cdot (\delta \boldsymbol{u} - \delta \boldsymbol{d}) dS - \int_{S_u} [\delta \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{t} \cdot \delta \boldsymbol{u}] dS \,.
\end{aligned} \tag{1.194}
$$

Adicionando-se a identidade (1.183) a (1.182) e reagrupando-se, obtém-se

$$
\begin{aligned}
\delta Y = \int_V \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial (\nabla \boldsymbol{u})} - \boldsymbol{T} \right) : \mathrm{Sym}(\nabla \delta \boldsymbol{u}) - (\mathrm{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b}) \cdot \delta \boldsymbol{u} \right] dV + \\
+ \int_{S_t} \left(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n} - \overline{\boldsymbol{t}} \right) \cdot \delta \boldsymbol{u} dS + \int_{S_u} [(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{t}) \cdot \delta \boldsymbol{u} - \delta \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}})] dS.
\end{aligned} \tag{1.195}
$$

Portanto, as equações de Euler-Lagrange de (1.192) são

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{T} = \frac{\partial \psi}{\partial (\mathrm{Sym}(\nabla \boldsymbol{u}))} \quad \text{e} \quad \mathrm{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V \,, \\
& \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = \overline{\boldsymbol{t}} \quad \text{em } S_t \,, \\
& \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u \,.
\end{aligned} \tag{1.196}
$$

Note-se que $\boldsymbol{t}$ são as reações em S_u.

Observação 12.33

(1.186) ou (1.196) são utilizados na formulação de métodos diretos híbridos de compatibilidade ou de deslocamentos.

2.11 Teorema dos Trabalhos Virtuais Complementares

Definição 12.39: Esforços virtuais

Seja $\delta\boldsymbol{T} \in \mathcal{H}_1(V)$ um campo de tensões qualquer que esteja em equilíbrio interno e externo com os campos $\delta\boldsymbol{t} \in \mathcal{H}_0(S)$ em S e $\delta\boldsymbol{b} \in \mathcal{H}_0(V)$ em V, isto é,

$$\text{div}\delta\boldsymbol{T} + \delta\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V\,, \quad \delta\boldsymbol{T} = \delta\boldsymbol{T}^T \quad \text{em } V \quad \text{e} \quad \delta\boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = \delta\boldsymbol{t} \quad \text{em } S\,. \tag{12.197}$$

Logo, pode-se escrever que $\delta\boldsymbol{T} \in \delta\mathcal{E}^*$, onde

$$\delta\mathcal{E}^* = \Big\{\delta\boldsymbol{T} \in \mathcal{H}_1(V) \mid \text{div}\delta\boldsymbol{T} + \delta\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}\,,\ \delta\boldsymbol{T} = \delta\boldsymbol{T}^T \ \text{ em } V \ \text{ e } \ \delta\boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = \delta\boldsymbol{t} \ \text{ em } S\Big\}\,. \tag{1.198}$$

Definição 12.40: Trabalho virtual complementar externo

O *trabalho virtual complementar externo* é definido por

$$\delta W^*_{\text{ext}} = \int_V \delta\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}dV + \int_S \delta\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{u}dS \tag{12.199}$$

Definição 12.41: Trabalho virtual complementar interno

O *trabalho virtual complementar interno* é definido por

$$\delta W^*_{\text{int}} = \int_V \delta\boldsymbol{T} : \boldsymbol{E}dV\,, \tag{12.200}$$

onde $\boldsymbol{E}$ é o tensor das pequenas deformações.

Definição 12.42: Equação de compatibilidade

A equação

$$\boldsymbol{E} = \text{Sym}(\nabla\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\big[\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T\big] \quad \text{em } V \tag{12.201}$$

é conhecida como a *equação de compatibilidade* entre o campo de deformações e de deslocamentos.

Propriedades 12.13: Teorema dos Trabalhos Virtuais Complementares

Utilizando o teorema do divergente em (12.199), tem-se

$$\delta W^*_{\text{ext}} = \delta W^*_{\text{int}} + \int_V [\boldsymbol{E} - \text{Sym}(\nabla\boldsymbol{u})] : \delta\boldsymbol{T}dV \quad . \tag{12.202}$$

Logo

$$\delta W^*_{\text{ext}} = \delta W^*_{\text{int}}, \quad \forall\delta\boldsymbol{T} \in \delta\mathcal{E}^* \ \Leftrightarrow \boldsymbol{E} = \text{Sym}(\nabla\boldsymbol{u}) \quad \text{em } V\,. \tag{12.203}$$

Portanto

$$\delta W^*_{\text{ext}} = \delta W^*_{\text{int}}, \quad \forall\delta\boldsymbol{T} \ \text{ em } V\,, \tag{12.204}$$

é uma condição necessária e suficiente para a compatibilidade entre os campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{u}$. Este resultado é conhecido como *Teorema dos Trabalhos Virtuais Complementares*.

2.12 Teorema da Energia Potencial Complementar

Definição 12.43: Energia de deformação complementar específica

A função $\psi^*(\boldsymbol{T})$ tal que

$$\boldsymbol{E} = \frac{\partial \psi^*}{\partial \boldsymbol{T}}\,, \tag{12.205}$$

é denominada *energia de deformação complementar específica* ou *por unidade de volume*.

Observação 12.34

A expressão geral da energia de deformação complementar específica é

$$\psi^* = \boldsymbol{T} : \boldsymbol{E} - \psi(\boldsymbol{E})\,, \tag{12.206}$$

pois

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial \boldsymbol{T}} = \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{T}}\boldsymbol{T} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{T}}\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}\,. \tag{12.207}$$

(12.206) é conhecida como *transformação de Legendre* e existe somente se a função $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{E})$ for inversível, isto é, se existir a inversa $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{T})$.

Definição 12.44: Energia de deformação complementar

A *energia de deformação complementar* de um sólido hiperelástico sob linearidade geométrica é dada por

$$U^*_{\text{int}}(\boldsymbol{T}) = \int_V \psi^*(\boldsymbol{T})\,dV\,. \tag{12.208}$$

Exemplo 12.7: Material elástico linear

No caso de elasticidade linear sem tensões iniciais

$$\psi^* = \boldsymbol{T} : \boldsymbol{E} - \frac{1}{2}\boldsymbol{T} : \boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\boldsymbol{T} : \boldsymbol{E}\,, \tag{12.209}$$

ou seja,

$$\psi^*(\boldsymbol{T}) = \psi(\boldsymbol{E}) \circ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{T})\,. \tag{12.210}$$

(12.209) pode também ser expressa da seguinte forma

$$\psi^*(\boldsymbol{T}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{T} : \mathbb{C}\boldsymbol{T}\,, \tag{12.211}$$

onde

$$\mathbb{C} = \mathbb{D}^{-1} \tag{12.212}$$

é o tensor dos módulos elásticos de flexibilidade introduzido no Capítulo 10.

Definição 12.45: Energia potencial complementar

Para sólidos hiperelásticos sob linearidade geométrica a *energia potencial complementar* é definida por

$$U^*(\boldsymbol{T}) = U^*_{\text{int}}(\boldsymbol{T}) - \int_{S_u} \overline{\boldsymbol{u}} \cdot (\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\,dV\,, \tag{12.213}$$

onde $U^* : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ é um funcional de campos de tensões equilibrados externa e internamente, isto é, campos $\boldsymbol{T}$ tais que

$$\operatorname{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V \quad \text{e} \quad \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = \overline{\boldsymbol{t}} \quad \text{em } S_t \,. \tag{12.214}$$

Logo, o domínio de U^* é

$$\mathcal{D}(V) = \left\{ \boldsymbol{T} \in \mathcal{H}_1(V) \mid \operatorname{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \,,\ \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T \quad \text{em } V \quad \text{e} \quad \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = \overline{\boldsymbol{t}} \quad \text{em } S_t \right\}. \tag{12.215}$$

Observação 12.35

Não há sentido em se falar de energia potencial complementar para estruturas estaticamente determinadas, uma vez que nelas existe apenas um campo de tensões que satisfaz às equações de equilíbrio.

Observação 12.36

Note-se também que

$$\delta\mathcal{D}(V) = \left\{ \boldsymbol{T} \in \mathcal{H}_1(V) \mid \operatorname{div}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{o} \,,\quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T \quad \text{em } V \quad \text{e} \quad \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } S_t \right\}. \tag{12.216}$$

é o espaço das variações admissíveis de (12.213).

Propriedades 12.14: Teorema da Energia Potencial Complementar

Variando-se (12.213), com a ajuda do teorema do divergente e do teorema dos trabalhos virtuais complementares, tem-se

$$\delta U^*(\boldsymbol{T}) = \int_V [\boldsymbol{E} - \operatorname{Sym}(\nabla\boldsymbol{u})] : \delta\boldsymbol{T}\, dV + \int_{S_u} (\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}}) \cdot (\delta\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\, dS \,. \tag{12.217}$$

Logo

$$\delta U^* = 0 \,, \quad \forall \delta\boldsymbol{T} \in \delta\mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{E} = \operatorname{Sym}(\nabla\boldsymbol{u}) \quad \text{em } V \quad \text{e} \\ \boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u \end{cases} . \tag{12.218}$$

Para configurações compatíveis, o campo de tensões é um ponto estacionário de U^*. (12.218) é conhecido como *teorema da energia potencial complementar*. Se U^* for convexo, o ponto estacionário corresponde a um mínimo de U^*.

Exemplos 12.8: Material elástico linear

No caso de elasticidade linear

$$U^*(\boldsymbol{T}) = \int_V \frac{1}{2}\boldsymbol{T} : \mathcal{C}\boldsymbol{T}\, dV - \int_{S_u} \overline{\boldsymbol{u}} \cdot (\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\, dV \tag{12.219}$$

Logo

$$U^*(\boldsymbol{T}_b) - U^*(\boldsymbol{T}_a) - \delta U^*(\boldsymbol{T}_a, \boldsymbol{T}_b - \boldsymbol{T}_a) = \int_V \psi^*(\boldsymbol{T}_b - \boldsymbol{T}_a)\, dV \,. \tag{12.220}$$

Assim, se

$$\psi^*(\boldsymbol{T}) > 0 \,, \forall \boldsymbol{T} \neq \boldsymbol{O} \,. \tag{12.221}$$

então U é estritamente convexo e a solução do problema estático da Teoria Linear da Elasticidade existe, é única e minimiza a energia potencial complementar.

Observação 12.37

Para materiais elásticos lineares isótropos (12.221) redunda também em (12.175).

2.13 Funcional misto de Hellinger-Reissner

Introduzindo-se (12.206) em (12.176) e invertendo-se o sinal, obtém-se um funcional de dois campos dado por

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{u},\boldsymbol{T}) = \int_V \psi^*(\boldsymbol{T})\,dV - \int_{S_t} \psi_S(\boldsymbol{u})\,dS - \int_V \psi_V(\boldsymbol{u})\,dV + \\ - \int_V \boldsymbol{T} : \mathrm{Sym}(\nabla \boldsymbol{u})\,dV + \int_{S_u} (\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{u}-\overline{\boldsymbol{u}})\,dS\ , \end{aligned} \tag{12.222}$$

onde $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T$. (12.222) é conhecido por *funcional de Hellinger-Reissner*[63].

Observação 12.38

Note-se que $R : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ é um funcional de dois campos com

$$\mathcal{D} = \mathcal{H}_1(V) \times \mathcal{H}_0(V) \tag{12.223}$$

e sem condições de contorno essenciais. Logo $\delta\mathcal{D} = \mathcal{D}$. Realizando-se a variação de (12.222), obtém-se

$$\begin{aligned} \delta R = \int_V \left[\delta\boldsymbol{T} : \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \boldsymbol{T}} - \mathrm{Sym}(\nabla \boldsymbol{u}) \right) + \left(\mathrm{div}\,\boldsymbol{T} - \frac{\partial \psi_V}{\partial \boldsymbol{u}} \right) \cdot \delta\boldsymbol{u} \right] dV \\ - \int_{S_t} \left(\frac{\partial \psi_S}{\partial \boldsymbol{u}} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \right) \cdot \delta\boldsymbol{u}\,dS + \int_{S_u^r} (\delta\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{u}-\overline{\boldsymbol{u}})\,dS. \end{aligned} \tag{12.224}$$

Pelo Lema Fundamental do Cálculo Variacional tem-se de (12.224) as seguintes equações

$$\begin{aligned} &\mathrm{Sym}(\nabla \boldsymbol{u}) = \frac{\partial \psi^*}{\partial \boldsymbol{T}} \quad \text{e} \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{T} = \frac{\partial \psi_V}{\partial \boldsymbol{u}} \quad \text{em } V\ , \\ &\boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = -\frac{\partial \psi_S}{\partial \boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_t \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u\ . \end{aligned} \tag{12.225}$$

(12.225) engloba todas as equações e condições de contorno da Teoria da Elasticidade sob Linearidade Geométrica. Funcionais como este são muito utilizados na formulação de métodos diretos mistos.

Observação 12.39

R não é convexo. Logo a solução do problema estático da Teoria Linear da Elasticidade não corresponde a um mínimo de R.

2.14 Funcional híbrido-misto complementar

Considere-se o funcional dado por

$$\begin{aligned} G^*(\boldsymbol{u},\boldsymbol{T},\boldsymbol{d},\boldsymbol{t}) = \int_V \psi^*(\boldsymbol{T})\,dV + \int_V \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}\,dV - \int_V \boldsymbol{T} : \mathrm{Sym}(\nabla \boldsymbol{u})\,dV + \\ + \int_{S_t} \overline{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{d}\,dS + \int_{S_t} \boldsymbol{t}\cdot(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{d})\,dS + \int_{S_u} \boldsymbol{t}\cdot(\boldsymbol{u}-\overline{\boldsymbol{u}})\,dS\ , \end{aligned} \tag{1.226}$$

[63] E. Hellinger, „*Der allgemeine Ansatz der Mechanik der Kontinua*“, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaft, v4, Teil 4, 1914; E. Reissner, „*On a Variational Theorem in Elasticity*“, Journal of Mathematics and Physics, v29, 2, 1950.

onde $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T$.

Observação 12.40

Note-se que $G^* : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ é um funcional de quatro campos com

$$\mathcal{D} = \mathcal{H}_1(V) \times \mathcal{H}_0(V) \times \mathcal{H}_0(S_t) \times \mathcal{H}_0(S) \tag{1.227}$$

e sem condições de contorno essenciais. Logo $\delta\mathcal{D} = \mathcal{D}$. Realizando-se a variação de (1.226), chega-se a

$$\begin{aligned} \delta G^* = & \int_V \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial \boldsymbol{T}} : \delta \boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} \cdot \delta \boldsymbol{u} - \delta \boldsymbol{T} : \mathrm{Sym}(\nabla \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{T} : \mathrm{Sym}(\nabla \delta \boldsymbol{u}) \right] dV + \\ & + \int_{S_t} \overline{\boldsymbol{t}} \cdot \delta \boldsymbol{d}\, dS + \int_{S_t} [\boldsymbol{t} \cdot (\delta \boldsymbol{u} - \delta \boldsymbol{d}) + \delta \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{d})] dS + \\ & + \int_{S_u} [\delta \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{t} \cdot \delta \boldsymbol{u}] dS \ . \end{aligned} \tag{1.228}$$

Adicionando-se a identidade (1.183) a (1.228) e reagrupando-se, obtém-se

$$\begin{aligned} \delta G^* = & \int_V \left[\delta \boldsymbol{T} : \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \boldsymbol{T}} - \mathrm{Sym}(\nabla \boldsymbol{u}) \right) + (\mathrm{div}\, \boldsymbol{T} + \boldsymbol{b}) \cdot \delta \boldsymbol{u} \right] dV + \\ & - \int_{S_t} \left[(\boldsymbol{t} - \overline{\boldsymbol{t}}) \cdot \delta \boldsymbol{d} + (\boldsymbol{T}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{t}) \cdot \delta \boldsymbol{u} - \delta \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{d}) \right] dS + \\ & - \int_{S_u} [(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{t}) \cdot \delta \boldsymbol{u} - \delta \boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}})] dS. \end{aligned} \tag{1.229}$$

Pelo Lema Fundamental do Cálculo Variacional obtém-se de (1.229) as seguintes equações

$$\begin{aligned} & \mathrm{Sym}(\nabla \boldsymbol{u}) = \frac{\partial \psi^*}{\partial \boldsymbol{T}} \quad \text{e} \quad \mathrm{div}\, \boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V \ , \\ & \boldsymbol{t} = \overline{\boldsymbol{t}} \ , \quad \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{d} \quad \text{em } S_t \ , \\ & \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u \ . \end{aligned} \tag{1.230}$$

$\boldsymbol{d}$ são os deslocamentos em S_t e $\boldsymbol{t}$ são as forças superficiais em $S = S_t \cup S_u$. Funcionais como (1.226) são utilizados em métodos diretos híbridos-mistos.

2.15 Funcionais híbridos de equilíbrio

Considere-se o funcional dado por

$$\begin{aligned} Z^*(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{t}) = & \int_V \psi^*(\boldsymbol{T}) dV + \int_{S_t} (\overline{\boldsymbol{t}} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{d}\, dS + \\ & + \int_{S_u} (\boldsymbol{t} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{d} dS - \int_{S_u} \boldsymbol{t} \cdot \overline{\boldsymbol{u}} dS \ , \end{aligned} \tag{1.231}$$

onde o campo de tensões $\boldsymbol{T}$ satisfaz as equações locais de equilíbrio, isto é $\boldsymbol{T} \in \mathcal{E}(V)$, com $\mathcal{E}(V)$ definido por

$$\mathcal{E}(V) = \left\{ \boldsymbol{T} \in \mathcal{H}_1(V) \mid \mathrm{div}\, \boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T \quad \text{em } V \right\}. \tag{1.232}$$

Observação 12.41

Note-se que $Z^* : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ é um funcional de três campos com

$$\mathcal{D} = \mathcal{E}(V) \times \mathcal{H}_0(S) \times \mathcal{H}_0(S_u) \tag{1.233}$$

e sem condições de contorno essenciais. Logo, o espaço das variações admissíveis é

$$\delta\mathcal{D} = \delta\mathcal{E}(V)\times\mathcal{H}_0(S)\times\mathcal{H}_0(S_u)\,, \tag{1.234}$$

com $\delta\mathcal{E}(V)$ definido por

$$\delta\mathcal{E}(V) = \Big\{\boldsymbol{T}\in\mathcal{H}_1(V)\mid \operatorname{div}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{o} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T \quad \text{em } V\Big\}\,. \tag{1.235}$$

Realizando-se a variação de (1.231), chega-se a

$$\begin{aligned}\delta Z^* = &\int_V \frac{\partial\psi^*}{\partial\boldsymbol{T}} : \delta\boldsymbol{T}dV + \int_{S_t}(\overline{\boldsymbol{t}} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\cdot\delta\boldsymbol{d}\,dS - \int_{S_t}(\delta\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{d}\,dS + \\ &+\int_{S_u}\delta\boldsymbol{t}\cdot(\boldsymbol{d}-\overline{\boldsymbol{u}})dS - \int_{S_u}(\delta\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{d}\,dS + \int_{S_u}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\cdot\delta\boldsymbol{d}\,dS\,.\end{aligned} \tag{1.236}$$

Adicionando-se a identidade

$$\int_{S_u}(\delta\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{u}dS + \int_{S_t}(\delta\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{u}dS - \int_V[\operatorname{div}\delta\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{T} : \operatorname{Sym}(\nabla\boldsymbol{u})]dV = 0 \tag{1.237}$$

a (1.236), levando em conta que $\delta\boldsymbol{T}\in\delta\mathcal{E}(V)$ e reagrupando, obtém-se

$$\begin{aligned}\delta Z^* = &\int_V \delta\boldsymbol{T} : \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial\boldsymbol{T}} - \operatorname{Sym}(\nabla\boldsymbol{u})\right)dV + \int_{S_t}(\overline{\boldsymbol{t}} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\cdot\delta\boldsymbol{d}\,dS + \\ &+\int_{S_t}(\delta\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{d})dS + \int_{S_u}(\delta\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{d})dS \\ &+\int_{S_u}\delta\boldsymbol{t}\cdot(\boldsymbol{d}-\overline{\boldsymbol{u}})dS + \int_{S_u}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\cdot\delta\boldsymbol{d}\,dS\,.\end{aligned} \tag{1.238}$$

As equações de Euler-Lagrange de (1.238) são portanto

$$\begin{aligned}&\operatorname{Sym}(\nabla\boldsymbol{u}) = \frac{\partial\psi^*}{\partial\boldsymbol{T}} \quad \text{em } V\,, \\ &\boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = \overline{\boldsymbol{t}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{d} \quad \text{em } S_t\,, \\ &\boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}\,, \quad \boldsymbol{d} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{d} \quad \text{em } S_u\,.\end{aligned} \tag{1.239}$$

$\boldsymbol{d}$ são os deslocamentos em $S = S_t\cup S_u$ e $\boldsymbol{t}$ são as reações em S_u.

Observação 12.42

Admitindo-se que a equação de equilíbrio $\boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}$ em S_u, decorre de (1.231) o seguinte funcional híbrido de tensões

$$Y^*(\boldsymbol{T},\boldsymbol{d}) = \int_V \psi^*(\boldsymbol{T})dV + \int_{S_t}(\overline{\boldsymbol{t}} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{d}\,dS - \int_{S_u}\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}\cdot\overline{\boldsymbol{u}}dS\,. \tag{1.240}$$

Note-se que $Y^* : \mathcal{D}\to\mathbb{R}$ é um funcional de dois campos com

$$\mathcal{D} = \mathcal{E}(V)\times\mathcal{H}_0(S_t) \tag{1.241}$$

e sem condições de contorno essenciais. Logo

$$\delta\mathcal{D} = \delta\mathcal{E}(V)\times\mathcal{H}_0(S_t) \tag{1.242}$$

Realizando-se a variação de (1.240), chega-se a

$$\begin{aligned}\delta Y^*(\boldsymbol{T},\boldsymbol{d}) = &\int_V \frac{\partial\psi^*}{\partial\boldsymbol{T}} : \delta\boldsymbol{T}dV - \int_{S_t}\big[(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n} - \overline{\boldsymbol{t}})\cdot\delta\boldsymbol{d} + \delta\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{d}\big]dS \\ &-\int_{S_u}\delta\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}\cdot\overline{\boldsymbol{u}}dS\,.\end{aligned} \tag{1.243}$$

Adicionando-se a identidade (1.237) a (1.243) e levando-se em conta que $\operatorname{div}\delta\boldsymbol{T} = \boldsymbol{o}$, chega-se em

$$\delta Z^*(\boldsymbol{T},\boldsymbol{d}) = \int_V \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial \boldsymbol{T}} - \mathrm{Sym}(\nabla \boldsymbol{u})\right) : \delta \boldsymbol{T} dV + \int_{S_u} (\delta \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}) \cdot (\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}}) dS + \\ - \int_{S_t} \left[(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n} - \overline{\boldsymbol{t}}) \cdot \delta \boldsymbol{d} + \delta \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{d} - \boldsymbol{u}) \right] dS \,. \tag{1.244}$$

Pelo Lema Fundamental do Cálculo Variacional tem-se de (1.244) as seguintes equações

$$\mathrm{Sym}(\nabla \boldsymbol{u}) = \frac{\partial \psi^*}{\partial \boldsymbol{T}} \quad \text{em } V \,, \quad \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = \overline{\boldsymbol{t}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{d} \quad \text{em } S_t \,, \quad \boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u \,. \tag{1.245}$$

Note-se que $\boldsymbol{d}$ são os deslocamentos em S_t.

Observação 12.43

Funcionais como (1.231) ou (1.240) são utilizados em métodos diretos híbridos de tensões ou de equilíbrio.

2.16 Funcional Híbrido de Trefftz

Suponha-se agora que os campos de tensão de (1.240) sejam restritos àqueles que sejam compatíveis com um campo de deslocamentos $\boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1(V)$ através da equação constitutiva elástica $\boldsymbol{T} = \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{E})$, onde $\boldsymbol{E} = \mathrm{Sym}(\nabla \boldsymbol{u})$. Assim, com o concurso de (1.232), pode-se escrever que $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$, onde

$$\mathcal{U} = \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1(V) \mid \hat{\boldsymbol{T}}(\mathbb{I}_S \nabla \boldsymbol{u}) \in \mathcal{E}(V) \right\}. \tag{1.246}$$

Seja então o funcional

$$T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{d}) = \int_V \psi^*(\boldsymbol{T}) dV + \int_{S_t} (\overline{\boldsymbol{t}} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{d} \, dS - \int_{S_u} \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \cdot \overline{\boldsymbol{u}} dS \,. \tag{1.247}$$

$T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ é um funcional de dois campos com

$$\mathcal{D} = \mathcal{U}(V) \times \mathcal{H}_0(S_t) \tag{1.248}$$

e sem condições de contorno essenciais. Logo

$$\delta \mathcal{D} = \delta \mathcal{U}(V) \times \mathcal{H}_0(S_t) \,, \tag{1.249}$$

onde, com o auxílio de (1.235),

$$\delta \mathcal{U}(V) = \left\{ \delta \boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1(V) \mid \delta \boldsymbol{T} = \mathbb{D} \mathbb{I}_S \nabla \delta \boldsymbol{u} \in \delta \mathcal{E}(V) \,, \quad \text{com} \quad \mathbb{D} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{E}} \right\} \tag{1.250}$$

Realizando-se a variação de (1.247), chega-se a

$$\delta T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{d}) = \int_V \frac{\partial \psi^*}{\partial \boldsymbol{T}} : \delta \boldsymbol{T} dV - \int_{S_t} \left[(\boldsymbol{T}\boldsymbol{n} - \overline{\boldsymbol{t}}) \cdot \delta \boldsymbol{d} + \delta \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{d} \right] dS - \int_{S_u} \delta \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \cdot \overline{\boldsymbol{u}} dS \,. \tag{1.251}$$

onde $\delta \boldsymbol{T} = \mathbb{D} \mathbb{I}_S (\nabla \delta \boldsymbol{u})$ e $\delta \boldsymbol{u} \in \delta \mathcal{U}$. A primeira integral de (1.251) pode ser transformada como mostrado abaixo, com a ajuda do teorema do divergente e de $\mathrm{div} \delta \boldsymbol{T} = \boldsymbol{o}$,

$$\int_V \frac{\partial \psi^*}{\partial \boldsymbol{T}} : \delta \boldsymbol{T} dV = \int_S \boldsymbol{u} \cdot (\delta \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}) dV \,. \tag{1.252}$$

Pode-se, por conseguinte, reescrever (1.251) da seguinte forma

$$\delta T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{d}) = \int_{S_t} \left[(\overline{\boldsymbol{t}} - \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}) \cdot \delta \boldsymbol{d} + \delta \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{d}) \right] dS + \int_{S_u} \delta \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}}) dS \,. \tag{1.253}$$

As equações de Euler-Lagrange de (1.247) são portanto

$$\bar{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}\ , \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{d} \quad \text{em } S_t \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u\ . \tag{1.254}$$

Observação 12.44

O funcional (1.253) tem suas integrais definidas apenas no contorno do domínio V, ou seja, apenas em $S = S_t \cup S_u$. Este fato aparentemente vantajoso depende exclusivamente de se conseguir construir o espaço $\mathcal{U}(V)$. Para materiais elásticos isótropos lineares existem diversos potenciais desenvolvidos na literatura que podem ser utilizados na construção de $\mathcal{U}(V)$, como os potenciais de Kolosoff-Muskhelishvili em elasticidade bi-dimensional e de Papkovitch-Neuber em elasticidade tri-dimensional[64]. Para outros materiais a construção de $\mathcal{U}(V)$ torna-se ainda mais complexa.

Observação 12.45

O funcional (1.247) é utilizado na formulação de métodos híbridos de tensão de Trefftz[65].

2.17 Teorias estruturais sob linearidade geométrica

Definição 12.46: Teoria Estrutural

Dá-se o nome de *Teoria Estrutural sob linearidade geométrica* a qualquer teoria mecânica obtida a partir da Mecânica dos Sólidos Deformáveis, em consistência com qualquer das formulações integrais sob linearidade geométrica aqui apresentadas, através da introdução de restrições ou vínculos cinemáticas e estáticas.

Exemplo 12.9

Considere-se a estrutura da Figura 12.1. Pelo teorema de Pitágoras, tem-se

$$\ell^{r2} = a^2 + b^2 \quad \text{e} \quad \ell^2 = a^2 + (b-u)^2\ .$$

Derivando-se no tempo, obtém-se $2\ell\left(\dot{\ell}\right) = -2(b-u)\dot{u}$ e, portanto,

$$\delta\ell = -\ell^{-1}(b-u)\delta u\ .$$

Desprezando-se os deslocamentos, ou seja, confundindo a configuração deformada com a de referência, tem-se

$$\delta\ell = -\ell^{r-1} b\delta u\ .$$

O trabalho virtual externo e o interno são

$$\delta W_{\text{ext}} = P\delta u \quad \text{e} \quad \delta W_{\text{int}} = 2N\delta\ell\ ,$$

onde N é a força normal nas duas barras. De $\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}}$ e $\delta\ell = -\ell^{r-1} b\delta u$ vem

$$P = -2N\ell^{r-1} b\ .$$

Seja agora o alongamento de uma barra

$$\varepsilon = \frac{\ell - \ell^r}{\ell^r} = \frac{\sqrt{a^2 + (b-u)^2} - \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ .$$

---

[64] Veja, por exemplo, Y.C. Fung, *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[65] E. Trefftz, *"Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren"*, Proceedings of the 2nd International Congress for Applied mechanics, Zürich, 1926.

Da expressão acima, até primeira ordem em u, resulta

$$\varepsilon = -\frac{bu}{a^2 + b^2} = -\frac{bu}{\ell^{r2}} .$$

Supondo que a elasticidade das barras dada por $\sigma = E\varepsilon$, onde $\sigma = \dfrac{N}{A}$, tem-se

$$N = -EA\frac{b^2}{\ell^{r2}}u \quad \text{e} \quad P = 2EA\frac{b^2}{\ell^{r3}}u .$$

Observação 12.46

Observe-se que, no Exemplo 12.9, se $b = 0$, a hipótese de Linearidade Geométrica não traz resultado aceitável.

Observação 12.47

O teorema dos trabalhos virtuais constitui-se em uma poderosa ferramenta para a formulação consistente das equações e condições de contorno de teorias estruturais, como as diversas teorias de barras, de placas e de cascas. Para ilustrar melhor este fato, formulações de algumas teorias estruturais sob linearidade geométrica relevantes para a prática são apresentadas a seguir.

Observação 12.48

Note-se, preliminarmente, que em notação técnica tem-se

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V \left(\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{xz}\delta\gamma_{xz} \right) dV . \tag{12.255}$$

2.17.1 Teoria de Timoshenko para barras no espaço

Seja um sólido alongado na direção do eixo x_3, como representado na Figura 12.3, denominado *barra*.

Figura 12.3: Barra reta no espaço

Chama-se o eixo $z = x_3$ de eixo da barra. O comprimento da barra é designado por ℓ. A seção transversal (A) é a intersecção de planos ortogonais ao eixo z com a barra. Logo as seções transversais estão nos planos descritos por $x = x_1$ e $y = x_2$.

A hipótese cinemática de Timoshenko para barras[66] supõe que, após a deformação, as seções transversais, aqui indicadas por A, permaneçam planas e indeformáveis ao eixo da barra. Isto significa que o movimento das seções transversais é semelhante ao de um corpo rígido e pode ser descrito por dois vetores, a saber, o vetor dos deslocamentos do ponto da seção transversal sobre o eixo da barra, indicado por $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(z)$, e o vetor das rotações da seção transversal, indicado por $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(z)$, cujas componentes são $\left\{u_x, u_y, u_z\right\}$ e $\left\{\theta_x, \theta_y, \theta_z\right\}$, respectivamente.

As componentes do vetor dos deslocamentos dos pontos da barra ($\boldsymbol{d}$) são dadas abaixo

$$u = u_x - \theta_z y \ , \quad v = u_y + \theta_z x \quad \text{e} \quad w = u_z + \theta_x y - \theta_y x \ . \tag{12.256}$$

As condições (12.256) são aqui denominadas *vínculos de Timoshenko*. Logo, pode-se escrever em notação vetorial

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r} \ , \tag{12.257}$$

onde $\boldsymbol{r}$ é o vetor posição dos pontos de uma seção transversal em relação à origem e tem as suas componentes dadas por $\{x, y, 0\}$.

De (12.256) resultam as seguintes deformações em notação técnica

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= u_x' - \theta_y - \theta_z' y \ , \\ \gamma_{yz} &= u_y' + \theta_x + \theta_z' x \ , \\ \varepsilon_z &= u_z' + \theta_x' y - \theta_y' x \quad \text{e} \\ \varepsilon_x &= \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0 \ , \end{aligned} \tag{12.258}$$

onde

$$\frac{d(\bullet)}{dz} = (\bullet)' \ . \tag{12.259}$$

Veja-se que as componentes não nulas das deformações podem ser resumidas no vetor $\boldsymbol{\gamma}$, cujas componentes são $\left\{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \varepsilon_z\right\}$. Note-se que, em notação vetorial, tem-se

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{r} \ , \tag{12.260}$$

onde

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{\theta} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\theta}' \ . \tag{12.261}$$

Em (12.261) $\boldsymbol{e}_z$ é o vetor unitário na direção do eixo z.

Seja $\boldsymbol{\tau}$ o vetor das tensões dado por

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{bmatrix} . \tag{12.262}$$

Desta forma, o trabalho virtual interno escreve-se como

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma} \, dV, \tag{12.263}$$

onde

[66] S. Timoshenko, "*Vibration Problems in Engineering*", D. van Nostrand, 1928.

$$\delta\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \delta\gamma_{xz} \\ \delta\gamma_{yz} \\ \delta\varepsilon_z \end{bmatrix} = \delta\boldsymbol{\eta} + \delta\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \delta u_x' - \delta\theta_y - \delta\theta_z' y \\ \delta u_y' + \delta\theta_x + \delta\theta_z' x \\ \delta u_z' + \delta\theta_x' y - \delta\theta_y' x \end{bmatrix}. \tag{12.264}$$

Logo

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} &= \int_V \boldsymbol{\tau}\cdot(\delta\boldsymbol{\eta} + \delta\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{r})\,dV = \\ &= \int_0^\ell \Big[\int_A (\boldsymbol{\tau}\cdot(\delta\boldsymbol{\eta} + \delta\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{r}))\,dA\Big]dz = \\ &= \int_0^\ell \Big[\Big(\int_A \boldsymbol{\tau}\,dA\Big)\cdot\delta\boldsymbol{\eta} + \Big(\int_A \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\tau}\,dA\Big)\cdot\delta\boldsymbol{\kappa}\Big]dz = \\ &= \int_0^\ell [\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{m}\cdot\delta\boldsymbol{\kappa}]\,dz, \end{aligned} \tag{12.265}$$

onde

$$\boldsymbol{n} = \int_A \boldsymbol{\tau}\,dA \quad \text{e} \quad \boldsymbol{m} = \int_A (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\tau})\,dA \tag{12.266}$$

são os esforços seccionais internos desta teoria. As componentes destes vetores são dadas por

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} \int_A \tau_{xz}dA \\ \int_A \tau_{yz}dA \\ \int_A \sigma_z dA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ N \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} \int_A y\sigma_z dA \\ -\int_A x\sigma_z dA \\ \int_A (x\tau_{yz} - y\tau_{xz})\,dA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ T \end{bmatrix}. \tag{12.267}$$

O leitor deve reconhecer a notação usual dos esforços cortante e normal, assim como dos momentos fletores e de torção. Estes esforços estão ilustrados na Figura 12.4. De (12.265) e (12.267) vem

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} &= \int_0^\ell \big(V_x(\delta u_x' - \delta\theta_y) + V_y(\delta u_y' + \delta\theta_x) + N\delta u_z'\big)\,dz + \\ &\quad + \int_0^\ell \big(M_x\delta\theta_x' + M_y\delta\theta_y' + T\delta\theta_z'\big)\,dz\,. \end{aligned} \tag{12.268}$$

Figura 12.4: Esforços seccionais internos da Teoria de Timoshenko

Por integração por partes de (12.268) chega-se em

$$
\begin{aligned}
\delta W_{\text{int}} = & \int_0^\ell \left(-V_x'\delta u_x - V_y'\delta u_y - N'\delta u_z\right) dz + \\
& + \int_0^\ell \left(-\left(M_x' - V_y\right)\delta\theta_x - \left(M_y' + V_x\right)\delta\theta_y - T'\delta\theta_z\right) dz \\
& + \left(V_x\delta u_x + V_y\delta u_y + N\delta u_z + M_x\delta\theta_x + M_y\delta\theta_y + T\delta\theta_z\right)_0^\ell .
\end{aligned} \tag{12.269}
$$

Em forma vetorial, tem-se

$$
\delta W_{\text{int}} = -\int_0^\ell \left(\boldsymbol{n}' \cdot \delta\boldsymbol{u} + \left(\boldsymbol{m}' + \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{n}\right) \cdot \delta\boldsymbol{\theta}\right) dz + \left(\boldsymbol{n} \cdot \delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{m} \cdot \delta\boldsymbol{\theta}\right)_0^\ell . \tag{12.270}
$$

O trabalho virtual dos esforços externos é dado por

$$
\delta W_{\text{ext}} = \int_0^\ell \left(\bar{\boldsymbol{n}} \cdot \delta\boldsymbol{u} + \bar{\boldsymbol{m}} \cdot \delta\boldsymbol{\theta}\right) dz + \left(\boldsymbol{n}^* \cdot \delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{m}^* \cdot \delta\boldsymbol{\theta}\right)_0^\ell , \tag{12.271}
$$

onde $\bar{\boldsymbol{n}}$ e $\bar{\boldsymbol{m}}$ são as forças e os momentos externos por unidade de comprimento, respectivamente, dados por

$$
\bar{\boldsymbol{n}} = \int_A \boldsymbol{b} dA + \int_\Gamma \bar{\boldsymbol{t}} dA \quad \text{e} \quad \bar{\boldsymbol{m}} = \int_A \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{b} dA + \int_\Gamma \boldsymbol{r} \times \bar{\boldsymbol{t}} dA . \tag{1.272}
$$

e $\boldsymbol{n}^*$ e $\boldsymbol{m}^*$ são as forças e os momentos resultantes aplicados nas extremidades. Em (1.272) Γ é o contorno da seção transversal.

O Teorema dos Trabalhos Virtuais, (12.270) e (12.271) fornecem as seguintes equações locais de equilíbrio

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{n}' + \bar{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{o} \quad \text{e} \\
& \boldsymbol{m}' + \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{n} + \bar{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{o} ,
\end{aligned} \tag{12.273}
$$

em $(0, \ell)$, assim como as seguintes condições de contorno naturais

$$
\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}^* \quad \text{e} \quad \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}^* , \tag{12.274}
$$

em $z = 0$ e $z = \ell$.

Adotando-se a seguinte equação constitutiva elástica linear

$$
\tau_{xz} = G\gamma_{xz} , \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \quad \text{e} \quad \sigma_z = E\varepsilon_z , \tag{12.275}
$$

e introduzindo-se as seguintes propriedades geométricas da seção transversal

$$
\begin{aligned}
& A = \int_A dA , \quad S_x = \int_A y dA , \quad S_y = -\int_A x dA , \\
& J_{xx} = \int_A y^2 dA , \quad J_{yy} = \int_A x^2 dA , \quad J_{xy} = -\int_A xy dA \quad \text{e} \\
& J_0 = \int_A \left(x^2 + y^2\right) dA ,
\end{aligned} \tag{1.276}
$$

de (12.267) e (12.258), chega-se em

$$
\begin{aligned}
V_x &= GA\eta_x - GS_x\kappa_z = GA\big(\eta_x - y_{\mathrm{g}}\kappa_z\big)\,,\\
V_y &= GA\eta_y - GS_y\kappa_z = GA\big(\eta_y + x_{\mathrm{g}}\kappa_z\big)\,,\\
N &= EA\eta_z + ES_x\kappa_x + ES_y\kappa_y\ ,\\
M_x &= ES_x\eta_z + EJ_{xx}\kappa_x + EJ_{xy}\kappa_y\ ,\\
M_y &= ES_y\eta_z + EJ_{xy}\kappa_x + EJ_{yy}\kappa_y \quad \text{e}\\
T &= -GS_x\eta_x - GS_x\eta_y + GJ_0\kappa_z\ .
\end{aligned}
\tag{1.277}
$$

Sejam

$$
x_{\mathrm{g}} = \frac{1}{A}\int_A x dA \quad \text{e} \quad y_{\mathrm{g}} = \frac{1}{A}\int_A y dA \tag{1.278}
$$

as coordenadas do centro de gravidade da seção transversal, então podem-se deduzir as seguintes relações

$$
\begin{aligned}
&S_x = Ay_{\mathrm{g}}\ , \quad S_y = -Ax_{\mathrm{g}}\ ,\\
&J_{xx} = I_x + Ay_{\mathrm{g}}^2\ , \quad J_{yy} = I_y + Ax_{\mathrm{g}}^2\ , \quad J_{xy} = I_{xy} + Ax_{\mathrm{g}}y_{\mathrm{g}} \quad \text{e}\\
&J_0 = I_0 + A\big(x_{\mathrm{g}}^2 + y_{\mathrm{g}}^2\big)\,,
\end{aligned}
\tag{1.279}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
I_x &= \int_A \big(y - y_{\mathrm{g}}\big)^2\, dA\,,\\
I_y &= \int_A \big(x - x_{\mathrm{g}}\big)^2\, dA \quad \text{e}\\
I_{xy} &= -\int_A \big(x - x_{\mathrm{g}}\big)\big(y - y_{\mathrm{g}}\big) dA
\end{aligned}
\tag{1.280}
$$

são, respectivamente, os momentos de inércia e produto de inércia centrais (origem colocada no centro de gravidade da seção transversal). Com (1.279) em (1.277), obtém-se as seguintes equações constitutivas

$$
\begin{aligned}
V_x &= GA\big(\eta_x - y_{\mathrm{g}}\kappa_z\big)\,,\\
V_y &= GA\big(\eta_y + x_{\mathrm{g}}\kappa_z\big)\,,\\
N &= EA\big[\eta_z + y_{\mathrm{g}}\kappa_x - x_{\mathrm{g}}\kappa_y\big]\,,\\
M_x &= E\big[Ay_{\mathrm{g}}\eta_z + \big(I_x + Ay_{\mathrm{g}}^2\big)\kappa_x + \big(I_{xy} + Ax_{\mathrm{g}}y_{\mathrm{g}}\big)\kappa_y\big]\,,\\
M_y &= E\big[-Ax_{\mathrm{g}}\eta_z + \big(I_{xy} + Ax_{\mathrm{g}}y_{\mathrm{g}}\big)\kappa_x + \big(I_y + Ax_{\mathrm{g}}^2\big)\kappa_y\big] \quad \text{e}\\
T &= G\big[A\big(-y_{\mathrm{g}}\eta_x + x_{\mathrm{g}}\eta_y\big) + \big(I_0 + A\big(x_{\mathrm{g}}^2 + y_{\mathrm{g}}^2\big)\big)\kappa_z\big]\,.
\end{aligned}
\tag{1.281}
$$

Com a ajuda de (1.279), a energia de deformação de uma barra é dada por

$$
\begin{aligned}
U_{\mathrm{int}} = &\int_0^\ell \frac{1}{2}\Big(GA\big(\eta_{\mathrm{g}x}\big)^2 + GA\big(\eta_{\mathrm{g}y}\big)^2 + GI_0\kappa_z^2\Big)dz\, +\\
&+ \int_0^\ell \frac{1}{2}\Big(EA\big(\eta_{\mathrm{g}z}\big)^2 + EI_x\kappa_x^2 + EI_y\kappa_y^2 + 2EI_{xy}\kappa_x\kappa_y\Big)dz\ .
\end{aligned}
\tag{1.282}
$$

onde

$$
\eta_{\mathrm{g}x} = \eta_x - y_{\mathrm{g}}\kappa_z\ , \quad \eta_{\mathrm{g}y} = \eta_y + x_{\mathrm{g}}\kappa_z \quad \text{e} \quad \eta_{\mathrm{g}z} = \eta_z + y_{\mathrm{g}}\kappa_x - x_{\mathrm{g}}\kappa_y \tag{1.283}
$$

são as componentes de $\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{g}} = \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{r}_{\mathrm{g}}$, com $\boldsymbol{r}_{\mathrm{g}} = x_{\mathrm{g}}\boldsymbol{e}_x + y_{\mathrm{g}}\boldsymbol{e}_y$ sendo o vetor posição do centro de gravidade da seção. $\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{g}} = \boldsymbol{\gamma}\left(\boldsymbol{r}_{\mathrm{g}}\right)$ é o vetor das deformações no centro de gravidade da seção transversal.

Propriedades 12.15

Quando $x_{\mathrm{g}} = y_{\mathrm{g}} = 0$, os eixos x e y são tais que[67]

$$\int_A x dA = \int_A y dA = \int_A xy dA = 0 , \tag{12.284}$$

e tem-se conseqüentemente que

$$\begin{aligned} &V_x = GA\eta_x , \quad V_y = GA\eta_y , \quad N = EA\eta_z , \\ &M_x = EI_x\kappa_x , \quad M_y = EI_y\kappa_y \quad \text{e} \quad T = GI_0\kappa_z , \end{aligned} \tag{12.285}$$

onde

$$A = \int_A dA , \quad I_x = \int_A y^2 dA , \quad I_y = \int_A x^2 dA \quad \text{e} \quad I_0 = \int_A \left(x^2 + y^2\right) dA . \tag{12.286}$$

De (12.285) e (12.261), obtém-se

$$\begin{aligned} V_x &= GA\left(u_x' - \theta_y\right) , \\ V_y &= GA\left(u_y' + \theta_x\right) , \\ N &= EAu_z' , \\ M_x &= EI_x\theta_x' , \\ M_y &= EI_y\theta_y' \quad \text{e} \\ T &= GI_0\theta_z' . \end{aligned} \tag{1.287}$$

Introduzindo-se (1.287) em (12.273), chega-se às seguintes equações diferenciais ordinárias de segunda ordem em $(0, \ell)$

$$\begin{aligned} &\left[GA\left(u_x' - \theta_y\right)\right]' + \overline{n}_x = 0 , \\ &\left[GA\left(u_y' + \theta_x\right)\right]' + \overline{n}_y = 0 , \\ &\left[EA\left(u_z'\right)\right]' + \overline{n}_z = 0 , \\ &\left[EI_x\theta_x'\right]' - GA\left(u_y' + \theta_x\right) + \overline{m}_x = 0 , \\ &\left[EI_y\theta_y'\right]' + GA\left(u_x' - \theta_y\right) + \overline{m}_y = 0 \quad \text{e} \\ &\left[GI_0\theta_z'\right]' + \overline{m}_z = 0 . \end{aligned} \tag{1.288}$$

Quando a barra é prismática, as propriedades geométricas (12.286) são constantes ao logo do eixo. (1.288) fornece então

[67] Estes eixos são denominados centrais, porque $S_x = S_y = 0$, e principais de inércia, porque $I_{xy} = 0$.

$$
\begin{aligned}
& GA\big(\, u_x'' - \theta_y' \,\big) + \overline{n}_x \,=\, 0 \,, \\
& GA\big(\, u_y'' + \theta_x' \,\big) + \overline{n}_y \,=\, 0 \,, \\
& EA u_z'' + \overline{n}_z \,=\, 0 \,, \\
& EI_x \theta_x'' - GA\big(\, u_y' + \theta_x \,\big) + \overline{m}_x \,=\, 0 \,, \\
& EI_y \theta_y'' + GA\big(\, u_x' - \theta_y \,\big) + \overline{m}_y \,=\, 0 \quad \text{e} \\
& GI_0 \theta_z'' + \overline{m}_z \,=\, 0 \,.
\end{aligned}
\tag{1.289}
$$

Observação 12.49

Para se obter o momento de inércia a torção em (12.285) no lugar do momento polar de inércia seria necessário introduzir o empenamento da seção transversal na hipótese cinemática. Em (12.285) costuma-se introduzir fatores de correção nas expressões dos esforços cortantes para compensar a distribuição não-uniforme de tensões de cisalhamento na seção.

Observação 12.50

A Teoria de Timoshenko é invariante frente a mudanças de eixo. Isto significa que os deslocamentos $\{\, u, v, w \,\}$ resultantes não dependem da posição do eixo na seção transversal. Para se verificar isto, observe-se que (1.282) é invariante.

2.17.2 Teoria de Bernoulli-Euler para barras no espaço

A hipótese cinemática de Bernoulli-Euler[68] é semelhante à hipótese de Timoshenko e supõe que, após a deformação, as seções transversais permaneçam planas, indeformáveis e ortogonais ao eixo da barra. Isto significa que, em (12.256),

$$
\theta_x \,=\, -u_y' \quad \text{e} \quad \theta_y \,=\, u_x' \,. \tag{12.290}
$$

As condições (12.290) são aqui denominadas *vínculo de Bernoulli-Euler*. Logo

$$
\eta_x \,=\, 0 \quad \text{e} \quad \eta_y \,=\, 0 \,, \tag{12.291}
$$

assim como

$$
\kappa_x \,=\, -u_y'' \quad \text{e} \quad \kappa_y \,=\, u_x'' \,. \tag{12.292}
$$

De (12.268) vem

$$
\delta W_{\text{int}} \,=\, \int_0^\ell \big(\, N \delta u_z' - M_x \delta u_y'' + M_y \delta u_x'' + T \delta \theta_z' \,\big)\, dz \,. \tag{12.293}
$$

Por integração por partes de (12.293) chega-se em

$$
\begin{aligned}
\delta W_{\text{int}} \,=\, & \int_0^\ell \big(\, -N' \delta u_z - M_x'' \delta u_y + M_y'' \delta u_x - T' \delta \theta_z \,\big)\, dz \,+ \\
& + \Big(\, N \delta u_z - M_x \delta u_y' + M_y \delta u_x' + T \delta \theta_z \,\Big)_0^\ell + \big(\, M_x' \delta u_y - M_y' \delta u_x \,\big)_0^\ell .
\end{aligned}
\tag{12.294}
$$

Da mesma forma, de (12.271) vem

[68] J. Bernoulli, *Véritable hypothèse de la résistance des solides, avec la demonstration de la courbure des corps qui font ressort* , 1705, in : Collected Works of J. Bernoulli (1774), Genebra, Suiça ; L. Euler, *Methodi inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Additamentum I. De curvis elasticis*, 1744, in: Opera omnia Euleriana, ed. by C. Carathéodory, 1952, Berna, Suiça.

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_0^\ell \big(\,\overline{n}_x\delta u_x + \overline{n}_y\delta u_y + \overline{n}_z\delta u_z - \overline{m}_x\delta u_y' + \overline{m}_y\delta u_x' + \overline{m}_z\delta\theta_z\,\big)\,dz + \delta W_{\text{ext}}^* =$$
$$= \int_0^\ell \big(\big(\,\overline{n}_x - \overline{m}_y'\,\big)\delta u_x + \big(\,\overline{n}_y + \overline{m}_x'\,\big)\delta u_y + \overline{n}_z\delta u_z + \overline{m}_z\delta\theta_z\,\big)\,dz + \tag{12.295}$$
$$+\big(-\overline{m}_x\delta u_y + \overline{m}_y\delta u_x\,\big)_0^\ell + \delta W_{\text{ext}}^*\ ,$$

onde

$$\delta W_{\text{ext}}^* = \big(\,n_x^*\delta u_x + n_y^*\delta u_y + n_z^*\delta u_z\,\big)_0^\ell + \big(-m_x^*\delta u_y' + m_y^*\delta u_x' + m_z^*\delta\theta_z\,\big)_0^\ell\ . \tag{1.296}$$

Em (1.296), $(\cdot)^*$ são os esforços aplicados nas extremidades da barra. O Teorema dos Trabalhos Virtuais, juntamente com (12.294) e (12.295), fornece então as seguintes equações locais de equilíbrio

$$\begin{aligned} &N' + \overline{n}_z = 0\ ,\\ &M_x'' + \overline{n}_y + \overline{m}_x' = 0\ ,\\ &-M_y'' + \overline{n}_x - \overline{m}_y' = 0 \quad \text{e}\\ &T' + \overline{m}_z = 0\ , \end{aligned} \tag{12.297}$$

em $(0,\ell)$, assim como as seguintes condições de contorno naturais

$$\begin{aligned} &-M_y' - \overline{m}_y = n_x^*\ , \quad M_x' + \overline{m}_x = n_y^*\ , \quad N = n_z^*\ ,\\ &M_y = m_y^*\ , \quad M_x = m_x^* \quad \text{e} \quad T = m_z^* \end{aligned} \tag{1.298}$$

em $z = 0$ e $z = \ell$. As equações diferenciais ordinárias resultantes de (12.297) e (1.287) são agora

$$\begin{aligned} &\big[\,EAu_z'\,\big]' + \overline{n}_z = 0\ ,\\ &-\big[\,EI_xu_y''\,\big]'' + \overline{n}_y + \overline{m}_x' = 0\ ,\\ &-\big[\,EI_yu_x''\,\big]'' + \overline{n}_x - \overline{m}_y' = 0 \quad \text{e}\\ &\big[\,GI_0\theta_z'\,\big]' + \overline{m}_z = 0\ . \end{aligned} \tag{1.299}$$

Observação 12.51

Os esforços cortantes não aparecem nesta teoria, pois não realizam trabalho. No entanto, por estática obtém-se

$$V_x = -M_y' - \overline{m}_y \quad \text{e} \quad V_y = M_x' + \overline{m}_x\ . \tag{1.300}$$

Observação 12.52

(1.299) contém duas equações diferenciais ordinárias de quarta ordem que regem a flexão.

Observação 12.53

A Teoria de Bernoulli-Euler apresenta um inconveniente: se o vínculo (12.290) for imposto para um eixo, ele não será obedecido, em geral, por nenhum outro eixo. Isto significa que a Teoria de Bernoulli-Euler é variante perante mudanças de eixo, sendo invariante somente para problemas planos. É interessante notar que este fato permanece ainda desconhecido da maioria dos engenheiros estru-

turais. Pode-se mostrar que o eixo mais consistente teoricamente para se formular a Teoria de Bernoulli-Euler é o eixo dos centros de cisalhamento e não o dos centros de gravidade da seção.

2.17.3 Teoria de Timoshenko com o vínculo fraco de Wagner

Pode-se introduzir o empenamento da seção transversal devido à torção na Teoria de Timoshenko. Para isso, considere-se a função empenamento da torção uniforme de Saint-Venant ϕ descrita no Capítulo 10. Supõe-se aqui então que o deslocamento na direção normal à seção transversal devido ao empenamento por torção seja dado por $p\phi$, onde $p = p(z)$ mede a intensidade do empenamento e $\phi = \phi(x,y)$ é determinada com a origem no centro de cisalhamento da seção transversal, conforme o Capítulo 10. Esta hipótese sobre o empenamento é aqui denominada de *vínculo fraco de Wagner*[69] e foi utilizada por Reissner e Simo no contexto da não-linearidade geométrica[70]. Assim a componente w do deslocamento passa a ser dada por

$$w = u_z' + \theta_x y - \theta_y x + p\phi \ , \tag{12.301}$$

e as deformações por

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= u_x' - \theta_y - \theta_z' y + p\phi_{,x} \ , \\ \gamma_{yz} &= u_y' + \theta_x + \theta_z' x + p\phi_{,y} \ , \\ \varepsilon_z &= u_z' + \theta_x y - \theta_y' x + p'\phi \quad \text{e} \\ \varepsilon_x &= \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0 \ , \end{aligned} \tag{12.302}$$

onde

$$\phi_{,x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{e} \quad \phi_{,y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \ . \tag{12.303}$$

Logo, pode-se escrever em notação vetorial

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r} + p\phi \boldsymbol{e}_z \ . \tag{12.304}$$

De (12.304) resultam as seguintes deformações em notação técnica

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= u_x' - \theta_y - \theta_z' y + p\phi_{,x} \ , \\ \gamma_{yz} &= u_y' + \theta_x + \theta_z' x + p\phi_{,y} \ , \\ \varepsilon_z &= u_z' + \theta_x' y - \theta_y' x + p'\phi \quad \text{e} \\ \varepsilon_x &= \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0 \ , \end{aligned} \tag{12.305}$$

onde

$$\phi_{,x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{e} \quad \phi_{,y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \ . \tag{1.306}$$

Desta forma, o trabalho virtual interno escreve-se como

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V \boldsymbol{\tau} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma} \, dV, \tag{12.307}$$

onde

[69] H. Wagner, *Verdrehung und Knickung von offenen Profilen*, Technische Hochschule, Danzig, 1929.
[70] E. Reissner, *On one-dimensional large-displacement finite-strain beam theory*, Studies of Applied Mathematics and Physics, 1973; J.C. Simo, *A finite strain beam formulation, the three-dimensional dynamic problem. Part I*, Computer Methods in Applied mechanics and Engineering, v49, 1985.

$$\delta\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \delta\gamma_{xz} \\ \delta\gamma_{yz} \\ \delta\varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta u_x' - \delta\theta_y - \delta\theta_z' y + \delta p \phi_{,x} \\ \delta u_y' + \delta\theta_x + \delta\theta_z' x + \delta p \phi_{,y} \\ \delta u_z' + \delta\theta_x' y - \delta\theta_y' x + \delta p' \phi \end{bmatrix}. \tag{12.308}$$

Logo

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^\ell \big[\boldsymbol{n} \cdot \delta\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{m} \cdot \delta\boldsymbol{\kappa} + Q\delta p + B\delta p' \big] dz \,, \tag{12.309}$$

onde $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\kappa}$ são dados por (12.261) e

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{n} = \int_A \boldsymbol{\tau}\, dA \,, \quad \boldsymbol{m} = \int_A (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\tau})\, dA \,, \\ &Q = \int_A \big(\tau_{xz}\phi_{,x} + \tau_{yz}\phi_{,y} \big) dA \quad \text{e} \quad \int_A \sigma_z \phi dA \end{aligned} \tag{12.310}$$

são os esforços seccionais internos desta teoria. Enquanto $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{m}$ são os mesmos de (12.266), Q é denominada bi-cortante e B é denominado bi-momento.

Após integração por partes, o trabalho virtual dos esforços internos é dado por

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = &-\int_0^\ell \big(\boldsymbol{n}' \cdot \delta\boldsymbol{u} + \big(\boldsymbol{m}' + \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{n} \big) \cdot \delta\boldsymbol{\theta} + \big(B' - Q \big) \delta p \big) dz + \\ &+ \big(\boldsymbol{n} \cdot \delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{m} \cdot \delta\boldsymbol{\theta} + B\delta p \big)_0^\ell \,. \end{aligned} \tag{12.311}$$

Por outro lado, o trabalho virtual dos esforços externos é dado por

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_0^\ell \big(\bar{\boldsymbol{n}} \cdot \delta\boldsymbol{u} + \bar{\boldsymbol{m}} \cdot \delta\boldsymbol{\theta} + \bar{B}\delta p \big) dz + \big(\boldsymbol{n}^* \cdot \delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{m}^* \cdot \delta\boldsymbol{\theta} + B^* \delta p \big)_0^\ell \,, \tag{12.312}$$

onde $\bar{\boldsymbol{n}}$ e $\bar{\boldsymbol{m}}$ são as forças e os momentos externos por unidade de comprimento, respectivamente, dados por (1.272),

$$\bar{B} = \int_A (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{e}_z) \phi dA + \int_\Gamma \big(\bar{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{e}_z \big) \phi dA \tag{1.313}$$

é o bi-momento por unidade de comprimento aplicado ao longo da barra, $\boldsymbol{n}^*$ e $\boldsymbol{m}^*$ são as forças e os momentos aplicados nas extremidades, assim como B^* é o bi-momento aplicado nas extremidades da barra.

O Teorema dos Trabalhos Virtuais, (12.311) e (12.312) fornecem as seguintes equações locais de equilíbrio em $(0, \ell)$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{n}' + \bar{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{o} \,, \\ &\boldsymbol{m}' + \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{n} + \bar{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{o} \quad \text{e} \\ &B' - Q + \bar{B} = 0 \,, \end{aligned} \tag{12.314}$$

assim como as seguintes condições de contorno naturais

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}^* \,, \quad \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}^* \quad \text{e} \quad B = B^* \tag{12.315}$$

em $z = 0$ e $z = \ell$.

Suponha-se, para simplificar esta apresentação, que a seção transversal seja simétrica em relação aos eixos x e y, de modo que (12.284) e

$$\int_A \phi dA = \int_A x\phi dA = \int_A y\phi dA = 0 \tag{12.316}$$

sejam válidas. Logo, o centro de gravidade e o centro de cisalhamento da seção transversal coincidem. Adotando-se (12.275), (12.284) e (12.316), tem-se que

$$
\begin{aligned}
& V_x = GA\eta_x + G\Big[\int_A \phi_{,x} dA\Big] p \ , \quad V_y = GA\eta_y + G\Big[\int_A \phi_{,y} dA\Big] p \ , \\
& N = EA\eta_z \ , \quad M_x = EI_x \kappa_x \ , \quad M_y = EI_y \kappa_y \ , \\
& T = GI_0 \kappa_z + G\Big[\int_A \big(x\phi_{,y} - y\phi_{,x} \big) dA\Big] p \ , \\
& Q = G\Big[\int_A \phi_{,x} dA\Big]\eta_x + G\Big[\int_A \phi_{,y} dA\Big]\eta_y + G\Big[\int_A \big(x\phi_{,y} - y\phi_{,x} \big) dA\Big]\kappa_z + \\
& \qquad + G\Big[\int_A \Big(\big(\phi_{,x}\big)^2 + \big(\phi_{,y}\big)^2 \Big) dA\Big] p \quad \text{e} \\
& B = EI_\phi p' \ ,
\end{aligned}
\tag{12.317}
$$

onde (12.286) e o *momento de inércia ao empenamento* da seção transversal, dado por

$$
I_\phi = \int_A \phi^2 dA \tag{12.318}
$$

foram utilizados. Com a ajuda de (10.168), (10.171) e (12.284) pode-se mostrar que

$$
\begin{aligned}
& \int_A \phi_{,x} dA = \int_A \phi_{,y} dA = 0 \quad \text{e} \\
& \int_A \big(y\phi_{,x} - x\phi_{,y} \big) dA = \int_A \Big(\big(\phi_{,x}\big)^2 + \big(\phi_{,y}\big)^2 \Big) dA = I_0 - I_T \ .
\end{aligned}
\tag{1.319}
$$

Logo, de (12.317) com (1.319) e (12.284), chega-se em

$$
\begin{aligned}
& V_x = GA\eta_x \ , \\
& V_y = GA\eta_y \ , \\
& N = EA\eta_z \ , \\
& M_x = EI_x \kappa_x \ , \\
& M_y = EI_y \kappa_y \ , \\
& T = GI_0 \kappa_z - G\big(I_0 - I_T \big) p \ , \\
& Q = -G\big(I_0 - I_T \big)\kappa_z + G\big(I_0 - I_T \big) p \quad \text{e} \\
& B = EI_\phi p' \ ,
\end{aligned}
\tag{12.320}
$$

Introduzindo-se (12.320) em (12.314), obtém-se as seguintes equações diferenciais ordinárias de segunda ordem em $(0, \ell)$

$$
\begin{aligned}
&\big[GA\big(u_x' - \theta_y\big)\big]' + \overline{n}_x = 0\,,\\
&\big[GA\big(u_y' + \theta_x\big)\big]' + \overline{n}_y = 0\,,\\
&\big[EA\big(u_z'\big)\big]' + \overline{n}_z = 0\,,\\
&\big[EI_x\theta_x'\big]' - GA\big(u_y' + \theta_x\big) + \overline{m}_x = 0\,,\\
&\big[EI_y\theta_y'\big]' + GA\big(u_x' - \theta_y\big) + \overline{m}_y = 0\,,\\
&\big[GI_0\theta_z'\big]' + [G(I_T - I_0)p]' + \overline{m}_z = 0 \quad \text{e}\\
&\big[EI_\phi p'\big]' - G(I_T - I_0)\theta_z' - G(I_0 - I_T)p + \overline{B} = 0\,.
\end{aligned}
\tag{1.321}
$$

Quando a barra é prismática, as propriedades geométricas (12.286), (12.318) e (1.319) são constantes ao logo do eixo. (1.321) fornece então

$$
\begin{aligned}
&GA\big(u_x'' - \theta_y'\big) + \overline{n}_x = 0\,,\\
&GA\big(u_y'' + \theta_x'\big) + \overline{n}_y = 0\,,\\
&EAu_z'' + \overline{n}_z = 0\,,\\
&EI_x\theta_x'' - GA\big(u_y' + \theta_x\big) + \overline{m}_x = 0\,,\\
&EI_y\theta_y'' + GA\big(u_x' - \theta_y\big) + \overline{m}_y = 0\,,\\
&GI_0\theta_z'' + G(I_T - I_0)p' + \overline{m}_z = 0 \quad \text{e}\\
&EI_\phi p'' - G(I_T - I_0)\theta_z' - G(I_0 - I_T)p + \overline{B} = 0\,.
\end{aligned}
\tag{1.322}
$$

Observação 12.54

Pode-se mostrar que a Teoria de Timoshenko com o vínculo fraco de Wagner é invariante perante mudanças de eixo. Isto significa que os deslocamentos $\{u, v, w\}$ resultantes não dependem da posição do eixo na seção transversal.

2.17.4 Teoria de Timoshenko-Wagner para barras no espaço

Esta teoria é obtida a partir da Teoria de Timoshenko-Wagner, impondo-se a seguinte condição (denominada *vínculo de Wagner*)

$$
p = \theta_z'\,. \tag{12.323}
$$

(12.323) é a contraparte do vínculo de Bernoulli-Euler (12.290) na torção. Logo

$$
\delta W_{\text{int}} = \int_0^\ell \big[\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{m}\cdot\delta\boldsymbol{\kappa} + B\delta\theta_z''\big]dz\,, \tag{12.324}
$$

onde

$$
\boldsymbol{m} = \int_A \big[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\tau} + \big(\tau_{xz}\phi_{,x} + \tau_{yz}\phi_{,y}\big)\boldsymbol{e}_z\big]dA\,. \tag{1.325}
$$

Após integração por partes, o trabalho virtual dos esforços internos é dado por

$$\delta W_{\text{int}} = -\int_0^\ell \big(\boldsymbol{n}' \cdot \delta\boldsymbol{u} + \big(\boldsymbol{m}' + \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{n} - B''\boldsymbol{e}_z\big) \cdot \delta\boldsymbol{\theta}\big)\, dz + \\ + \big(\boldsymbol{n} \cdot \delta\boldsymbol{u} + \big(\boldsymbol{m} - B'\boldsymbol{e}_z\big) \cdot \delta\boldsymbol{\theta} + B\delta\theta_z'\big)_0^\ell \,. \tag{1.326}$$

Por outro lado, o trabalho virtual dos esforços externos é dado por

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{ext}} &= \int_0^\ell \big(\overline{\boldsymbol{n}} \cdot \delta\boldsymbol{u} + \overline{\boldsymbol{m}} \cdot \delta\boldsymbol{\theta} + \overline{B}\delta\theta_z'\big)\, dz + \big(\boldsymbol{n}^* \cdot \delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{m}^* \cdot \delta\boldsymbol{\theta} + B^*\delta\theta_z'\big)_0^\ell = \\ &= \int_0^\ell \big(\overline{\boldsymbol{n}} \cdot \delta\boldsymbol{u} + \big(\overline{\boldsymbol{m}} - \overline{B}'\boldsymbol{e}_z\big) \cdot \delta\boldsymbol{\theta}\big)\, dz + (\boldsymbol{n}^* \cdot \delta\boldsymbol{u})_0^\ell + \\ &\quad + \big(\big(\boldsymbol{m}^* + \overline{B}\boldsymbol{e}_z\big) \cdot \delta\boldsymbol{\theta} + B^*\delta\theta_z'\big)_0^\ell \,. \end{aligned} \tag{12.327}$$

O Teorema dos Trabalhos Virtuais e (12.327) fornecem as seguintes equações locais de equilíbrio em $(0, \ell)$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{n}' + \overline{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{o} \quad \text{e} \\ &\boldsymbol{m}' + \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{n} + \overline{\boldsymbol{m}} - \big(B'' + \overline{B}'\big)\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{o} \,, \end{aligned} \tag{12.328}$$

assim como as seguintes condições de contorno naturais

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}^* \,, \quad \boldsymbol{m} - \big(B' + \overline{B}\big)\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{m}^* \quad \text{e} \quad B = B^* \tag{12.329}$$

em $z = 0$ e $z = \ell$. Observe-se como a condição natural dos momentos de torção ficou mais complicada. Em alguns textos, o esforço $-B'\boldsymbol{e}_z$ é chamado de *momento de flexo-torção*.

Suponha-se, para simplificar esta apresentação, que a seção transversal seja simétrica em relação aos eixos x e y, de modo que (12.284) e (12.316) sejam válidas. Adotando-se (12.275), (12.284) e (12.316), tem-se de forma análoga a (12.320) as seguintes equações

$$\begin{aligned} V_x &= GA\eta_x \,, \\ V_y &= GA\eta_y \,, \\ N &= EA\eta_z \,, \\ M_x &= EI_x\kappa_x \,, \\ M_y &= EI_y\kappa_y \,, \\ T &= GI_T\kappa_z \quad \text{e} \\ B &= EI_\phi\theta_z'' \,. \end{aligned} \tag{12.330}$$

Introduzindo-se (12.330) em (12.328), obtém-se as seguintes equações diferenciais em $(0, \ell)$

$$\begin{aligned} &\big[GA\big(u_x' - \theta_y\big)\big]' + \overline{n}_x = 0 \,, \\ &\big[GA\big(u_y' + \theta_x\big)\big]' + \overline{n}_y = 0 \,, \\ &\big[EA\big(u_z'\big)\big]' + \overline{n}_z = 0 \,, \\ &\big[EI_x\theta_x'\big]' - GA\big(u_y' + \theta_x\big) + \overline{m}_x = 0 \,, \\ &\big[EI_y\theta_y'\big]' + GA\big(u_x' - \theta_y\big) + \overline{m}_y = 0 \quad \text{e} \\ &\big[GI_T\theta_z'\big]' - \big[EI_\phi\theta_z''\big]'' + \overline{m}_z - \overline{B}' = 0 \,. \end{aligned} \tag{1.331}$$

2.17.5 Teoria de Bernoulli-Euler-Wagner para barras no espaço

Esta teoria é obtida impondo-se o vínculo de Bernoulli-Euler (12.291) na Teoria de Timoshenko-Wagner. As equações diferenciais ordinárias resultantes são

$$\begin{aligned}
&\left[EAu_z'\right]' + \overline{n}_z = 0\,,\\
&-\left[EI_x u_y''\right]'' + \overline{n}_y + \overline{m}_x' = 0\,,\\
&-\left[EI_y u_x''\right]'' + \overline{n}_x - \overline{m}_y' = 0 \quad \text{e}\\
&\left[GI_T\theta_z'\right]' - \left[EI_\phi\theta_z''\right]'' + \overline{m}_z - \overline{B}' = 0\,.
\end{aligned} \tag{1.332}$$

Observação 12.55

Se $\theta_z'' \to 0$ ($\theta_z'' = 0$ é uma das hipóteses da torção uniforme), $(1.332)_4$ tende assintoticamente a

$$\left[GI_T\theta_z'\right]' + \overline{m}_z = 0\,. \tag{1.333}$$

$(1.332)_{1\text{-}3}$ e $(1.333)_4$ correspondem a (1.299) da Teoria de Bernoulli-Euler com I_0 substituído por I_T e são as equações comumente utilizadas na Resistência dos Materiais. Elas valem contudo somente para seções nas quais o centro de gravidade e o centro de cisalhamento coincidem, com o eixo passando por eles.

Observação 12.56

A Teoria de Bernoulli-Euler-Wagner padece do mesmo problema da Teoria de Bernoulli-Euler: ela é variante perante mudanças de eixo, sendo invariante somente para problemas planos sem torção. Pode-se mostrar que, para $GA \to \infty$ e $GI_0 \to \infty$ a Teoria de Timoshenko com o vínculo fraco de Wagner tende assintoticamente para a Teoria de Bernoulli-Euler-Wagner com o eixo colocado nos centros de cisalhamento das seções transversais. Portanto, o eixo mais consistente teoricamente para formulá-la é este eixo, e não o dos centros de gravidade da seção.

2.17.6 Teoria de Vlassov para seções delgadas abertas

A teoria de Vlassov[71] para barras de seção aberta de paredes delgadas é obtida a partir da Teoria de de Timoshenko com o vínculo fraco de Wagner aplicando-se o vínculo forte de Wagner (12.323) e o vínculo de Bernoulli-Euler (12.290) no centro de cisalhamento das seções transversais, assim como a *hipótese de Vlassov*, a saber: a função empenamento é admitida constante ao longo da espessura das paredes e calculada com a hipótese de distorção nula, ou seja, $\gamma_{sz} = 0$, onde s é a coordenada ao longo dos eixos das paredes. A função obtida é denominada *área setorial* e recebe usualmente o símbolo ω.

2.18 Método da Carga Unitária para Estruturas de Barras

O Método da Carga Unitária em estruturas de barras é uma das aplicações mais importantes do Teorema dos Trabalhos Virtuais Complementares. Aqui, para exemplificar, considera-se apenas a Teoria de Bernoulli-Euler em vigas.

[71] B.Z. Vlassov, "Piéces longues en voiles minces", Eyrolles, Paris, 1962.

2.18.1 Estruturas Estaticamente Determinadas

Um exemplo importante de aplicação do teorema dos trabalhos virtuais complementares é o método da carga unitária para estruturas estaticamente determinadas. Para exemplificar, considere-se a viga em balanço da Figura 12.5 e a teoria de Bernoulli-Euler.

O trabalho virtual complementar externo da carga unitária $\delta P = 1$ é dado por

$$\delta W^*_{\text{ext}} = \delta P \, d = d \, , \tag{12.334}$$

onde d é o deslocamento transversal da viga no ponto de aplicação da carga unitária. Lembrando-se que a curvatura na Teoria de Bernoulli-Euler é dada por

$$v'' = \frac{M}{EI} \, , \tag{12.335}$$

o trabalho virtual complementar interno dos momentos fletores em equilíbrio com a carga unitária é dado por

$$\delta W^*_{\text{int}} = \int_0^\ell \frac{M\bar{M}}{EI} dz \, , \tag{12.336}$$

onde M é o momento fletor na viga devido ao carregamento externo e $\bar{M}$ é o momento fletor em equilíbrio com a carga unitária. Pelo teorema dos trabalhos virtuais complementares

$$d = \int_0^\ell \frac{M\bar{M}}{EI} dz \, . \tag{12.337}$$

Logo, o método da carga unitária é muito conveniente para o cálculo de deslocamentos em estruturas estaticamente determinadas como a deste exemplo.

Figura 12.5: Viga carregada transversalmente

2.18.2 Método dos Esforços

Outro exemplo importante de aplicação do teorema dos trabalhos virtuais complementares é o método dos esforços para solução de estruturas estaticamente indeterminadas. Para exemplificar, considere-se a viga da Figura 12.6 e a teoria de Bernoulli-Euler.

Figura 12.6: Viga hiperestática

O *método dos esforços* para solução de estruturas estaticamente indeterminadas consiste dos quatro passos descritos a seguir.

Redução a uma estrutura estaticamente determinada

O primeiro passo é a escolha de uma estrutura estaticamente determinada, denominada *estrutura isostática fundamental* (EIF). Esta pode ser qualquer estrutura estaticamente determinada derivada da estrutura original através da retirada de vínculos, ou da execução de cortes, e com a introdução, em seus lugares, de esforços incógnitos denominados *esforços hiperestáticos*. Para a estrutura da Figura 12.6 a EIF escolhida está na Figura 12.7.

Figura 12.7: Estrutura isostática fundamental

Cálculo do deslocamento no corte devido ao carregamento

O segundo passo é o cálculo do deslocamento na EIF devido ao carregamento no vínculo retirado através do método da carga unitária. De forma análoga ao caso anterior e com a notação da Figura 12.8, tem-se

$$d_0 = \int_0^{\ell} \frac{M_0 \bar{M}_1}{EI} dz \ . \tag{12.338}$$

Figura 12.8: Cálculo de d_0

Figura 12.9: Cálculo de d_1

Cálculo do deslocamento no corte devido ao esforço hiperestático

O terceiro passo é o cálculo do deslocamento na EIF devido ao esforço hiperestático no vínculo retirado através do método da carga unitária. De forma análoga ao exemplo anterior e com a notação da Figura 12.9, tem-se

$$d_1 = -\int_0^\ell \frac{M_1\bar{M}_1}{EI}\,dz = X_1\int_0^\ell \frac{\bar{M}_1\bar{M}_1}{EI}\,dz\ . \tag{12.339}$$

Compatibilização dos deslocamentos

O quarto passo é a *compatibilização dos deslocamentos*. Como o deslocamento no vínculo retirado é nulo, tem-se

$$d_1 = d_0\ . \tag{12.340}$$

Logo

$$X_1 = \frac{\displaystyle\int_0^\ell \frac{M_0\bar{M}_1}{EI}\,dz}{\displaystyle\int_0^\ell \frac{\bar{M}_1\bar{M}_1}{EI}\,dz}\,. \tag{12.341}$$

Pela superposição dos efeitos, os momentos fletores na viga são dados por

$$M = M_0 + M_1 = M_0 - X_1\bar{M}_1\,. \tag{12.342}$$

2.18.3 Estruturas Estaticamente Indeterminadas

Um exemplo importante de aplicação do teorema dos trabalhos virtuais complementares é o método da carga unitária para estruturas estaticamente indeterminadas. Para exemplificar, considere-se a viga da Figura 12.6, para a qual deseja-se calcular o deslocamento transversal numa seção qualquer. Aplicando-se uma carga unitária na EIF na seção desejada, tem-se, de acordo com a Figura 12.10,

$$d = \int_0^\ell \frac{M\bar{M}}{EI}\,dz\,. \tag{12.343}$$

Ou, utilizando (12.342),

$$d = \int_0^\ell \frac{M_0\bar{M}}{EI}\,dz - X_1\int_0^\ell \frac{\bar{M}_1\bar{M}}{EI}\,dz\,. \tag{12.344}$$

Figura 12.10: Cálculo do deslocamento em uma seção qualquer

Observação 12.57

Os métodos acima somente podem ser aplicados a estruturas hiperestáticas redutíveis a uma estrutura estaticamente determinada. Isto é possível, em geral, somente para estruturas de barras, o que limita o uso de tais métodos. Outra limitante está na dificuldade em se automatizar esta redução. Desta forma, com a exceção das vigas contínuas, na qual a EIF canônica é a obtida pela introdução de articulações nos apoios, dificilmente os métodos acima são utilizados em programas computacionais. Conseqüentemente a sua utilidade restringe-se a cálculos manuais ou semi-automáticos com um pequeno número de incógnitas, na maioria das vezes apenas uma.

2.19 Teoremas de Energia para Estruturas de Barras

No século XIX foram formulados diversos teoremas que podem ser úteis na análise de estruturas formadas por barras. Esta seção é dedicada a eles.

2.19.1 1º Teorema de Castigliano

Considerem-se, para simplificar, estruturas de barras submetidas a carregamentos concentrados. Dividindo este tipo de estruturas em elementos de modo que todos os carregamentos estejam atuando sobre nós, isto é, sobre junções de um ou mais elementos, pode-se afirmar que o campo de deslocamentos é uma função dos deslocamentos e rotações destes nós. Chamando de a_i, $i = 1,2,\ldots n$, estes deslocamentos e rotações, o funcional energia de deformação degenera-se numa função destes deslocamentos. Logo, pode-se escrever que

$$U_{\text{int}} = U_{\text{int}}(a_1, a_2, \ldots a_n) . \tag{12.345}$$

Chamando de P_i os carregamentos nas direções de a_i, e considerando-os constantes, tem-se que

$$U = U_{\text{int}}(a_1, a_2, \ldots a_n) - \sum_{i=1}^{n} P_i a_i . \tag{12.346}$$

Pelo teorema da energia potencial

$$\frac{\partial U}{\partial a_j} = \frac{\partial U_{\text{int}}}{\partial a_j} - P_j = 0 . \tag{12.347}$$

Logo

$$P_j = \frac{\partial U_{\text{int}}}{\partial a_j} , \tag{12.348}$$

resultado conhecido como *primeiro teorema de Castigliano*.

2.19.2 1º Teorema de Engesser

Considerem-se, novamente, estruturas de barras submetidas a carregamentos concentrados. Dividindo este tipo de estruturas em elementos de modo que todos os carregamentos estejam atuando sobre nós, isto é, sobre junções de dois ou mais elementos, esta estrutura pode ser tornada estaticamente determinada pela retirada de vínculos ou pela execução de cortes nos nós, liberando-se m esforços hiperestáticos X_k, $k = 1,2,\ldots m$. A esta estrutura dá-se o nome de *Estrutura Isostática Fundamental* (EIF). Nela, os esforços solicitantes são uma função dos carregamentos P_i, $i = 1,2,\ldots n$, nos nós e dos esforços hiperestáticos X_k, $k = 1,2,\ldots m$. O funcional energia de deformação complementar se degenera em uma função dos carregamentos P_i, $i = 1,2,\ldots n$, nos nós e dos esforços hiperestáticos X_k, $k = 1,2,\ldots m$. Logo, pode-se escrever que

$$U^*_{\text{int}} = U^*_{\text{int}}(P_i, X_k) . \tag{12.349}$$

Supondo-se que não haja deslocamentos impostos aos nós da estrutura, tem-se

$$U^* = U^*_{\text{int}}(P_i, X_k) . \tag{12.350}$$

Pelo teorema da energia potencial complementar, conclui-se que

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_k} = 0 , \tag{12.351}$$

resultado conhecido como *primeiro teorema de Engesser*.

2.19.3 Teorema de Menabrea

Considerando-se que na EIF os deslocamentos nos nós e pontos de aplicação de X_k são também função dos carregamentos $P_i,\, i = 1,2,\ldots n$, nos nós e dos esforços hiperestáticos $X_k,\, k = 1,2,\ldots m$, pode-se, no caso de elasticidade linear, escrever

$$U^*_{\text{int}}(P_i, X_k) = U_{\text{int}}(a_i) \circ a_i(P_i, X_k)\,. \tag{12.352}$$

Do primeiro teorema de Engesser vem

$$\frac{\partial[U_{\text{int}}(a_i) \circ a_i(P_i, X_k)]}{\partial X_k} = 0\,. \tag{12.353}$$

O resultado acima é conhecido como *teorema de Menabrea*. Com a sua ajuda é possível também se derivar o Método dos Esforços para estruturas de barras.

Observação 12.58: Equações de Fontviolant

As equações nos esforços hiperestáticos, deduzidas com a ajuda do Teorema de Menabrea, são chamadas de *Equações de Fontviolant*.

2.19.4 2º Teorema de Engesser

Admita-se, agora, que o deslocamento a_i de um nó seja imposto na EIF. Como este deslocamento não altera os esforços, a energia potencial complementar da estrutura fica sendo

$$U^* = U^*_{\text{int}} - P_i a_i\,. \tag{12.354}$$

Pelo teorema da energia potencial complementar

$$\frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \frac{\partial U^*_{\text{int}}}{\partial P_i} - a_i = 0\,. \tag{12.355}$$

Portanto

$$a_i = \frac{\partial U^*_{\text{int}}}{\partial P_i}\,, \tag{12.356}$$

resultado conhecido como *segundo teorema de Engesser*.

2.19.5 2º Teorema de Castigliano

No caso de elasticidade linear, do segundo teorema de Engesser resulta

$$a_i = \frac{\partial[U_{\text{int}}(a_i) \circ a_i(P_i, X_k)]}{\partial P_i}\,. \tag{12.357}$$

O resultado acima é conhecido como *segundo teorema de Castigliano*.

Observação 12.59

Veja-se que em (12.353) e (12.357) utilizou-se (12.352) e não $U_{\text{int}}(P_i, X_k)$, como é comum em textos de Resistência dos Materiais.

Observação 12.60

Com o advento dos computadores digitais e o uso crescente do Método dos Deslocamentos, os métodos derivados do Teorema dos Trabalhos Virtuais Complementares, como o Método dos Esforços, assim como os métodos derivados dos Teoremas de Engesser e Castigliano estão caindo gradativamente em desuso.

Exercícios 12.1

a) Refaça detalhadamente a dedução das equações de equilíbrio, das condições de contorno e das equações constitutivas da Teoria de Timoshenko para barras no espaço com um eixo em uma origem qualquer. Quais são os graus de liberdade desta teoria? Quais são os esforços internos desta teoria?
b) Refaça detalhadamente a dedução das equações de equilíbrio, das condições de contorno e das equações constitutivas da Teoria de Bernoulli-Euler para barras no espaço com um eixo em uma origem qualquer. Quais são os graus de liberdade desta teoria? Quais são os esforços internos desta teoria? Mostre que a teoria depende da escolha do eixo.
c) Refaça detalhadamente a dedução das equações de equilíbrio, das condições de contorno e das equações constitutivas da Teoria de Reissner-Simo para barras no espaço, com o eixo em uma origem qualquer. Quais são os graus de liberdade desta teoria? Quais são os esforços internos desta teoria?
d) Refaça detalhadamente a dedução das equações de equilíbrio, das condições de contorno e das equações constitutivas da Teoria de Timoshenko-Wagner para barras no espaço com o eixo nos centros de cisalhamento. Quais são os graus de liberdade desta teoria? Quais são os esforços internos desta teoria?
e) Refaça detalhadamente a dedução das equações de equilíbrio, das condições de contorno e das equações constitutivas da Teoria de Bernoulli-Euler-Wagner para barras no espaço com o eixo nos centros de cisalhamento. Quais são os graus de liberdade desta teoria? Quais são os esforços internos desta teoria?
f) Seja uma viga em balanço com uma carga na extremidade constituída de um material não-linear tal que $v'' = \frac{1}{EI}\left(M + kM^3\right)$. Calcule pelo método da carga unitária o deslocamento transversal da extremidade.
g) Seja uma viga contínua de dois tramos iguais com uma carga concentrada no meio do tramo da esquerda. Calcule o diagrama dos momentos e o deslocamento sob a carga pelo método da carga unitária. Suponha material elástico linear.
h) Resolva a viga hiperestática da Figura 12.6 por meio dos teoremas de energia da seção 2.19 e compare com o Método da Carga Unitária.

13

Métodos Diretos de Solução de Problemas Estáticos

Neste capítulo são abordados métodos diretos de solução de problemas estáticos da Mecânica dos Sólidos Deformáveis. Estes métodos transformam o problema formulado originalmente na forma de equações diferenciais ou integrais em equações algébricas, cuja solução numérica aproxima a solução do problema original.

1 Projeções e Resíduos Ponderados

Um conceito útil para se formular métodos aproximados de solução de problemas regidos por equações diferenciais é o conceito de projeção.

1.1 Projeção Clássica

Definição 13.1: Projeção

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão $n \leq \infty$, dotado de produto escalar e normado com a norma associada ao produto escalar, como foi visto no Capítulo 2. Seja $\tilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão $m \leq n$, denominado sub-espaço de $\mathcal{V}$. Chama-se *projeção* de $v \in \mathcal{V}$ em $\tilde{\mathcal{V}}$ o vetor $\overline{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$ tal que

$$\langle v - \overline{v}, \tilde{v} \rangle = 0 \,, \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}} \,, \tag{13.1}$$

Exemplos 13.1

- Sejam $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ e $\tilde{\mathcal{V}} = \mathbb{R}^2$. Então é único $\overline{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$ tal que

  $$\langle v - \overline{v}, \tilde{v} \rangle = 0 \,, \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}} \,,$$

  conforme a Figura 13.1 abaixo. Note-se que a projeção é o elemento de $\tilde{\mathcal{V}}$ mais próximo de v, justificando a nomenclatura de projeção.

Figura 13.1: Projeção

- Sejam $\mathcal{V} = \mathbb{L}_2(a,b)$ e

$$\tilde{\mathcal{V}} = \{ f \in L_2(a,b) \mid f(x) = a_1 + a_2 x \} .$$

$\tilde{\mathcal{V}}$ é o espaço das funções lineares em (a,b). Logo, a projeção de $f \in \mathcal{V}$ em $\tilde{\mathcal{V}}$ é a função $\overline{f} \in \tilde{\mathcal{V}}$ dada por

$$\overline{f}(x) = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 x$$

tal que

$$\int_a^b \left(f - \overline{f} \right) \tilde{f} dx = 0, \forall \tilde{f} \in \tilde{\mathcal{V}} .$$

Da expressão acima, tem-se

$$\int_a^b (f - (\overline{a}_1 + \overline{a}_2 x))(a_1 + a_2 x)\, dx = 0, \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R} ,$$

que é igual a

$$\left[\int_a^b (f - (\overline{a}_1 + \overline{a}_2 x))\, dx \right] a_1 + \left[\int_a^b (f - (\overline{a}_1 + \overline{a}_2 x))\, x dx \right] a_2 = 0, \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R} .$$

Logo, tem-se

$$\int_a^b (f - (\overline{a}_1 + \overline{a}_2 x))\, dx = \int_a^b (f - (\overline{a}_1 + \overline{a}_2 x))\, x dx = 0 .$$

Ou seja, o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} \int_a^b dx & \int_a^b x dx \\ \int_a^b x dx & \int_a^b x^2 dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a}_1 \\ \overline{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b f dx \\ \int_a^b f x dx \end{bmatrix} .$$

que determina univocamente $\overline{f}$. Conclui-se que a projeção é um potente método de aproximação de funções.

- Sejam $\mathcal{V} = \mathbb{L}_2(a,b)$ e

$$\tilde{\mathcal{V}} = \left\{ f \in L_2(a,b) \mid f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i(x) \right\}.$$

$\tilde{\mathcal{V}}$ é o espaço das funções que são combinações lineares das funções $\varphi_i(x)$, $1,2,\ldots m$. Logo, a projeção de $f \in \mathcal{V}$ em $\tilde{\mathcal{V}}$ é a função $\overline{f} \in \tilde{\mathcal{V}}$ dada por

$$\overline{f}(x) = \sum_{i=1}^{m} \overline{a}_i \varphi_i(x)$$

tal que

$$\int_a^b \left(f - \overline{f} \right) \tilde{f} dx = 0, \forall \tilde{f} \in \tilde{\mathcal{V}}.$$

Da expressão acima, tem-se

$$\int_a^b \left(f - \sum_{i=1}^{m} \overline{a}_i \varphi_i(x) \right) \left(\sum_{j=1}^{m} a_j \varphi_j(x) \right) dx = 0, \forall a_j \in \mathbb{R}.$$

Logo, tem-se

$$\int_a^b \left(f - \sum_{i=1}^{m} \overline{a}_i \varphi_i \right) \varphi_j dx = 0 \,,\; j = 1,2,\ldots m. \tag{13.2}$$

Ou seja, o seguinte sistema de equações lineares

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,, \tag{13.3}$$

onde

$$A_{ij} = \int_a^b \varphi_i \varphi_j dx, \quad x_i = \overline{a}_i \quad \text{e} \quad b_i = \int_a^b f \varphi_i dx. \tag{13.4}$$

O sistema (13.3) acima determina univocamente $\overline{f}$ se as funções $\varphi_i(x)$, $1,2,\ldots m$ forem linearmente independentes. Note-se que $\boldsymbol{A}$ é simétrica. A projeção é, portanto, um método geral e prático de aproximação de funções.

1.2 Resíduos Ponderados

Considere-se a seguinte função

$$r(x) = f(x) - \overline{f}(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \overline{a}_i \varphi_i(x). \tag{13.5}$$

Ela é denominada função *resíduo* da aproximação de f por $\overline{f}$. Veja que (13.2) pode ser escrita como

$$\int_a^b r \varphi_j dx = 0 \,,\; j = 1,2,\ldots m. \tag{13.6}$$

Diz-se que, em (13.6), o resíduo está ponderado pelas funções $\varphi_i(x)$, $1,2,\ldots m$. (13.6) é conhecida como a equação dos *resíduos ponderados,* e é equivalente a uma projeção no *espaço de aproximação* $\tilde{\mathcal{V}}$.

Observação 13.1

Sejam $\mathcal{V} = \mathbb{L}_2(a,b)$ e

$$\tilde{\mathcal{V}} = \left\{ f \in L_2(a,b) \mid f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i(x) \right\}.$$

$\tilde{\mathcal{V}}$ é o espaço das funções que são combinações lineares das funções $\varphi_i(x), 1,2,\ldots m$. Considere-se agora o seguinte problema de minimização

$$\min \left\| f - \tilde{f} \right\|, \tilde{f} \in \tilde{\mathcal{V}}. \tag{13.7}$$

Em (13.7) $\|\bullet\|$ é a norma associada ao produto escalar $\langle \bullet,\bullet \rangle$. Logo

$$\left\| f - \tilde{f} \right\| = \sqrt{\left\langle f - \tilde{f}, f - \tilde{f} \right\rangle}. \tag{13.8}$$

Diferenciando-se (13.8), tem-se

$$\frac{d\left\| f - \tilde{f} \right\|}{da_j} = \frac{\left\langle f - \tilde{f}, \varphi_j \right\rangle}{\sqrt{\left\langle f - \tilde{f}, f - \tilde{f} \right\rangle}} = 0, \quad j = 1,2\ldots m. \tag{13.9}$$

Portanto, o extremante $\overline{f}$ satisfaz

$$\left\langle f - \overline{f}, \varphi_j \right\rangle = 0, \; j = 1,2\ldots m. \tag{13.10}$$

(13.10) é equivalente a (13.2) e a (13.6). Logo, a projeção (13.1) é equivalente a um problema de minimização, ou seja, de se encontrar o elemento do espaço de aproximação mais próximo da função a ser aproximada, problema este dado por (13.7).

1.3 Projeção Generalizada

Definição 13.2: Projeção generalizada

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial de dimensão $n \leq \infty$, dotado de produto escalar e normado com a norma associada ao produto escalar. Sejam $\tilde{\mathcal{V}}, \breve{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}$ sub-espaços vetoriais de dimensão $m \leq n$. Chama-se *projeção generalizada* ortogonal a $\breve{\mathcal{V}}$ de $v \in \mathcal{V}$ em $\tilde{\mathcal{V}}$ o vetor $\overline{v} \in \tilde{\mathcal{V}}$ tal que

$$\langle v - \overline{v}, \tilde{v} \rangle = 0, \quad \forall \breve{v} \in \breve{\mathcal{V}}. \tag{13.11}$$

Exemplo 13.2

Sejam $\mathcal{V} = \mathbb{L}_2(a,b)$,

$$\tilde{\mathcal{V}} = \left\{ f \in L_2(a,b) \mid f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i(x) \right\} \quad \text{e}$$

$$\breve{\mathcal{V}} = \left\{ f \in L_2(a,b) \mid f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \psi_i(x) \right\}.$$

$\tilde{\mathcal{V}}$ é o espaço das funções que são combinações lineares das funções $\varphi_i(x), i = 1,2,\ldots m$. Logo, a projeção de $f \in \mathcal{V}$ em $\tilde{\mathcal{V}}$ é a função $\overline{f} \in \tilde{\mathcal{V}}$ dada por

$$\overline{f}(x) = \sum_{i=1}^{m} \overline{a}_i \varphi_i(x)$$

tal que

$$\int_a^b \left(f - \overline{f} \right) \breve{f} dx = 0, \forall \breve{f} \in \breve{\mathcal{V}}.$$

Da expressão acima, tem-se

$$\int_a^b \left(f - \sum_{i=1}^{m} \overline{a}_i \varphi_i(x) \right) \left(\sum_{j=1}^{m} a_j \psi_j(x) \right) dx = 0, \forall a_j \in \mathbb{R} .$$

Logo, tem-se

$$\int_a^b \left(f - \sum_{i=1}^{m} \overline{a}_i \varphi_i \right) \psi_j dx = 0 \ , \ j = 1,2,\ldots m . \tag{13.12}$$

Ou seja, o seguinte sistema de equações lineares

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \ , \tag{13.13}$$

onde

$$A_{ij} = \int_a^b \varphi_i \psi_j dx, \quad x_i = \overline{a}_i \quad \text{e} \quad b_i = \int_a^b f \psi_i dx . \tag{13.14}$$

O sistema (13.13) acima determina univocamente $\overline{f}$ se $\det \boldsymbol{A} \neq 0$. Note-se que $\boldsymbol{A}$ é, em geral, assimétrica.

Observação 13.2: Equação dos resíduos ponderados

(13.12) pode ser escrita como

$$\int_a^b r \psi_j dx = 0 \ , \ j = 1,2,\ldots m . \tag{13.15}$$

Diz-se que em (13.15) o resíduo está ponderado pelas funções $\psi_i(x)$, $i = 1,2,\ldots m$. A equação (13.15) também é conhecida como a *equação dos resíduos ponderados,* e é equivalente a uma projeção generalizada no espaço de aproximação $\tilde{\mathcal{V}}$. A projeção generalizada é um método geral de aproximação de funções. No entanto, projeções generalizadas não são equivalentes a problemas de minimização.

2 Formulações Equivalentes na Teoria das Estruturas

Considere-se o seguinte exemplo trivial, mas bastante ilustrativo.

Figura 13.2: barra sob tração

Trata-se de uma barra elástica linear de seção transversal $A = A(x)$ e módulo de elasticidade $E = E(x)$ submetida ao carregamento longitudinal distribuído $p = p(x)$. Na extremidade $x = 0$ os deslocamentos longitudinais $u = u(x)$, admitidos uniformes em cada seção, são impostos e dados por $u(0) = \overline{u}_0$. Na extremidade $x = \ell$ é aplicada uma força longitudinal P.

O equilíbrio de um elemento infinitesimal da barra fornece

$$N' + p = 0, \quad \text{em } (0, \ell), \tag{13.16}$$

onde N é a força normal aplicada numa seção da barra. Mas, admitindo-se elasticidade linear,

$$N = ku' \,, \quad \text{onde} \quad k = EA \,. \tag{13.17}$$

Logo, o equilíbrio local de um elemento diferencial da barra leva à seguinte equação diferencial

$$\left(ku'\right)' + p = 0 \,, \quad \text{em } (0, \ell) \,. \tag{13.18}$$

As condições de contorno do problema são

$$u(0) = \overline{u}_0 \quad \text{e} \quad ku'(\ell) = P \,. \tag{13.19}$$

Apresentam-se, a seguir, quatro formas equivalentes de se formular o problema estático acima.

2.1 Formulação Diferencial

Seja

$$\mathcal{C}_2^B(0, \ell) = \left\{ v \in \mathcal{C}_2(0, \ell) \mid v(0) = \overline{u}_0 \text{ e } ku'(\ell) = P \right\} \tag{13.20}$$

o conjunto das funções contínuas até a segunda derivada que satisfazem as duas condições de contorno de (13.19). A formulação diferencial do problema estático consiste em encontrar $u \in \mathcal{C}_2^B(0, \ell)$ tal que

$$\left(ku'\right)' + p = 0 \,, \quad \text{em } (0, \ell) \,. \tag{13.21}$$

Note-se que, em (13.21), tem-se necessariamente $k \in \mathcal{C}_1(0, \ell)$.

2.2 Formulação Forte

Pelo Lema Fundamental do Cálculo das Variações o problema estático (13.21) consiste em encontrar $u \in \mathcal{C}_2^B(0, \ell)$, tal que

$$\int_0^\ell \left[\left(ku'\right)' + p \right] w dx = 0 \,, \quad \forall w \in \mathbb{L}_2(0, \ell) \,. \tag{13.22}$$

(13.22) é denominada *formulação forte* de (13.21).

Observação 13.3

Note-se também que $\mathcal{C}_2^B(0, \ell)$ não é um espaço vetorial, pois a soma de duas funções pertencentes a este conjunto não pertence a ele. Já o conjunto

$$\mathcal{C}_2^{B=0}(0, \ell) = \left\{ v \in \mathcal{C}_2^B(0, \ell) \mid v(0) = 0 \text{ e } ku'(\ell) = 0 \right\} \tag{13.23}$$

é um espaço vetorial. Logo, pode-se dizer que a solução do problema estático u satisfaz a

$$u - u_0 \in \mathcal{C}_2^{B=0}(0, \ell) \,, \tag{13.24}$$

onde u_0 satisfaz as duas condições de contorno, sendo por exemplo

$$u_0 = \overline{u}_0 + \frac{P}{k(\ell)} x \,. \tag{13.25}$$

O problema estático consiste então em encontrar $v \in \mathcal{C}_2^{B=0}(0, \ell)$ tal que

$$\Big(k(v+u_0)'\Big)' + p = 0\,, \quad \text{em } (0,\ell)\,. \tag{13.26}$$

Ou, pelo Lema Fundamental do Cálculo das Variações, o problema estático consiste em encontrar $v \in \mathcal{C}_2^{B=0}(0,\ell)$, tal que

$$\int_0^\ell \Bigg(\Big(k(u_0+v)'\Big)' + p\Bigg) w dx = 0\,, \quad \forall w \in \mathbb{L}_2(0,\ell)\,. \tag{13.27}$$

2.3 Formulação Fraca

Seja

$$\mathcal{H}_1^E(0,\ell) = \{u \in \mathcal{H}_1(0,\ell) \mid u(0) = \overline{u}_0\} \tag{13.28}$$

o conjunto das funções contínuas com primeira derivada quase sempre contínua que satisfazem as condições de contorno essenciais de (13.19). E seja

$$\mathcal{H}_1^{E=0}(0,\ell) = \Big\{u \in \mathcal{H}_1^E(0,\ell) \mid u(0) = 0\Big\} \tag{13.29}$$

o conjunto das funções contínuas com primeira derivada quase sempre contínua que satisfazem as condições de contorno essenciais homogêneas de (13.19). O problema estático consiste em encontrar $u \in \mathcal{H}_1^E(0,\ell)$ tal que

$$\int_0^\ell \big(ku'w' - pw\big)dx - Pw(\ell) = 0, \forall w \in \mathcal{H}_1^{E=0}(0,\ell), \tag{13.30}$$

onde $k \in \mathbb{L}_2(0,\ell)$.

A demonstração que o problema (13.30) é equivalente ao (13.27) é feita por integração por partes de (13.30), ou seja,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\ell \big(ku'w' - pw\big)dx - Pw(\ell) = \\
&\qquad = -\int_0^\ell \Big(\big(ku'\big)' + p\Big) w dx + \big(ku'(\ell) - P\big)w(\ell) = 0, \forall w \in \mathcal{H}_1^{E=0}(0,\ell),
\end{aligned}$$

que fornece, pelo Lema Fundamental do Cálculo das Variações, as seguintes equações

$$\big(ku'\big)' + p = 0 \quad \text{em } (0,\ell) \quad \text{e} \quad ku' = P \quad \text{em } x = \ell\,. \tag{13.31}$$

Observação 13.4

Note-se que a solução de (13.30) está em $\mathcal{H}_1^E(0,\ell)$ e pode não pertencer a $\mathcal{C}_2^B(0,\ell)$. Neste sentido a formulação fraca é mais geral que a forte ou diferencial. Além disso $k(x)$ pode pertencer a $\mathbb{L}_2(0,\ell)$ e ser, portanto, descontínuo em alguns pontos (mudança brusca de seção ou mudança de material).

Observação 13.5

Tanto u como w não precisam, nesta formulação, satisfazer *a priori* a condição de contorno natural.

Observação 13.6

$\mathcal{H}_1^{E=0}(0,\ell)$ é um espaço vetorial enquanto que $\mathcal{H}_1^{E}(0,\ell)$ não. No entanto, pode-se dizer que a solução do problema estático u satisfaz a

$$u - u_0 \in \mathcal{H}_1^{E=0}(0,\ell)\,, \tag{13.32}$$

onde

$$u_0 = \overline{u}_0\,. \tag{13.33}$$

Observação 13.7

(13.30) tem duas interpretações. A primeira é imediatamente obtida ao se substituir w por δu em (13.30). A expressão resultante

$$\int_0^\ell \big(ku'\delta u' - p\delta u\big)dx - P\delta u(\ell) = 0,\ \ \forall \delta u \in \mathcal{H}_1^{E=0}(0,\ell), \tag{13.34}$$

é a aplicação do teorema dos trabalhos virtuais ao problema em questão. A segunda interpretação é obtida fazendo-se $w = \tilde{v}$ em (13.30) e utilizando-se (13.32). A expressão obtida por integração por partes,

$$-\int_0^\ell \left(\Big(k(u_0+u)'\Big)' + p\right)\tilde{v}dx + \big(ku'(\ell) - P\big)\tilde{v}(\ell) = 0, \forall \tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{H}_1^{E=0}(0,\ell), \tag{13.35}$$

é a projeção de $\big(ku'\big)' + p$ em $\mathcal{H}_1^{E=0}(0,\ell)$ e de $P - ku'(\ell)$ em $\mathbb{R}$. Como a solução está neste espaço, a projeção encontrada é exatamente a solução.

2.4 Formulação Variacional

A formulação variacional do problema estático é encontrar

$$u \in \mathcal{H}_1^{E}(0,\ell) = \{u \in \mathcal{H}_1(0,\ell) \mid u(0) = \overline{u}_0\} \tag{13.36}$$

tal que u caracterize o mínimo do funcional

$$U = \int_0^\ell \left[\frac{1}{2}k(u')^2 - pu\right]dx - Pu(\ell)\,. \tag{13.37}$$

O funcional U em (13.37) é a energia potencial da barra. A demonstração é quase trivial, pois, ao se igualar a variação de (13.37) a zero, obtém-se (13.34). Lembrando a interpretação de projeção clássica dada à Formulação Fraca, a Formulação Variacional é um problema de minimização associado a esta projeção.

Observação 13.8

Note-se, no entanto, que o problema de minimização (13.37) não corresponde a minimizar a distância dada pela norma do Espaço de Sobolev $\mathcal{H}_1(0,\ell)$, que é dada por

$$\|u\| = \int_0^\ell \left[(u')^2 + u^2\right]dx\,,$$

mas minimizar pela norma em energia, definida por $\|u\| = U(u)$.

3 Métodos Aproximados para Problemas Estáticos

Chama-se *método direto* de solução de problemas da Mecânica das Estruturas todo método que reduz o problema à solução de um ou mais sistemas de equações algébricas, lineares ou não. O Método das Diferenças Finitas é um método direto de solução de PVC's que utiliza a Formulação Diferencial do Problema.

Nesta seção, abordam-se métodos diretos que utilizam formulações integrais dos problemas da Teoria das Estruturas, conhecidas como Formulação Forte, Fraca e Variacional.

3.1 Geração de Subespaços de Aproximação

Seja $\mathcal{V}$ o espaço vetorial da solução de um problema estrutural. Sejam $\varphi_i \in \mathcal{V}$, $i = 1,2,\ldots n$, funções linearmente independentes. Logo $\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_n\}$ formam uma base de um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ de dimensão n. Este sub-espaço gerado pela base $\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_n\}$ é denotado por $\tilde{\mathcal{V}}_n$ e denominado subespaço de aproximação. Ao se adicionar ao conjunto $\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_n\}$ mais uma função φ_{n+1} linearmente independente, o novo sub-espaço gerado, denotado por $\tilde{\mathcal{V}}_{n+1}$ contém necessariamente $\tilde{\mathcal{V}}_n$, isto é, $\tilde{\mathcal{V}}_n \subset \tilde{\mathcal{V}}_{n+1}$. Subespaços assim gerados podem ser utilizados para se efetuar projeções e assim se encontrar soluções aproximadas para problemas estruturais. Isto significa que a solução aproximada procurada será da forma

$$\tilde{v}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i \ , \tag{13.38}$$

No entanto, muitas vezes, o subespaço onde se projeta a solução deve satisfazer determinadas condições de contorno. Então a solução aproximada procurada pode ser da seguinte forma

$$\tilde{v}_n = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i \ , \tag{13.39}$$

onde φ_0 satisfaz as condições de contorno que devem ser satisfeitas e φ_i são nulas nos locais onde as condições de contorno são impostas. Nem sempre é fácil satisfazer as condições de contorno. Por isso, formulações que exijam *a priori* o mínimo possível de condições de contorno são muito convenientes na prática.

3.2 Método de Ritz

O *Método de Ritz*, também conhecido por *Método de Rayleigh-Ritz*, foi concebido para encontrar soluções aproximadas de extremantes de funcionais. Ele consiste em introduzir a aproximação (13.39) no funcional, transformando-o em uma função nas n variáveis reais a_i. Os extremantes desta função são encontrados ao se igualar suas derivadas parciais a zero.

Observação 13.9

O método de Ritz em sua versão *restrita* utiliza aproximações que satisfazem *a priori* todas as condições de contorno do problema, enquanto que em sua versão *generalizada* utiliza aproximações que satisfazem *a priori* apenas as condições de contorno essenciais do problema.

Exemplo 13.3

Considere-se o seguinte funcional

$$F(y) = \int_1^2 y'\left(1 + x^2 y'\right) dx \ ,$$

com as condições de contorno essenciais abaixo

$$y(1) = 1 \quad \text{e} \quad y(2) = 4 \ .$$

O extremante deste funcional é

$$y_0 = -\frac{6}{x} + 7$$

e o valor dele neste extremo é

$$F(y_0) = 21 \ .$$

É fácil mostrar que este extremo é um mínimo. Considere-se agora uma aproximação gerada por

$$\tilde{y}_1 = \varphi_0 + a_1 \varphi_1 \ ,$$

onde

$$\varphi_0 = 3x - 2 \quad \text{e} \quad \varphi_1 = (x-1)(x-2) \ .$$

Logo

$$F(\tilde{y}_1) = F(a_1) = \frac{4}{5} a_1^2 + 3a_1 + 24 \ .$$

Assim

$$\frac{dF}{da_1} = \frac{8}{5} a_1 + 3 = 0 \Rightarrow \overline{a}_1 = -\frac{15}{8} = -1{,}875 \ .$$

A solução aproximada é então

$$\overline{y}_1 = 3x - 2 - \frac{15}{8}(x-1)(x-2) \ .$$

Uma medida da aproximação é dada por

$$F(\overline{y}_1) = 21{,}188 \ ,$$

ou seja, $0,9\%$ de erro em relação ao valor exato.

Observação 13.10

Note-se que, em problemas de mínimo, tem-se sempre para o Método de Ritz

$$F(\overline{y}_n) \geq F(\overline{y}_{n+1}) \geq F(y_0) \ . \tag{13.40}$$

Ou seja, a convergência para o mínimo do funcional é feita por cima.

Exemplos 13.4

a) Considere-se um pilar prismático engastado inferiormente e submetido a um carregamento vertical de compressão P na extremidade superior. A carga de flambagem deste pilar é dada pelo mínimo do funcional

$$P(\theta) = \frac{\displaystyle\int_0^\ell EI\left(\theta'\right)^2 dx}{\displaystyle\int_0^\ell \theta^2 dx} \ , \tag{13.41}$$

onde θ é a rotação das seções transversais. O mínimo deste funcional é a carga de Euler

$$P_E = \frac{\pi^2}{4}\frac{EI}{\ell^2}\,. \tag{13.42}$$

b) Seja uma solução aproximada dada por

$$\tilde{\theta}_1 = a_1 x\,(2\ell - x)\,, \tag{13.43}$$

que corresponde à versão restrita do método de Ritz. Introduzindo-se $\tilde{\theta}_1$ acima em (13.41), tem-se

$$P\left(\tilde{\theta}_1\right) = 2{,}5\,\frac{EI}{\ell^2}\,, \tag{13.44}$$

o que significa um erro de $1{,}32\%$ na carga de Euler.

c) Seja agora uma solução aproximada, também quadrática, dada por

$$\tilde{\theta}_2 = a_1 x + a_2 x^2\,, \tag{13.45}$$

que corresponde à versão generalizada do método de Ritz. Introduzindo-na em (13.41), tem-se

$$P\left(\tilde{\theta}_2\right) = \frac{30 + 60\alpha + 40\alpha^2}{10 + 15\alpha + 6\alpha^2}\frac{EI}{\ell^2}\,, \quad \text{onde} \quad \alpha = \frac{a_2}{a_1}\,. \tag{13.46}$$

Assim

$$\frac{dP}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = -0{,}453 \tag{13.47}$$

e

$$P\left(\tilde{\theta}_1\right) = 2{,}48596\,\frac{EI}{\ell^2}\,, \tag{13.48}$$

o que significa um erro de $0{,}75\%$ na carga crítica de Euler.

Exemplo 13.5

Considere-se o problema descrito por (13.36) e (13.37), ou seja, encontrar

$$u \in \mathcal{H}_1^E\,(0,\ell) = \left\{ u \in \mathcal{H}_1^E\,(0,\ell) \mid u\,(0) = \overline{u}_0 \right\} \tag{13.49}$$

tal que u caracterize o mínimo do funcional

$$U = \int_0^\ell \left[\frac{1}{2}k\left(u'\right)^2 - pu\right]dx - Pu\,(\ell)\,. \tag{13.50}$$

Seja uma solução aproximada do tipo

$$\tilde{u} = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i\,, \tag{13.51}$$

onde $\varphi_0 = \overline{u}_0$ e $\varphi_i \in \mathcal{W}_1^{E=0}\,(0,\ell)$, $i = 1,2,\ldots n$. Introduzindo-se (13.51) em (13.50), tem-se, com a convenção da somatória,

$$U = \int_0^\ell \left[\frac{1}{2}k a_i\varphi_i a_j\varphi_j - p\,(\overline{u}_0 + a_i\varphi_i)\right]dx - P\,(\overline{u}_0 + a_i\varphi_i\,(\ell))\,. \tag{13.52}$$

Ou

$$U\,(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} - c\,, \tag{13.53}$$

onde

$$
\begin{aligned}
A_{ij} &= \int_0^{\ell} k\varphi_i'\varphi_j' dx \ , \\
x_i &= a_i \ , \\
b_i &= \int_0^{\ell} p\varphi_i dx + P\varphi_i(\ell) \quad \text{e} \\
c &= \int_0^{\ell} p\overline{u}_0 dx + P\overline{u}_0 \ .
\end{aligned}
\tag{13.54}
$$

Logo

$$
\nabla U = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \ . \tag{13.55}
$$

(13.55) é um sistema de n equações lineares. Note-se que a matriz $\boldsymbol{A}$ é simétrica, isto é, $A_{ij} = A_{ji}$.

3.3 Método dos Elementos Finitos

Considere-se o exemplo anterior e seja uma solução aproximada do tipo

$$
\tilde{u} = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i \ , \tag{13.56}
$$

onde $\varphi_0 = \overline{u}_0$ e $\varphi_i \in \mathcal{H}_1^{E=0}(0,\ell)$, $i = 1,2,\ldots n$ são mostradas na Figura 13.3. As funções lineares φ_i da Figura 13.3 caracterizam-se por terem valor 1 no pontos i de coordenada x_i e valor zero nos demais. Além disso elas tem valor não nulo apenas nos intervalos contíguos ao ponto i. Os pontos i são denominados nós e os intervalos entre nós são denominados elementos. Ao conjunto de nós e elementos dá-se o nome de *malha*. Este método de interpolação é denominado *Método dos Elementos Finitos*.

Figura 13.3: Funções de interpolação do Método dos Elementos Finitos

Propriedades 13.1

O Método de Ritz conjugado com o Método dos Elementos Finitos tem as seguintes vantagens:

a) Os coeficientes a_i têm significado físico, pois $a_i = \tilde{u}(x_i)$;

b) A matriz $\boldsymbol{A}$ é, em geral, simétrica e rarefeita[72] (isto é, com poucos elementos não nulos); no caso ela é tridiagonal;

[72] Ou esparsa.

c) As integrações que constam dos elementos de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{b}$ podem ser efetuadas em cada elemento finito separadamente;
d) A precisão da aproximação é controlada pela dimensão dos elementos;
e) As condições de contorno naturais não oferecem dificuldades, ao contrário do Método das Diferenças Finitas;
f) Os elementos podem ter dimensões diferentes, ao contrário do Método das Diferenças Finitas (veja Capítulo 4).

3.4 Método da Colocação

Um método que não exige uma formulação variacional é o *Método da Colocação*, que tem experimentado nos dias atuais um certo renascimento. Para exemplificar considere-se a formulação forte do problema da seção anterior, ou seja, encontrar $u \in \mathcal{C}_2^B(0,\ell)$, tal que

$$\int_0^\ell \Big[\big(ku'\big)' + p\Big] w dx = 0\,, \quad \forall w \in \mathbb{L}_2(0,\ell)\,. \tag{13.57}$$

Seja uma solução aproximada do tipo

$$\tilde{u} = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i\,, \tag{13.58}$$

onde

$$\varphi_0 = \overline{u}_0 + \frac{P}{k(\ell)} x\,. \tag{13.59}$$

e $\varphi_i \in \mathcal{C}_2^{B=0}(0,\ell)$, $i = 1,2,\ldots n$. À função

$$r(x) = k\tilde{u}'' + p \tag{13.60}$$

dá-se o nome de resíduo, pois ela é identicamente nula apenas para a solução. A expressão dos resíduos ponderados é dada então por

$$\int_0^\ell r\psi_j dx = 0\,,\ j = 1,2,\ldots n\,. \tag{13.61}$$

A função delta de Dirac é uma função generalizada ou *distribuição* denotada por $\delta(x)$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)\,dx = f(x_0)\,. \tag{13.62}$$

Escolhendo-se

$$\psi_j(x) = \delta\big(x - x_j\big),\ j = 1,2,\ldots n\,, \tag{13.63}$$

onde x_j, $j = 1,2,\ldots n$, são pontos no intervalo $(0,\ell)$, de (13.61) obtém-se

$$\big(k\tilde{u}'(x_j)\big)' + p\big(x_j\big) = 0,\ j = 1,2,\ldots n\,, \tag{13.64}$$

A projeção generalizada (13.64) é conhecida como *método da colocação*.

Observação 13.11

Observe-se que a projeção efetuada em (13.63) utilizou a formulação forte do problema. Isto significa que $\tilde{u}$ deve satisfazer as condições de contorno essenciais e naturais do problema. Já as funções ψ_j, $j = 1,2,\ldots n$, podem ser bem gerais, como é o caso acima.

3.5 Método de Ritz-Galerkin e método de Petrov-Galerkin

Para exemplificar considere-se a formulação fraca do problema da seção anterior, ou seja, encontrar $u \in \mathcal{H}_1^E(0,\ell)$ tal que

$$\int_0^\ell \big(ku'w' - pw\big)dx - Pw(\ell) = 0, \forall w \in \mathcal{H}_1^{E=0}(0,\ell), \tag{13.65}$$

onde $k \in \mathbb{L}_2(0,\ell)$.

Seja uma solução aproximada do tipo

$$\tilde{u} = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i \ , \tag{13.66}$$

onde $\varphi_0 = \overline{u}_0$ e $\varphi_i \in \mathcal{H}_1^{E=0}(0,\ell)$, $i = 1,2,\ldots n$. A expressão dos resíduos ponderados é dada então por

$$\int_0^\ell \big(ku'\psi_j' - p\psi_j\big)dx - P\psi_j(\ell) = 0 \ , \ j = 1,2,\ldots n \ . \tag{13.67}$$

Nesta projeção o método da colocação não é mais possível, mas, em compensação, a aproximação (13.66) pode ser mais simples. Introduzindo-na em (13.67), tem-se

$$\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \ , \tag{13.68}$$

onde

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_0^\ell k\varphi_i'\psi_j' \, dx \ , \\ x_i &= a_i \quad \text{e} \\ b_i &= \int_0^\ell p\psi_i dx + P\psi_i(\ell) \ . \end{aligned} \tag{13.69}$$

Logo (13.68) é um sistema de n equações lineares. Note-se que a matriz $\boldsymbol{A}$ é simétrica somente se

$$\varphi_i = \psi_i \ , \quad i = 1,2,\ldots n \ . \tag{13.70}$$

Quando (13.70) é utilizada a projeção é denominada *Método de Ritz-Galerkin*. Note-se também que o sistema obtido coincide com o obtido através do método de Ritz. No entanto, o método de Galerkin é mais geral, pois não pressupõe a existência de um funcional. Caso

$$\varphi_i = \psi_i + a\psi_i' \neq \psi_i \ , \quad i = 1,2,\ldots n \ , \tag{13.71}$$

onde a é uma constante, a projeção generalizada resultante é denominada *Método de Petrov-Galerkin*.

Observação 13.12

O Método dos Elementos Finitos também pode ser utilizado em conexão com os métodos de Petrov-Galerkin e de Ritz-Galerkin.

Observação 13.13

O Método de Petrov-Galerkin é importante na solução das equações de Navier-Stokes da Mecânica dos Fluidos Viscosos com o Método dos Elementos Finitos.

Exercícios 13.1

- Considere-se um pilar engastado na extremidade inferior e livre na extremidade superior e com comprimento ℓ. O coeficiente de rigidez EI é dado por $2k$ na metade inferior do pilar e por k na metade superior. Determine pelo método de Ritz, em ambas as versões, uma aproximação da carga crítica, utilizando polinômios quadráticos.
- Seja uma viga prismática sobre apoio elástico de Winkler de constante k, engastada à esquerda e simplesmente apoiada à direita e de comprimento ℓ. O funcional da energia potencial é dado por

$$U(v) = \int_0^\ell \left[\frac{1}{2}EI\left(v''\right)^2 + \frac{1}{2}kv^2 - pv\right]dx \ .$$

  onde p é constante. Determine a equação de Euler-Lagrange e condições de contorno. Encontre uma solução aproximada pelo Método de Ritz usando polinômios do grau mais baixo possível em ambas as versões do método.
- Formule o método de Ritz-Galerkin em conexão com o método dos elementos finitos para o problema da barra tracionada.

14

Critérios de Resistência

1 Introdução

Definição 14.1: Critério de resistência

Chama-se *critério de resistência* a função $F : \mathcal{S}_3 \to \mathbb{R}$, onde $\mathcal{S}_3$ é o espaço dos tensores de segunda ordem simétricos, tal que, para um estado de tensões caracterizado pelo tensor $\boldsymbol{T}$,

$$F(\boldsymbol{T}) \quad \begin{cases} \leq 0\,, & \text{o material resiste;} \\ > 0\,, & \text{o material não resiste.} \end{cases} \tag{14.1}$$

Observação 14.1

Por um material não resistir a um estado de tensões pode-se entender que o material rompe, fratura, é esmagado, escoa ou sofre quaisquer outros danos considerados excessivos. Muitas vezes a resistência de um material é apenas convencional, não caracterizando estados de tensão fisicamente especiais ou bem determinados, mas simplesmente estados não desejáveis de tensão.

Definição 14.2: Superfície de Resistência

A *superfície de resistência* associada a um critério de resistência é a hiper-superfície dada pela equação

$$F(\boldsymbol{T}) = 0\,. \tag{14.2}$$

2 Classes de Critérios de Resistência

Para se definir algumas classes de critérios de resistências as definições de função tensorial isótropa, transversalmente isótropa e ortótropa do Capítulo 8 são necessárias.

Definição 14.3: Critério de resistência isótropo

Um critério de resistência é dito isótropo se for uma função isótropa do tensor das tensões, de acordo com a Definição 9.9.

Definição 14.4: Critério de resistência transversalmente isótropo

Um critério de resistência é dito transversalmente isótropo se for uma função transversalmente isótropa do tensor das tensões, de acordo com a Definição 9.14.

Definição 14.5: Critério de resistência ortótropo

Um critério de resistência é dito ortótropo se for uma função ortótropa do tensor das tensões, de acordo com a Definição 9.12.

3 Critérios de Resistência Isótropos

Propriedades 14.1

a) Um critério de resistência isótropo pode ser expresso da seguinte forma

$$F(\boldsymbol{T}) = F(I_1, I_2, I_3)\,, \tag{14.3}$$

onde I_1, I_2, I_3 são os invariantes do tensor das tensões $\boldsymbol{T}$, conforme (8.29). Isto se verifica porque os invariantes independem da base onde o tensor das tensões é expresso.

b) Expressão equivalente a (14.3) para critérios de resistência isótropos, conforme (8.37) e (8.47), é

$$F(\boldsymbol{T}) = F(I_1, J_2, \theta)\,. \tag{14.4}$$

c) Outra expressão equivalente a (14.3) para critérios de resistência isótropos é

$$F(\boldsymbol{T}) = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\,. \tag{14.5}$$

Definição 14.6: Superfície de resistência de um critério isótropo

A *superfície de resistência* associada a um critério de resistência isótropo é a superfície no espaço $\mathbb{R}^3$ dada pela equação

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0\,. \tag{14.6}$$

onde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ são as tensões principais.

3.1 Critério de Rankine[73]

O *critério de Rankine*[74] foi formulado em 1857 para materiais litóides como solo e concreto. Este critério procura explicar a ruptura frágil por tração que ocorre nestes materiais, afirmando que a máxima tensão de tração no material não pode ultrapassar o valor f_t, conhecido como *resistência a tração* do material. Desta forma o critério de Rankine também é chamado de *critério da máxima tensão de tração* e pode ser expresso por

$$\sigma_{\max} \leq f_t \ . \tag{14.7}$$

Mas, conforme (8.16), tem-se

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{1}{3} I_1 + \frac{2}{3}\sqrt{3J_2}\cos\theta \ . \tag{14.8}$$

Logo, pode-se escrever

$$F(I_1, J_2, \theta) = \frac{1}{3} I_1 + \frac{2}{3}\sqrt{3J_2}\cos\theta - f_t \ . \tag{14.9}$$

Figura 14.1: Critério de Rankine

a) seções meridianas; b) seção antiesférica

A Figura 14.1 mostra a seção transversal da superfície de Rankine nos planos anti-esféricos ou octaédricos, bem como seus meridianos para $\theta = 0°$ e $\theta = 60°$. Note-se que a superfície é uma pirâmide reta com uma base triangular regular.

3.2 Critério de Tresca[75]

O *critério de Tresca*[76] foi formulado em 1868 para metais e supõe que a máxima tensão de cisalhamento seja a variável chave. Ele afirma que um metal se plastifica se a máxima tensão tangencial atingir a um valor f_τ. Por isso ele também é conhecido como *critério da máxima tensão tangencial.* Logo, pode-se escrever

[73] William J. M. Rankine (1820-1872).
[74] W.J.M. Rankine, *On the stability of loose earth*, Philos. Trans. R. Soc. London, 1857
[75] Henri Edouard Tresca (1814-1885).
[76] H. Tresca, *Mémoire sur l''ecoulement des corps solides*, Mémoires présentés par divers savants a l'Académie des Sciences, 18, 1868.

$$\tau_{\max} \leq f_\tau \ . \tag{14.10}$$

Lembrando-se que

$$\sigma_1 = \frac{1}{3} I_1 + \frac{2}{3}\sqrt{3J_2}\cos\theta \quad \text{e} \quad \sigma_3 = \frac{1}{3} I_1 + \frac{2}{3}\sqrt{3J_2}\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right), \tag{14.11}$$

tem-se

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{3J_2}\left(\cos\theta - \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{J_2}\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right). \tag{14.12}$$

Portanto,

$$F(J_2, \theta) = \sqrt{J_2}\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - f_\tau \ . \tag{14.13}$$

A Figura 14.2 mostra a seção transversal da superfície de Tresca no plano anti-esférico, bem como seus meridianos para $\theta = 0°, 30°, 60°$. Note-se que a superfície de plastificação é um prisma reto de base hexagonal regular.

Figura 14.2: Critério de Tresca

seções meridianas; b) seção antiesférica

3.3 Critério de Huber-von Mises

O *critério de Huber-von Mises*[77] foi formulado em 1904 por Huber[78] e em 1913 por von Mises[79] para metais e supõe que o invariante J_2 seja a variável chave. Ele afirma que um metal se plastifica num ponto se o invariante J_2 neste ponto atingir a um valor k . Logo

$$F(J_2) = \sqrt{J_2} - k \ . \tag{14.14}$$

A Figura 14.3 mostra a seção transversal da superfície de Huber-von Mises no plano antiesférico, bem como sua seção meridiana. Note-se que a superfície é um cilindro reto de base circular.

[77] M.T. Huber, Własciwa praca odkształcenia jako miara wytężenia materyału, Czasopismo Techniczne 22, 81-83, 1904, R. von Mises, Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse 582-592, 1913.
[78] Maksymilian Tytus Huber (1872-1950).
[79] Richard von Mises (1883-1953).

Figura 14.3: Critério de von Mises

a) seções meridianas; b) seção antiesférica

3.4 Critério de Mohr-Coulomb[80]

O *critério de Mohr* foi formulado em 1900 para qualquer tipo de material e sustenta que um material não suporta, em qualquer plano, tensões de cisalhamento superiores a um valor f que é função apenas da tensão normal atuante no mesmo plano em que a tensão de cisalhamento atua. Logo se pode escrever que

$$F = \tau - f(\sigma)\,, \tag{14.15}$$

onde $f(\sigma)$ é uma função determinada experimentalmente.

A forma mais simples desta função é a reta conhecida como *equação de Coulomb*, que data de 1773. Para ela escreve-se

$$F = \tau + \sigma \tan\phi - c\,, \tag{14.16}$$

onde c é conhecida como *coesão* e ϕ como *ângulo de atrito interno*. O critério expresso pela equação (14.16) é conhecido como *critério de Mohr-Coulomb*. A Figura 14.4 ilustra a equação de Coulomb no plano $\tau \times \sigma$. Observando-se a Figura 14.4, pode-se escrever que

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos\phi \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\text{sen}\phi\,. \tag{14.17}$$

Figura 14.4: Equação de Coulomb

Introduzindo-se (14.17) em (14.16), obtém-se

[80] Charles Augustin Coulomb (1736-1806).

$$F = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos\phi + \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\text{sen}\phi\right]\tan\phi - c\,. \tag{14.18}$$

Lembrando-se de (14.11), tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} &= \frac{1}{3}\sqrt{3J_2}\left(\cos\theta - \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{J_2}\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{e} \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} &= \frac{1}{3}I_1 + \frac{1}{3}\sqrt{3J_2}\left(\cos\theta + \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}I_1 + \frac{1}{3}\sqrt{3J_2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned} \tag{14.19}$$

Portanto

$$F = \sqrt{J_2}\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)(\cos\phi + \text{sen}\phi\tan\phi) + \left[\frac{1}{3}I_1 + \frac{1}{3}\sqrt{3J_2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right]\tan\phi - c\,. \tag{14.20}$$

A Figura 14.5 mostra a seção transversal da superfície de Mohr-Coulomb nos planos anti-esféricos, bem como seus meridianos para $\theta = 0°, 60°$. Note-se que a superfície é uma pirâmide reta de base hexagonal irregular.

Figura 14.5: Critério de Mohr-Coulomb

a) seções meridianas; b) seção antiesférica

3.5 Critério de Drucker-Prager[81]

O *critério de Drucker-Prager*[82] foi formulado em 1952 como uma simplificação do critério de Mohr-Coulomb. Ele é simplesmente uma modificação do critério de Huber-von Mises na seguinte forma

$$F(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k\,. \tag{14.21}$$

A Figura 14.6 mostra a seção transversal da superfície de Drucker-Prager nos planos antiesféricos, bem como sua seção meridiana. Note-se que a superfície é um cone reto de base circular.

[81] Daniel C. Drucker (1918-2001), William Prager (1903-1980).
[82] D.C. Drucker and W. Prager, *Soil mechanics and plastic analysis or limit design*, Q. Appl. Math., 10, 1952.

Figura 14.6: Critério de Drucker-Prager

a) seções meridianas; b) seção antiesférica

Exercícios 14.1

a) Qual o valor de θ nos ensaios de tração simples, compressão simples e cisalhamento simples?

b) Mostre que os cinco critérios de resistência isótropos deste capítulo podem ser colocados na forma

$$F(I_1, J_2, \theta) = f(I_1, J_2, \theta) - \kappa \ ,$$

onde f e κ têm dimensão de tensão.

c) A *tensão equivalente* de um critério é definida por

$$\overline{\sigma} = \alpha f(I_1, J_2, \theta) \ ,$$

de forma que num ensaio de tração simples

$$\overline{\sigma} = \sigma \ ,$$

onde σ é a tensão normal no ensaio. Determine α para os critérios de Rankine, Tresca, von Mises, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager.

d) Mostre que o critério de resistência também pode ser expresso por

$$F(\overline{\sigma}) = \overline{\sigma} - f_t \ ,$$

onde f_t é a resistência à tração do material. Mostre também que

$$\kappa = \frac{f_t}{\alpha} \ .$$

e) Se a tensão equivalente for definida para ensaios de cisalhamento simples com

$$\overline{\tau} = \alpha f(I_1, J_2, \theta) \ ,$$

qual serão os valores de α para os cinco critérios de Rankine, Tresca, von Mises, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager.

f) Em um ensaio de tração simples de um material a resistência medida é dada por f_t. Determine os parâmetros dos critérios de Rankine, Tresca e von Mises. Num ensaio de tração simples de um material a resistência medida é dada por f_t e num ensaio de compressão simples a resistência medida é dada por f_c. Determine os parâmetros dos critérios de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager.

15

Introdução à Teoria da Plasticidade

Este Capítulo apresenta uma pequena introdução à Teoria da Plasticidade sob linearidade geométrica. Dentro deste contexto serão abordados temas como a formulação de equações constitutivas elásticas perfeitamente plásticas e a formulação do problema quase-estático da Teoria da Plasticidade. O Capítulo encerra-se com uma introdução à Análise Limite para carregamento proporcional de grande importância prática.

1 Equações Constitutivas Elastoplásticas

1.1 Modelo uniaxial elástico perfeitamente plástico

Considere-se o modelo elástico perfeitamente plástico reapresentado na Figura 15.1.

Figura 15.1: Modelo elástico perfeitamente plástico

Em um ensaio uniaxial de tensões o modelo acima apresenta o comportamento descrito na Figura 15.2. Este comportamento é elástico enquanto a tensão σ for menor, em módulo, que a tensão de escoamento R. Para tensões iguais, em módulo, à tensão de escoamento R, ele escoa, isto é, apresenta deformações indefinidas. Quando o material é descarregado de um estado de tensão de tração com $\sigma = R$ ele apresenta comportamento elástico e deformações residuais ε^p. Se a seguir for imposta uma tensão de compressão $\sigma = -R$ ele escoará em sentido inverso. Se descarregado, novamente terá comportamento elástico e apresentará deformações residuais ε^p que poderão ser positivas ou negativas, conforme a extensão do escoamento na compressão.

Figura 15.2: Ensaio uniaxial de material elástico perfeitamente plástico

Embora o modelo seja simples, uma descrição matemática rigorosa de seu comportamento não é imediata. O objetivo desta seção é apresentar uma formulação rigorosa do comportamento do modelo elastoplástico acima.

Definição 15.1: Função de plastificação

Pode-se definir para o modelo acima a *função de plastificação,* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$F(\sigma) = |\sigma| - R\,. \tag{15.1}$$

Note-se que

$$F(\sigma) \quad \begin{cases} \leq 0 & \text{para estados de tensão admissiveis e} \\ > 0 & \text{para estados de tensão inadmissiveis.} \end{cases} \tag{15.2}$$

Definição 15.2: Domínio Elástico

Ao conjunto

$$\mathbb{E} = \{\sigma \mid F(\sigma) \leq 0\} \tag{15.3}$$

dá-se o nome de *domínio elástico* do material que no caso do material da Figura 15.1 é dado pelo intervalo

$$\mathbb{E} = [-R, R]\,. \tag{15.4}$$

Estados plasticamente admissíveis de tensão correspondem a pontos do domínio elástico.

Definição 15.3: Estados de tensão elásticos e elastoplásticos

Estados plasticamente admissíveis de tensão podem ser classificados de acordo com

a) $F(\boldsymbol{\sigma}) < 0$: estados elásticos de tensão;
b) $F(\boldsymbol{\sigma}) = 0$: estados elastoplásticos de tensão.

Definição 15.4: Decomposição da deformação

Suponha-se que a elasticidade do material seja descrita pela equação constitutiva $\hat{\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Define-se componente elástica da deformação, ou simplesmente *deformação elástica* associada ao estado de tensões caracterizado pela tensão σ, como a grandeza ε^e tal que

$$\sigma = \hat{\sigma}(\varepsilon^e)\,. \tag{15.5}$$

No caso de elasticidade linear, tem-se

$$\sigma = E\varepsilon^e \ , \tag{15.6}$$

onde E é o módulo de elasticidade. Define-se componente plástica da deformação, ou simplesmente *deformação plástica*, associada ao estado de tensões caracterizado pela tensão σ, como o escalar ε^p tal que

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \ . \tag{15.7}$$

Observação 15.1

Para estados elásticos de tensão o comportamento do material é regido por (15.5). Enquanto o material permanecer neste estado as deformações plásticas não variam, ou seja, $\dot{\varepsilon}^p = 0$. Para estados elastoplásticos de tensão o material pode ter dois tipos de comportamento. Ou ele apresenta comportamento elástico regido por (15.5) e neste caso $\dot{F} < 0$, ou ele apresenta comportamento plástico com $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$ e a tensão σ constante e igual em módulo a R, e neste caso $\dot{F} = 0$. Em estados plásticos a deformação plástica aumenta algebricamente $(\dot{\varepsilon}^p > 0)$ se $\sigma = R$ e diminui algebricamente $(\dot{\varepsilon}^p < 0)$ se $\sigma = -R$.

Definição 15.5: Lei de escoamento

Definindo-se

$$n = \frac{|\sigma|}{\sigma} \ , \tag{15.8}$$

pode-se, em geral, escrever

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\alpha} n \ , \quad \text{onde} \quad \dot{\alpha} \geq 0 \ . \tag{15.9}$$

(15.9) é conhecida como *lei de escoamento*.

Definição 15.6: Lei da normalidade

Note-se também que

$$n = \nabla F \ , \tag{15.10}$$

que é conhecida como *lei da normalidade*.

Definição 15.7: Condições de carregamento e descarregamento plástico

A variação da deformação plástica pode ser dada por (15.9) com

$$\dot{\alpha} \quad \begin{cases} = 0 & \text{se } F < 0 \ \text{ ou } \ \text{se } F = 0 \ \text{ e } \ \dot{F} < 0 \ , \\ > 0 & \text{se } F = 0 \ \text{ e } \ \dot{F} = 0 \ . \end{cases} \tag{15.11}$$

A expressão acima pode ser resumida da seguinte forma

$$F \leq 0 \ , \quad \dot{\alpha} \geq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\alpha} F = 0 \ . \tag{15.12}$$

Em Programação Matemática condições do tipo (15.12) são chamadas de *condições de complementaridade de Kuhn-Tucker*. Na Teoria da Plasticidade elas são conhecidas como *condições de carregamento plástico* $(\dot{\alpha} > 0)$ *e descarregamento elástico* $(\dot{\alpha} = 0)$.

1.1.1 Equações Constitutivas Elastoplásticas

As equações constitutivas do modelo elástico perfeitamente plástico são

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p, \\
&\sigma = E\varepsilon^e, \\
&\mathbb{E} = \{\sigma \mid F(\sigma) \leq 0\}, \\
&\dot{\varepsilon}^p = \dot{\alpha} n, \\
&n = \nabla F \qquad \text{e} \\
&F \leq 0\,, \quad \dot{\alpha} \geq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\alpha} F = 0\,.
\end{aligned}
\tag{15.13}
$$

Definição 15.8: Equação de consistência plástica

De (15.12), ou seja, de $\dot{\alpha} F = 0$, conclui-se que

$$
\dot{\alpha}\dot{F} = 0\,. \tag{15.14}
$$

(15.14) é conhecida como *equação de consistência de Prager* ou de *persistência plástica* pois afirma que, enquanto o material estiver escoando, isto é, enquanto $\dot{\alpha} > 0$, o material permanece num estado plástico com $F = 0$ e, portanto, $\dot{F} = 0$.

Observação 15.2

Note-se que

$$
\dot{F} = \nabla F \dot{\sigma} = n\dot{\sigma} = nE\dot{\varepsilon}^e = nE(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = nE(\dot{\varepsilon} - \dot{\alpha} n) = 0\,. \tag{15.15}
$$

Resolvendo-se (15.15) para $\dot{\alpha}$, tem-se

$$
\dot{\alpha} = \frac{1}{nEn} nE\dot{\varepsilon}\,. \tag{15.16}
$$

Logo, a equação de persistência plástica fornece para $\dot{\alpha} > 0$

$$
\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}^e = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\alpha} n) = E\left(\dot{\varepsilon} - \frac{1}{nEn} nEn\dot{\varepsilon}\right) = 0\,. \tag{15.17}
$$

Este resultado era esperado, uma vez que, nos patamares de escoamento, a tensão permanece constante.

Definição 15.9: Dissipação plástica

Define-se *dissipação plástica* como a função $D^p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$
D^p(\tau, \dot{\varepsilon}^p) = \tau\dot{\varepsilon}^p\,. \tag{15.18}
$$

1.1.2 Princípio da Máxima Dissipação Plástica

O *Princípio da Máxima Dissipação Plástica* de von Mises afirma que para um dado $\dot{\varepsilon}^p \in \mathbb{R}$ a tensão $\sigma \in \mathbb{E}$ correspondente que atua no material é solução do seguinte problema de maximização

$$
D^p(\sigma, \dot{\varepsilon}^p) = \max_{\tau \in \mathbb{E}} D^p(\tau, \dot{\varepsilon}^p)\,. \tag{15.19}
$$

(15.19) diz que, dado $\dot{\varepsilon}^p \in \mathbb{R}$, o estado plasticamente admissível de tensões σ correspondente maximiza a dissipação plástica (15.18).

Propriedade 15.1

O Princípio da Máxima Dissipação Plástica é condição necessária e suficiente para:

a) Normalidade, ou seja

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\alpha}\nabla F \; ;$$

b) Condições de carregamento e descarregamento na forma de condições de Kuhn-Tucker, ou seja

$$F \leq 0 \, , \quad \dot{\alpha} \geq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\alpha}F = 0 \; ;$$

c) Convexidade do domínio elástico $\mathbb{E}$, ou seja,

$$F((1-\theta)\sigma_a + \theta\sigma_b) \leq (1-\theta)F(\sigma_a) + \theta F(\sigma_b) \, , \quad \forall\theta \in [0,1], \forall\sigma_a,\sigma_b \in \mathbb{E} \, . \tag{15.20}$$

A demonstração desta proposição será feita no caso geral mais adiante.

1.2 Modelo multiaxial elástico perfeitamente plástico

Para se generalizar a formulação acima para estados multiaxiais de tensão e deformação é conveniente a introdução de vetores generalizados de tensão e deformação, aqui denotados por $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$, respectivamente. Estes vetores são definidos de modo que a potência específica dos esforços internos seja dada por $\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

Exemplos 15.1

- No caso de sólidos no espaço tridimensional eles podem ser definidos por $(n = 6)$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sqrt{2}\tau_{xy} \\ \sqrt{2}\tau_{yz} \\ \sqrt{2}\tau_{xz} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\gamma_{xz} \end{bmatrix} . \tag{15.21}$$

- No caso da Teoria de Timoshenko para barras no espaço, podem-se definir $(n = 6)$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ N \\ M_x \\ M_y \\ T \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_z \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} . \tag{15.22}$$

- No caso de sólidos em estado plano de tensão ou deformação, podem-se definir $(n = 3)$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sqrt{2}\tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\gamma_{xy} \end{bmatrix} . \tag{15.23}$$

- No caso da Teoria de Bernoulli-Euler para barras no espaço, podem-se definir $(n = 4)$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \\ T \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \eta_z \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}. \tag{15.24}$$

- No caso da Teoria de Placas de Reissner-Mindlin, podem-se definir $(n = 5)$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \tag{15.25}$$

- No caso da Teoria de Placas de Lagrange-Kirchhoff, podem-se definir $(n = 3)$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \tag{15.26}$$

Definição 15.10: Função de plastificação

Chama-se *função de plastificação* a função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que

$$F(\boldsymbol{\sigma}) \quad \begin{cases} \leq 0 & \text{para estados de tensão admissiveis e} \\ > 0 & \text{para estados de tensão inadmissiveis.} \end{cases} \tag{15.27}$$

Definição 15.11: Domínio elástico

À região

$$\mathbb{E} = \{\boldsymbol{\sigma} \mid F(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0\} \tag{15.28}$$

dá-se o nome de *domínio elástico* do material e à superfície em $\mathbb{R}^n$ dada por $F = 0$ dá-se o nome de *superfície de plastificação*. Estados plasticamente admissíveis de tensão correspondem a pontos do domínio elástico.

Observação 15.3

Qualquer critério de resistência convexo pode ser utilizado como função de plastificação.

Exemplo 15.2

Para metais, por exemplo, a função de plastificação de von Mises abaixo é muito utilizada

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{J_2} - k\,. \tag{15.29}$$

Definição 15.12: Estados elásticos e elastoplásticos de tensão

Estados plasticamente admissíveis de tensão podem ser classificados de acordo com

a) $F(\boldsymbol{\sigma}) < 0$: estados elásticos de tensão;

b) $F(\boldsymbol{\sigma}) = 0$: estados elastoplásticos de tensão.

Definição 15.13: Decomposição da deformação

Suponha-se que a elasticidade do material seja descrita pela equação constitutiva $\hat{\sigma} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Define-se componente elástica da deformação, ou simplesmente *deformação elástica*, associada ao estado de tensões caracterizado pela tensão $\boldsymbol{\sigma}$ ao vetor ε^e tal que

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\varepsilon^e) . \tag{15.30}$$

No caso de elasticidade linear, tem-se

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\varepsilon^e , \tag{15.31}$$

onde $\boldsymbol{D}$ é a matriz dos módulos elásticos de rigidez. Define-se componente plástica da deformação, ou simplesmente *deformação plástica*, associada ao estado de tensões caracterizado pela tensão $\boldsymbol{\sigma}$, ao vetor ε^p tal que

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p . \tag{15.32}$$

Observação 15.4

Para estados elásticos de tensão o comportamento do material é regido por (15.31). Enquanto o material permanecer neste estado as deformações plásticas não variam, ou seja, $\dot{\varepsilon}^p = 0$. Para estados plásticos de tensão o material pode ter dois tipos de comportamento. Ou ele apresenta comportamento elástico regido por (15.31) e neste caso $\dot{F} < 0$, ou ele apresenta comportamento plástico com $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$ e neste caso $\dot{F} = 0$.

Definição 15.14: Lei de escoamento

Definindo-se o vetor $\boldsymbol{m}$, pode-se, então, escrever que

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\alpha}\boldsymbol{m} , \quad \text{onde} \quad \dot{\alpha} \geq 0 . \tag{15.33}$$

(15.33) é conhecida como *lei de escoamento*.

Definição 15.15: Lei da normalidade

O vetor normal à superfície de plastificação é dado por

$$\boldsymbol{n} = \nabla F . \tag{15.34}$$

Quando

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n} \tag{15.35}$$

obedece-se à *lei da normalidade*.

Definição 15.16: Condições de carregamento e descarregamento plástico

Logo a variação da deformação plástica pode ser dada por (15.33) com

$$\dot{\alpha} \begin{cases} = 0 & \text{se } F < 0 \text{ ou se } F = 0 \text{ e } \dot{F} < 0 , \\ > 0 & \text{se } F = 0 \text{ e } \dot{F} = 0 . \end{cases} \tag{15.36}$$

A expressão acima pode ser resumida da seguinte forma

$$F \leq 0 , \quad \dot{\alpha} \geq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\alpha}F = 0 . \tag{15.37}$$

Em Programação Matemática condições do tipo (15.37) são chamadas de *condições de Kuhn-Tucker*. Na Teoria da Plasticidade elas são conhecidas como *condições de carregamento plástico e descarregamento elástico*.

1.2.1 Equações constitutivas elásticas perfeitamente plásticas

Pode-se reunir as equações constitutivas do modelo plástico perfeito como se segue

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p, \\
&\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}^e, \\
&\mathbb{E} = \{\boldsymbol{\sigma} \mid F(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0\}, \\
&\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\alpha}\boldsymbol{n}, \\
&\boldsymbol{n} = \nabla F \qquad \text{e} \\
&F \leq 0\,, \quad \dot{\alpha} \geq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\alpha}F = 0\,.
\end{aligned} \tag{15.38}$$

Definição 15.17: Equação de consistência plástica

Da última equação de (15.38), conclui-se que

$$\dot{\alpha}\dot{F} = 0\,. \tag{15.39}$$

(15.39) é conhecida como *equação de consistência de Prager* ou de *persistência plástica* pois afirma que, enquanto o material estiver escoando, isto é, enquanto $\dot{\alpha} > 0$, o material permanece num estado plástico com $F = 0$ e, portanto, $\dot{F} = 0$.

Observação 15.5

Note-se que

$$\dot{F} = \nabla F \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\alpha}\boldsymbol{m}) = 0\,. \tag{15.40}$$

Resolvendo-se (15.40) para $\dot{\alpha}$, tem-se

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D}\boldsymbol{m}} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\,. \tag{15.41}$$

Logo, a equação de persistência plástica fornece para $\dot{\alpha} > 0$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \boldsymbol{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \boldsymbol{D}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\alpha}\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{D}\left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D}\boldsymbol{m}}\boldsymbol{m}\right). \tag{15.42}$$

Definição 15.18: Matriz dos módulos elastoplásticos de rigidez tangente

Pode-se escrever (15.42) da seguinte forma

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}^{ep}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\,, \tag{15.43}$$

onde

$$\boldsymbol{D}^{ep} = \boldsymbol{D} - \frac{1}{\boldsymbol{n}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{m}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{m}\boldsymbol{n}^T\boldsymbol{D} \tag{15.44}$$

é a *matriz dos módulos elastoplásticos de rigidez tangente*. Quando a lei da normalidade é adotada, $\boldsymbol{D}^{ep}$ é simétrica e dada por

$$\boldsymbol{D}^{ep} = \boldsymbol{D} - \frac{1}{\boldsymbol{n}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{n}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^T\boldsymbol{D}\,. \tag{15.45}$$

Observação 15.6

Note-se que no escoamento a tensão $\boldsymbol{\sigma}$ não permanece necessariamente constante. Somente F permanece constante.

Exemplo 15.3: Equações de Prandtl-Reuss

Para um material elástico linear isótropo e um sólido tridimensional

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\varepsilon^e \ , \tag{15.46}$$

onde

$$\boldsymbol{D} = K\boldsymbol{I} + 2G\boldsymbol{M} \ , \tag{15.47}$$

é a matriz dos módulos elásticos de rigidez, sendo $\boldsymbol{I}$ a matriz identidade, sendo $\boldsymbol{M}$ a matriz definida por

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^T \ , \quad \text{onde} \quad \boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \tag{15.48}$$

e com

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad \text{e} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{15.49}$$

sendo o módulo de compressibilidade e o módulo de cisalhamento, respectivamente. É interessante notar que $\boldsymbol{M}$ tem a seguinte propriedade

$$\boldsymbol{M}^n = \boldsymbol{M} \ . \tag{15.50}$$

A tensão normal média é dada por

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\sigma} \tag{15.51}$$

e o vetor das tensões antiesféricas por

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\sigma} \ . \tag{15.52}$$

$\boldsymbol{s}$ tem as seguintes propriedades

$$\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{s} = 0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{M}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s} \ . \tag{15.53}$$

É também fácil verificar que

$$J_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s} \ . \tag{15.54}$$

A normal à superfície de plastificação de von Mises é dada por

$$\boldsymbol{n} = \nabla F = \frac{1}{2\sqrt{J_2}}\boldsymbol{s} \ . \tag{15.55}$$

Note-se também que

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{n} = \frac{G}{\sqrt{J_2}}\boldsymbol{s} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{n}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{n} = G \ . \tag{15.56}$$

Logo a matriz dos módulos elastoplásticos de rigidez tangente é dada por

$$\boldsymbol{D}^{ep} = \boldsymbol{D} - \frac{G}{J_2}\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^T \ . \tag{15.57}$$

A equação

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}^{ep}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \ , \quad \text{onde} \quad \boldsymbol{D}^{ep} = \boldsymbol{D} - \frac{G}{k^2}\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^T \ , \tag{15.58}$$

é conhecida como *equação de Prandtl-Reuss*.

Definição 15.19: Dissipação plástica

Define-se *dissipação plástica* como a função $D^p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$D^p(\boldsymbol{\tau}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \ . \tag{15.59}$$

1.2.2 Princípio da Máxima Dissipação Plástica de Von Mises

O *Princípio da Máxima Dissipação Plástica de von Mises* afirma que para um dado $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \in \mathbb{R}^n$ a tensão $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{E}$ correspondente que atua no material é solução do seguinte problema de maximização

$$D^p(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \max_{\tau \in \mathbb{E}} D^p(\boldsymbol{\tau}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \ . \tag{15.60}$$

(15.60) diz que, dado $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \in \mathbb{R}^n$, o estado de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ correspondente maximiza a dissipação plástica (15.59).

Teorema da Máxima Dissipação Plástica

O Princípio da Máxima Dissipação Plástica é condição necessária e suficiente para:

a) Normalidade, ou seja

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\alpha}\nabla F(\boldsymbol{\sigma}) \ ; \tag{15.61}$$

b) Condições de carregamento e descarregamento na forma de condições de Kuhn-Tucker, ou seja

$$F \leq 0 \ , \quad \dot{\alpha} \geq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\alpha}F = 0 \ ;$$

c) Convexidade do domínio elástico $\mathbb{E}$, ou seja,

$$F((1-\theta)\boldsymbol{\sigma}_a + \theta\boldsymbol{\sigma}_b) \leq (1-\theta)F(\boldsymbol{\sigma}_a) + \theta F(\boldsymbol{\sigma}_b), \ \forall\theta \in [0,1], \ \forall\boldsymbol{\sigma}_a, \boldsymbol{\sigma}_b \in \mathbb{E} \ . \tag{15.62}$$

Para se demonstrar que (15.61) e (15.62) implicam em (15.60), considere-se que de (15.62) decorre

$$F(\boldsymbol{\sigma} + \theta(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})) \leq F(\boldsymbol{\sigma}) + \theta(F(\boldsymbol{\tau}) - F(\boldsymbol{\sigma})) \ , \quad \forall\theta \in [0,1] \ , \tag{15.63}$$

ou seja

$$\frac{F(\boldsymbol{\sigma} + \theta(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma})) - F(\boldsymbol{\sigma})}{\theta} \leq F(\boldsymbol{\tau}) - F(\boldsymbol{\sigma}), \quad \forall\theta \in [0,1] \ . \tag{15.64}$$

Levando ao limite $\theta \to 0$ a expressão da esquerda, e utilizando a definição de derivada direcional do Capítulo 3, tem-se

$$\nabla F(\boldsymbol{\sigma}) \cdot (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}) \leq F(\boldsymbol{\tau}) - F(\boldsymbol{\sigma}) \ . \tag{15.65}$$

Para $\boldsymbol{\sigma}$ sobre a superfície de plastificação, ou seja, para $\boldsymbol{\sigma}$ tal que $F(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ e para $\boldsymbol{\tau}$ tal que $F(\boldsymbol{\tau}) \leq 0$, tem-se de (15.65) que

$$\nabla F(\boldsymbol{\sigma}) \cdot (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \,, \tag{15.66}$$

que juntamente com a lei da normalidade implica em (15.60). A demonstração que (15.60) implica em (15.61) e (15.62) é um pouco mais complicada, é feita por redução ao absurdo e não será abordada aqui.

2 O Problema Estático da Teoria da Plasticidade

2.1 O Problema Quase-estático

Supondo-se que as forças volúmicas $\boldsymbol{b}$ e as condições de contorno $\overline{\boldsymbol{t}}$ e $\overline{\boldsymbol{u}}$ sejam variáveis no tempo pode-se formular, para cada instante $t \in (t_0, t_f)$, um problema quase-estático cujas equações são

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E} = \mathrm{Sym}(\nabla \boldsymbol{u}) \quad \text{em } V \,, \\
&\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \quad \text{em } V \,, \\
&\mathrm{div}\,\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V \,, \\
&\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T \quad \text{em } V \,, \\
&\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u \quad \text{e} \\
&\boldsymbol{t} = \overline{\boldsymbol{t}} \quad \text{em } S_t \,.
\end{aligned} \tag{15.67}$$

Observação 15.7

Em (15.67) falta a equação constitutiva elastoplástica, que não é possível ser explicitada na forma da elasticidade, mas apenas na seguinte forma tangente

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{cases} \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \,, & \text{se } F < 0 \text{ ou se } F = 0 \text{ e } \dot{F} < 0 \\ \boldsymbol{D}^{ep}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \,, & \text{se } F = 0 \text{ e } \dot{F} = 0 \end{cases} \,. \tag{15.68}$$

2.2 O Problema Tangente da Teoria da Plasticidade

Associado ao problema quase-estático (15.67) está o seguinte problema tangente

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{E}} = \mathrm{Sym}(\nabla \dot{\boldsymbol{u}}), \quad \text{em } V \,, \\
&\dot{\boldsymbol{t}} = \dot{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{n}, \quad \text{em } V \,, \\
&\mathrm{div}\,\dot{\boldsymbol{T}} + \dot{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{o}, \quad \text{em } V \,, \\
&\dot{\boldsymbol{T}} = \dot{\boldsymbol{T}}^T, \quad \text{em } V \,, \\
&\dot{\boldsymbol{u}} = \dot{\overline{\boldsymbol{u}}}, \quad \text{em } S_u \,, \\
&\dot{\boldsymbol{t}} = \dot{\overline{\boldsymbol{t}}}, \quad \text{em } S_t \,.
\end{aligned} \tag{15.69}$$

(15.68) e (15.69) constituem-se no *problema tangente da Teoria da Plasticidade*.

Observação 15.8

O problema tangente não é linear por causa de (15.68).

Observação 15.9: Teoremas de trabalhos virtuais

a) Uma condição necessária e suficiente para que as equações de equilíbrio de (15.67) sejam satisfeitas é dada pelo teorema dos trabalhos virtuais, ou seja,

$$\int_V \boldsymbol{b} \cdot \delta \boldsymbol{u} dV + \int_{S_t} \overline{\boldsymbol{t}} \cdot \delta \boldsymbol{u} dS = \int_V \boldsymbol{T} \cdot \delta \boldsymbol{E} dV \ , \quad \forall \delta \boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1^{E=0}(V) \ . \tag{15.70}$$

b) Utilizando-se a notação vetorial para as tensões e deformações, tem-se no lugar de (15.70)

$$\int_V \boldsymbol{b} \cdot \delta \boldsymbol{u} dV + \int_{S_t} \overline{\boldsymbol{t}} \cdot \delta \boldsymbol{u} dS = \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV \ , \quad \forall \delta \boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1^{E=0}(V) \ . \tag{15.71}$$

c) De forma análoga, uma condição necessária e suficiente para que as equações de equilíbrio tangente de (15.69) sejam satisfeitas é dada por

$$\int_V \dot{\boldsymbol{b}} \cdot \delta \boldsymbol{u} dV + \int_{S_t} \dot{\overline{\boldsymbol{t}}} \cdot \delta \boldsymbol{u} dS = \int_V \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV \ , \quad \forall \delta \boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1^{E=0}(V) \ . \tag{15.72}$$

(15.72) é a formulação variacional do problema tangente.

3 Análise Limite para Carregamentos Proporcionais

A Análise Limite é uma das principais aplicações práticas da Teoria da Plasticidade. Apresenta-se nesta seção uma introdução à análise limite de sólidos e estruturas sob carregamentos proporcionais. O objetivo da *Análise Limite para Carregamentos Proporcionais* é determinar diretamente o carregamento de colapso plástico de um sólido ou estrutura.

Definição 15.20: Notação

Por simplicidade, adota-se a seguinte notação

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}, \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle &= \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad \text{e} \\ \langle \boldsymbol{p}, \delta \boldsymbol{u} \rangle &= \int_V \boldsymbol{b} \cdot \delta \boldsymbol{u} dV + \int_{S_t} \overline{\boldsymbol{t}} \cdot \delta \boldsymbol{u} dS \ , \end{aligned} \tag{15.73}$$

onde $\boldsymbol{p}$ representa o conjunto dos esforços externos $\boldsymbol{b}$ e $\overline{\boldsymbol{t}}$. Com esta notação, tem-se no lugar de (15.71) e (15.72)

$$\langle \boldsymbol{p}, \delta \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}, \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \ , \quad \forall \delta \boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1^{E=0}(V) \ , \tag{15.74}$$

e

$$\langle \dot{\boldsymbol{p}}, \delta \boldsymbol{u} \rangle = \langle \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \ , \quad \forall \delta \boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1^{E=0}(V) \ , \tag{15.75}$$

respectivamente.

Definição 15.21: Carregamento proporcional

Chama-se *carregamento proporcional* ao carregamento superficial e volúmico aplicado ao longo do tempo de modo que

$$\boldsymbol{p}(t) = \gamma(t) \boldsymbol{p}_0 \ , \tag{15.76}$$

onde $\gamma : (t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma função monotônica tal que $\gamma(t_0) = 0$ e $\dot{\gamma}(t) \geq 0$. t_0 é o instante inicial de carregamento.

3.1 Colapso plástico sob carregamento proporcional

Definição 15.22

Um sólido, ou estrutura, feito de material elastoplástico sofre um *colapso plástico sob carregamento proporcional* se durante o processo de carregamento não for mais possível elevar o fator de carregamento γ.

Propriedade 15.2: Condição de colapso plástico

Introduzindo-se o carregamento proporcional em (15.75), tem-se

$$\dot{\gamma}\langle \boldsymbol{p}_0, \delta\boldsymbol{u}\rangle = \langle \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \delta\boldsymbol{\varepsilon}\rangle\,, \quad \forall \delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1^{E=0}(V)\,, \tag{15.77}$$

Logo,

$$\langle \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \delta\boldsymbol{\varepsilon}\rangle = 0\,, \quad \forall \delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1^{E=0}(V)\,, \tag{15.78}$$

é a *condição de colapso plástico sob carregamento proporcional*.

Propriedade 15.3: Inexistência de taxas de deformações elásticas no colapso plástico

Supondo-se válido o princípio da máxima dissipação plástica de von Mises e adotando-se material elástico perfeitamente plástico, um resultado importante é que, no colapso plástico sob carregamento proporcional, só existem taxas de deformações plásticas no sólido, isto é, no colapso plástico

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V\,. \tag{15.79}$$

Para se verificar isto, considere-se (15.78) com $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ igual à taxa de deformação real no momento do colapso. Assim

$$\langle \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle = 0\,. \tag{15.80}$$

Como $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ e $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$, tem-se

$$\langle \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle = \langle \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e\rangle + \langle \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\rangle\,. \tag{15.81}$$

Mas

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\alpha}\boldsymbol{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\alpha}\dot{F} = 0\,. \tag{15.82}$$

Logo

$$\langle \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle = \langle \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e\rangle\,. \tag{15.83}$$

Como $\boldsymbol{D}$ é positiva definida conclui-se de (15.80) e (15.83) que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \boldsymbol{o}$ em V no colapso plástico. Isto significa que, no momento do colapso plástico, as deformações elásticas não precisam ser consideradas.

3.2 Teorema Estático

Seja $\boldsymbol{\sigma}_e$ um campo de tensões em equilíbrio com o carregamento externo $\gamma_e\boldsymbol{p}_0$, isto é, seja um campo de tensões tal que

$$\gamma_e\langle \boldsymbol{p}_0, \delta\boldsymbol{u}\rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}_e, \delta\boldsymbol{\varepsilon}\rangle\,, \quad \forall \delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{W}_1^{E=0}(V)\,. \tag{15.84}$$

Diz-se que o campo $\boldsymbol{\sigma}_e$ é *estaticamente admissível*. Suponha-se, além disso, que este campo seja plasticamente admissível, isto é

$$F(\boldsymbol{\sigma}_e) \leq 0 \quad \text{em } V\,. \tag{15.85}$$

Seja $\boldsymbol{\sigma}_u$ o campo de tensões em equilíbrio com o carregamento externo correspondente ao colapso plástico dado por $\gamma_u \boldsymbol{p}_0$, isto é, o campo de tensões tal que

$$\gamma_u \langle \boldsymbol{p}_0, \delta \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}_u, \delta \varepsilon \rangle , \quad \forall \delta \boldsymbol{u} \in \mathcal{V}_1^{E=0}(V) . \tag{15.86}$$

Fazendo-se em (15.84) e (15.86) $\delta \varepsilon = \dot{\varepsilon}_u$ e $\delta \boldsymbol{u} = \dot{\boldsymbol{u}}_u$, onde $\dot{\varepsilon}_u$ e $\dot{\boldsymbol{u}}_u$ são os campos de taxa de deformação plástica e de velocidades reais no colapso plástico, de (15.84), (15.86) e (15.60) vem

$$\gamma_e \langle \boldsymbol{p}_0, \dot{\boldsymbol{u}}_u \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}_e, \dot{\varepsilon}_u \rangle \leq \langle \boldsymbol{\sigma}_u, \dot{\varepsilon}_u \rangle = \gamma_u \langle \boldsymbol{p}_0, \dot{\boldsymbol{u}}_u \rangle . \tag{15.87}$$

Logo

$$\gamma_e \leq \gamma_u . \tag{15.88}$$

Observação 15.10

Este teorema é conhecido também pelo nome de *Teorema do Limite Inferior*.

Observação 15.11: Corolários

O teorema estático tem diversos corolários de grande importância prática. Lista-se abaixo alguns.

- Se uma estrutura for dimensionada supondo-se material elástico linear para um fator de carregamento γ_e, então $\gamma_u \geq \gamma_e$, ou seja, ela foi dimensionada a favor da segurança.
- Se material sem peso for adicionado a uma estrutura, o fator de carregamento de colapso plástico não é diminuído.
- De todos os campos de tensão estática e plasticamente admissível possíveis, o que realmente ocorre no colapso plástico maximiza γ_e.

Observação 15.12

Qualquer campo de tensão estática e plasticamente admissível serve para dimensionar uma estrutura a favor da segurança. Este fato justifica diversas técnicas de detalhamento de estruturas como dividir forças igualmente entre parafusos em ligações de estruturas metálicas ou utilizar o cálculo elástico para dimensionar estruturas de concreto no estado limite último de colapso plástico.

Exemplo 15.4: Sapata contínua sobre solo puramente coesivo

Considere-se a sapata contínua da Figura 15.3 com largura b, sujeita a um carregamento vertical linear P_0 e apoiada sobre um solo puramente coesivo que pode ser modelado pelo critério de Tresca com coesão c.

Figura 15.3: Sapata contínua

Na mesma figura construiu-se um campo de tensões plástica e estaticamente admissível $\boldsymbol{\sigma}_e$, formado por duas regiões: (1) uma coluna vertical exatamente sob a sapata e (2) a região restante do espaço semi-infinito. O campo é estaticamente admissível na ausência de forças volúmicas porque um campo homogêneo satisfaz a equação local do equilíbrio nestas condições. Note-se também que o campo satisfaz o equilíbrio na interface com a atmosfera, assim como na interface interna entre as duas regiões. O campo de tensões mostrado na mesma figura também satisfaz o critério de plastificação de Tresca porque em todas as regiões tem-se $\sigma_1 - \sigma_3 \leq 2c$. Do equilíbrio na interface com a sapata tem-se

$$\gamma_e \frac{P_0}{b} = 4c \,, \tag{15.89}$$

donde

$$\gamma_e = 4\frac{bc}{P_0} \leq \gamma_u \,. \tag{15.90}$$

O valor exato de γ_u, obtido por Prandtl na década de 30 e, posteriormente, por Hill na década de 40, é

$$\gamma_u = (2+\pi)\frac{bc}{P_0} \approx 5{,}14\frac{bc}{P_0} \,. \tag{1.91}$$

Observação 15.13

O teorema estático tem motivado a criação de diversos métodos simplificados de dimensionamento de estruturas como o *método das escoras e dos tirantes* e o *método das faixas para lajes*, ambos formulados para estruturas de concreto.

Exemplo 15.5: Consolo curto de concreto armado

Para se exemplificar o método das escoras e dos tirantes, considere-se o consolo curto de concreto armado de altura h, comprimento a e profundidade c, sujeito ao carregamento vertical P_0, cuja excentricidade é e, conforme a Figura 15.4.

Figura 15.4: Consolo curto de concreto armado

O campo de tensões estaticamente admissível é formado por um tirante horizontal de aço na parte superior do consolo e por uma biela (escora inclinada) comprimida de concreto. Para o capo de tensões estar em equilíbrio, basta que a treliça simples indicada na mesma figura seja resolvida. As forças no aço e no concreto são dadas respectivamente por

$$R_s = \gamma_e \frac{P_0 e}{d} \quad \text{e} \quad R_c = \gamma_e \frac{P_0 \sqrt{e^2 + d^2}}{d} , \tag{1.92}$$

onde $d < h$ é a altura útil da biela, como indicada na Figura 15.4. Para que o campo de tensões seja plasticamente admissível é necessário que a área da seção transversal do tirante de aço e da biela de concreto obedeçam a

$$A_s \geq \frac{R_s}{f_s} \quad \text{e} \quad A_c \geq \frac{R_c}{f_c} , \tag{1.93}$$

respectivamente, onde f_s é a resistência à tração do aço do tirante e f_c é a resistência à compressão do concreto da biela. Se b for a largura da biela, tem-se de respeitar

$$b \geq \frac{A_c}{c} . \tag{1.94}$$

Por outro lado, se já se conhecem todas as dimensões e as resistências dos materiais do consolo, então

$$\gamma_e = \min \left\{ \frac{f_s A_s d}{P_0 e}, \frac{f_c b c d}{P_0 \sqrt{e^2 + d^2}} \right\} \leq \gamma_u . \tag{1.95}$$

Exemplo 15.6: Laje retangular

A equação do equilíbrio local de uma placa na Teoria de Lagrange-Kirchhoff é dada por

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = p , \tag{1.96}$$

onde p é o carregamento distribuído vertical, M_x é o momento fletor por unidade de comprimento em seções transversais ortogonais ao eixo x, M_y é o momento fletor por unidade de comprimento em seções transversais ortogonais ao eixo y e M_{xy} é o momento torçor por unidade de comprimento em seções transversais ortogonais aos eixos x e y. Fazendo-se, por hipótese,

$$M_{xy} = 0 , \tag{1.97}$$

conclui-se que os campos M_x e M_y que satisfazem as seguintes equações diferenciais

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = p_x \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = p_y , \tag{1.98}$$

com

$$p_x + p_y = p , \tag{1.99}$$

são estaticamente admissíveis, pois respeitam (1.96). As equações (1.98) são as equações de equilíbrio de vigas ao logo dos eixos x e y, respectivamente.

O método das faixas para lajes consiste em substituir a laje por faixas que representam vigas nas direções x e y, com carregamentos p_x e p_y, cuja soma resulta no carregamento transversal total. Para exemplificá-lo, considere-se a laje retangular da Figura 15.5, cujo comprimento na direção x é a e na direção y é b, e que está submetida ao carregamento uniformemente distribuído p_0.

Figura 15.5: Laje retangular

A laje da Figura 15.5 pode ser dimensionada por meio de duas vigas ao longo de x e y, com os carregamentos $p_x = (1-\alpha)\gamma_e p_0$ e $p_y = \alpha\gamma_e p_0$, respectivamente, conforme indicado na mesma figura. Logo, os momentos máximos destas duas vigas são

$$M_{xm} = (1-\alpha)\gamma_e p_0 \frac{a^2}{8} \quad \text{e} \quad M_{ym} = \alpha\gamma_e p_0 \frac{b^2}{8} . \tag{1.100}$$

Para que estes momentos sejam plasticamente admissíveis, eles têm de satisfazer os seguintes limites

$$M_{xm} \leq m_x \quad \text{e} \quad M_{ym} \leq m_y , \tag{1.101}$$

onde m_x e m_y são os momentos máximos que as seções transversais podem resistir. Note-se que o projetista tem a liberdade de fixar o valor de α, com $0 \leq \alpha \leq 1$, de modo a conseguir um resultado mais econômico. Caso ele adote $\alpha = 0$ a laje será armada somente na direção x e caso ele adote $\alpha = 1$ a laje será armada somente na direção y. Caso ele adote $\alpha = \dfrac{a^2}{a^2 + b^2}$, a laje será dimensionada para momentos iguais em ambas as direções. Por outro lado, se a laje já tiver a armadura dimensionada, então

$$\gamma_e = \frac{8}{p_0} \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \left\{ \frac{a^2}{(1-\alpha)m_x}, \frac{b^2}{\alpha m_y} \right\} \leq \gamma_u . \tag{1.102}$$

Em (1.102) deve-se procurar o valor de α que leva ao maior valor de γ_e, para que se tenha o maior, e melhor, limite inferior de γ_u.

Figura 15.6: Método das faixas para uma laje quadrada

As lajes podem ser subdivididas em faixas com o objetivo de se conseguir uma maior economia, como mostrado na Figura 15.6 para uma laje quadrada de lado a .

Observação 15.14: A questão da ductilidade

Cabe, no entanto, uma observação fundamental. O teorema estático é válido dentro das hipóteses adotadas que, além da validade do Princípio da Máxima Dissipação Plástica, são a Linearidade Geométrica e a ductilidade infinita, ou seja, que as deformações, rotações, deslocamentos são pequenas e que não haja limite para as deformações plásticas. Se qualquer destas hipóteses não se verificar, a aplicação do teorema fica limitada. No caso de estruturas de concreto, a ductilidade tem que ser garantida por um detalhamento adequado da armadura. No caso de estruturas metálicas ela é garantida por uma escolha adequada de material.

Observação 15.15

Não tem sentido, pois, utilizar a Análise Limite juntamente com a Análise de Estabilidade, a qual exige sempre a Não-linearidade Geométrica. O colapso plástico pode representar a perda de estabilidade do sólido ou estrutura, mas pode também representar apenas um crescimento intenso, nem sempre abrupto, das deformações sem perda da estabilidade. Em lajes de concreto, por exemplo, após o colapso plástico a laje passa a apresentar deslocamentos transversais maiores e, se as condições de apoio permitirem, ela entra em regime de membrana e pode ainda suportar grandes aumentos do carregamento sem perda da estabilidade.

3.3 Teorema Cinemático

Seja $\boldsymbol{\sigma}_c$ um campo de tensões que, em conjunto com o carregamento externo $\gamma_c \boldsymbol{p}_0$, satisfaça a seguinte condição

$$\gamma_c \langle \boldsymbol{p}_0, \dot{\boldsymbol{u}}_c \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}_c, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c \rangle , \tag{15.103}$$

onde $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ e $\dot{\boldsymbol{u}}_c$ são campos de taxa de deformação plástica e de velocidades compatíveis entre si, isto é, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ é derivado a partir do campo $\dot{\boldsymbol{u}}_c$. Diz-se, então, que estes campos são *cinematicamente admissíveis*. Estes campos definem o *modo de colapso plástico*. Suponha-se, além disso, que o campo $\boldsymbol{\sigma}_c$ satisfaça (15.60), ou seja

$$D^p\,(\boldsymbol{\sigma}_c,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c\,) = \max_{\tau\in\mathbb{E}} D^p\,(\boldsymbol{\tau},\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c\,)\,. \tag{15.104}$$

Diz-se então que os campos $\boldsymbol{\sigma}_c$ e $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ são *plasticamente admissíveis.*

Seja $\boldsymbol{\sigma}_u$ o campo de tensões em equilíbrio com o carregamento externo correspondente ao colapso plástico dado por $\gamma_u \boldsymbol{p}_0$, isto é, o campo de tensões tal que

$$\gamma_u\,\langle\,\boldsymbol{p}_0,\delta\boldsymbol{u}\,\rangle = \langle\,\boldsymbol{\sigma}_u,\delta\boldsymbol{\varepsilon}\,\rangle\,, \quad \forall\delta\boldsymbol{u}\in\mathcal{V}_1^{E=0}\,(\,V\,)\,. \tag{15.105}$$

Fazendo-se em (15.105) $\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$ e $\delta\boldsymbol{u} = \dot{\boldsymbol{u}}_c$, de (15.105), (15.103) e (15.104) vem

$$\gamma_u\,\langle\,\boldsymbol{p}_0,\dot{\boldsymbol{u}}_c\,\rangle = \langle\,\boldsymbol{\sigma}_u,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c\,\rangle \le \langle\,\boldsymbol{\sigma}_c,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c\,\rangle = \gamma_c\,\langle\,\boldsymbol{p}_0,\dot{\boldsymbol{u}}_c\,\rangle\,. \tag{15.106}$$

Logo

$$\gamma_u \le \gamma_c\,. \tag{15.107}$$

Observação 15.16

(15.103) não supõe que o carregamento externo e o campo de tensões estejam em equilíbrio, uma vez que (15.103) não é formulado para todos os campos de taxa de deformação e de velocidades possíveis.

Observação 15.17

Este teorema é conhecido também pelo nome de *Teorema do Limite Superior*.

Observação 15.18

A condição mais difícil de ser respeitada nas aplicações deste teorema é (15.104).

Observação 15.19: Corolários

O teorema acima tem diversos corolários de grande importância prática como os seguintes.

- Se uma estrutura for dimensionada supondo um modo de colapso plástico para um fator de carregamento γ_c de forma consistente com o teorema acima, então necessariamente tem-se $\gamma_u \le \gamma_c$ (dimensionamento contra a segurança!)
- De todos os modos possíveis de colapso, o que realmente ocorre no colapso plástico minimiza γ_c.
- Se, para um suposto modo de colapso, o limite superior calculado for igual ao limite inferior calculado para um campo de tensões estática e plasticamente admissíveis segundo o teorema estático, então tanto o modo de colapso assim como o campo de tensões são os reais do colapso plástico e os limites calculados são iguais ao fator de colapso plástico real.

Observação 15.20

Este teorema tem motivado a criação de diversos métodos simplificados de cálculo de estruturas como o *método das rótulas plásticas* e o *método das charneiras plásticas ou das linhas de ruptura para lajes*. Esta classe de métodos, no entanto, têm caído gradativamente em desuso em favor dos métodos criados com o auxílio do Teorema Estático.

Exemplo 15.7: Sapata corrida sobre solo puramente coesivo

Para exemplificar o teorema cinemático, considere-se a sapata do Exemplo 15.7 e o modo de colapso mostrado na Figura 15.7.

Figura 15.7: Modo de colapso da sapata corrida

Nele, o colapso realiza-se por um movimento de rotação de um semicírculo rígido de raio b em torno do centro de rotação posicionado no pé da sapata. Toda a deformação plástica concentra-se numa faixa de espessura t ao longo do perímetro πb do semicírculo. A dissipação plástica que ocorre através desta pequena faixa é dada por $\tau\dot{\gamma}$, onde $\dot{\gamma}$ é a taxa de cisalhamento no material da faixa. Supondo-se que a velocidade tangencial na faixa varie linearmente entre o valor 0 na parte externa junto ao maciço até o valor ωb junto ao semicírculo, onde ω é a velocidade angular do semicírculo rígido, e admitindo-se que o material obedeça o Critério de Tresca com coesão c, tem-se que a máxima dissipação plástica na faixa, por unidade de volume, é dada por $c\dfrac{\omega b}{t}$. Logo, a dissipação plástica total é dada por $c\dfrac{\omega b}{t}\pi b t = \omega\pi b^2 c$, que é o lado direito de (15.103). O lado esquerdo de (15.103), que é a potência do esforço externo, é dado pelo produto da carga pela velocidade do seu ponto de aplicação, ou seja, por $\gamma_c P_0 \omega \dfrac{b}{2}$. De (15.103) decorre então

$$\gamma_c = 2\pi\frac{bc}{P_0} \approx 6{,}28\frac{bc}{P_0} \geq \gamma_u \ . \tag{1.108}$$

Este é um limite superior para o fator de colapso plástico. (15.90) e (1.108) fornecem o seguinte intervalo para o fator real de colapso

$$4\frac{bc}{P_0} \leq \gamma_u \leq 6{,}28\frac{bc}{P_0} \ . \tag{1.109}$$

Exemplos 15.8: Consolo curto de concreto armado

Considere-se o consolo curto do Exemplo 15.5 e o modo de colapso da Figura 15.8.

Figura 15.8: Modo de colapso do consolo curto

Nele, supõe-se a formação de uma fissura vertical junto a face do pilar e a rotação como corpo rígido do consolo em torno do ponto C com velocidade angular ω. A velocidade no tirante de aço é dada por ωd, onde d é a altura útil do consolo. A máxima dissipação plástica no tirante é dada pelo produto da máxima força $R_s = f_s A_s$ por ωd, ou seja por $f_s A_s \omega d$, enquanto que a potência do esforço externo é dada por $\gamma_c P_0 \omega e$. Logo, de (15.103) vem

$$\gamma_c = \frac{f_s A_s d}{P_0 e} \geq \gamma_u \ . \tag{1.110}$$

De acordo com (1.95), se $f_s A_s \leq \dfrac{f_c b c e}{\sqrt{e^2 + d^2}}$, então

$$\gamma_c = \gamma_e = \gamma_u = \frac{f_s A_s b}{P_0 e} \ . \tag{1.111}$$

Neste caso, o modo de colapso suposto e o campo de tensões suposto são os reais e os limites inferior e superior calculados coincidem com o fator real de colapso plástico.

Observação 15.21

Existem métodos aproximados de cálculo que utilizam conceitos da Teoria da Plasticidade, mas que não utilizam consistentemente as hipóteses dos Teoremas da Análise Limite. Na Mecânica dos Solos, o *Método do Equilíbrio Limite* faz parte desta classe de métodos, cujo membro mais conhecido talvez seja o *método do círculo sueco* para análise da estabilidade de taludes. Nestes métodos a condição (15.104) é freqüentemente desrespeitada, pois a máxima dissipação plástica exige que, para materiais que obedeçam o Critério de Mohr-Coulomb, o modo de colapso se realize por meio de curvas não circulares (para materiais que obedeçam o Critério de Mohr-Coulomb a curva precisa ser uma espiral logarítmica). Fatores de colapso plástico obtidos com estes métodos não representam limites nem inferior, nem tampouco superior, do fator real de colapso plástico.

Observação 15.22

O colapso plástico pode também ocorrer sob carregamentos não-proporcionais. Para carregamentos não-proporcionais existem outros dois tipos de colapso: o *colapso por reversão da plasticidade* e o *colapso plástico incremental*. O primeiro ocorre quando em algum ponto da estrutura ocorre repetidamente plasticidade na tração e na compressão, já o segundo ocorre quando a estrutura acumula indefinidamente deformações plásticas ao longo do carregamento. Existem teoremas específicos de Análise Limite para carregamentos não-proporcionais. Estes teoremas são importantes para estruturas mecânicas sujeitas a carregamentos termomecânicos variáveis com diversas origens.

Exercícios 15.1

a) Deduza a matriz dos módulos elasto-plásticos de rigidez tangente para um material que obedeça o Critério de Drucker-Prager.
b) Encontre um campo de momentos estaticamente e plasticamente admissível para uma laje quadrada de lado a e com um orifício quadrado de lado $a/5$ em um de seus cantos.
c) Encontre um limite inferior e um limite superior para o fator de colapso plástico de um bloco de fundação sob um pilar de concreto armado de altura $h = b/2$, onde b é a distância entre eixos das duas estacas.
d) Refaça o Exemplo 15.7 com o centro de rotação a uma altura h sobre o pé da sapata. Determine o valor de h para o mínimo fator de colapso plástico e comente.

16

Introdução à Teoria da Viscoelasticidade

Este Capítulo restringe-se à Teoria Linear da Viscoelasticidade. A Teoria da Viscoelasticidade é muito importante para se descrever o comportamento das deformações ao longo do tempo em materiais como o concreto, metais, madeira e plásticos.

1 Modelos Uniaxiais

1.1 Modelo de três parâmetros

Considere-se o modelo viscoelástico linear de três parâmetros que está representado na Figura 16.1. Este modelo associa em série um modelo elástico e um modelo de Kelvin-Voigt. A deformação total é dada por

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v \ , \tag{16.1}$$

onde ε^e é a deformação no modelo elástico e ε^v é a deformação no modelo de Kelvin-Voigt. Derivando-se (16.1) no tempo, tem-se

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^v \ . \tag{16.2}$$

Figura 16.1: Modelo viscoelástico de três parâmetros

As equações constitutivas do modelo elástico e do modelo de Kelvin-Voigt são

$$\sigma = E_0 \varepsilon^e \quad \text{e} \quad \sigma = E_1 \varepsilon^v + \eta_1 \dot{\varepsilon}^v \ , \tag{16.3}$$

respectivamente, onde E_0 é o módulo de elasticidade do modelo elástico e E_1 e η_1 são o módulo de elasticidade e a viscosidade do modelo de Kelvin-Voigt. De (16.1), (16.2) e $(16.3)_1$, tem-se

$$\varepsilon^v = \varepsilon - \frac{\sigma}{E_0} \quad \text{e} \quad \dot{\varepsilon}^v = \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E_0} \ . \tag{16.4}$$

Introduzindo-se (16.4) em $(16.3)_2$, obtém-se a seguinte equação diferencial

$$\dot{\sigma} + \frac{E_0 + E_1}{\eta_1} \sigma = E_0 \dot{\varepsilon} + \frac{E_0 E_1}{\eta_1} \varepsilon \ . \tag{16.5}$$

1.2 Função de fluência e de relaxação

Definição 16.1: Função degrau unitário de Heaviside[83]

A função descontínua $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$H(t) = \begin{cases} 0 \ , & \text{se } t < 0 \ , \quad \text{e} \\ 1 \ , & \text{se } t \geq 0 \ . \end{cases} \tag{16.6}$$

(16.6) é conhecida como a *função degrau unitário de Heaviside*, e está ilustrada no gráfico da Figura 16.2.

Figura 16.2: Função degrau unitário de Heaviside

1.2.1 Ensaio de fluência

O ensaio de tensão controlada com a tensão dada por

$$\sigma = \begin{cases} 0 \ , & \text{para } t < 0 \text{ , e} \\ \sigma_0 \ , & \text{para } t \geq 0 \ , \end{cases} \tag{16.7}$$

é denominado *ensaio de fluência.* Note-se que o carregamento de (16.7) pode ser descrito por

$$\sigma(t) = H(t) \sigma_0 \ . \tag{16.8}$$

Definição 16.2: Função de fluência

Em um ensaio de fluência, tem-se de (16.5) a seguinte equação diferencial ordinária

[83] Oliver Heaviside (1850-1925)

$$E_0\dot{\varepsilon} + \frac{E_0 E_1}{\eta_1}\varepsilon = \sigma_0 \ , \tag{16.9}$$

cuja solução, para $t > 0$, com a condição inicial

$$\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E_0} \ , \tag{16.10}$$

é

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left[\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1}\left(1 - e^{-\frac{E_1}{\eta_1}t}\right)\right]. \tag{16.11}$$

(16.11) pode ser escrita como

$$\varepsilon(t) = J(t)\sigma_0 \ , \tag{16.12}$$

onde $J(t)$ é a *função de fluência* dada por

$$J(t) = H(t)\left[\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1}\left(1 - e^{-\frac{E_1}{\eta_1}t}\right)\right]. \tag{16.13}$$

Observação 16.1

A função de fluência pode ser facilmente obtida em ensaios com tensão constante. A função de fluência (16.13) está representada na Figura 16.3.

Figura 16.3: Função de Fluência

Definição 16.3: Módulo de elasticidade aparente na fluência

Pode-se também definir o módulo de elasticidade aparente na fluência como

$$E(t) = \frac{1}{J(t)} \ . \tag{16.14}$$

Observação 16.2

Note-se que

$$E(0) = E_0 \quad \text{e} \quad E(\infty) = E_\infty = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} \ . \tag{16.15}$$

Observação 16.3

Num ensaio de fluência, com a tensão dada por (16.7), tem-se, portanto,

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E(t)} \,. \tag{16.16}$$

Observação 16.4

Veja-se que (16.14) e (16.16) valem somente para $t > 0$.

Observação 16.5

Imagine-se, agora, que o ensaio de tensão controlada seja dado por

$$\sigma = \begin{cases} 0 \,, & \text{para } t < t_0 \text{ , e} \\ \sigma_0 \,, & \text{para } t \geq t_0 \,. \end{cases} \tag{16.17}$$

Com a ajuda de (16.6), pode-se também expressar este carregamento por

$$\sigma(t) = H(t - t_0)\sigma_0 \,. \tag{16.18}$$

Da mesma forma, as deformações são dadas por

$$\varepsilon(t) = J(t - t_0)\sigma_0 \,, \tag{16.19}$$

onde J é dada por (16.13).

1.2.2 Ensaio de relaxação

O ensaio de deformação controlada com deformação dada por

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 \,, & \text{para } t < 0 \text{ , e} \\ \varepsilon_0 \,, & \text{para } t \geq 0 \,, \end{cases} \tag{16.20}$$

é denominado *ensaio de relaxação*.

Definição 16.4: Função de relaxação

Em um ensaio de relaxação, tem-se de (16.5) a seguinte EDO

$$\dot{\sigma} + \frac{E_0 + E_1}{\eta_1}\sigma = \frac{E_0 E_1}{\eta_1}\varepsilon_0 \,, \tag{16.21}$$

cuja solução, com a condição inicial

$$\sigma_0 = E_0 \varepsilon_0 \tag{16.22}$$

é

$$\sigma(t) = J^*(t)\varepsilon_0 \,, \tag{16.23}$$

onde

$$J^*(t) = H(t)E_0\left[1 - \frac{E_0}{E_0 + E_1}\left(1 - e^{-\frac{E_0+E_1}{\eta_1}t}\right)\right] \tag{16.24}$$

é a *função de relaxação*.

Observação 16.6

(16.24) está representada graficamente na Figura 16.4.

Definição 16.5: Módulo de elasticidade aparente na relaxação

Pode-se também definir o *módulo de elasticidade aparente na relaxação* como

$$E^*(t) = J^*(t)\,, \tag{16.25}$$

de modo que num ensaio de relaxação, com a deformação dada por (16.20), tem-se

$$\sigma(t) = E^*(t)\varepsilon_0 \tag{16.26}$$

em qualquer instante t .

Figura 16.4: Função de Relaxação

1.3 Formulação integral

1.3.1 Ensaio com tensão aplicada em degraus

Considere-se, agora, um ensaio de tensão controlada com um carregamento aplicado em degraus dado por

$$\sigma = \begin{cases} 0\,, & \text{se } t < t_1\,, \\ \Delta\sigma_1, & \text{se } t_1 \le t < t_2\,, \\ \Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2, & \text{se } t_2 \le t < t_3\,, \\ \Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3, & \text{se } t_3 \le t < t_4\,, \\ \qquad\vdots & \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i\,, & \text{se } t_n \le t\,. \end{cases} \tag{16.27}$$

Este carregamento está ilustrado na Figura 16.5.

Figura 16.5: Carregamento em degraus

Com a ajuda de (16.6), ele pode ser sintetizado por

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i H(t - t_i) \,. \tag{16.28}$$

Generalizando-se (16.19), e considerando-se a superposição dos efeitos, as deformações decorrentes de (16.28) são dadas por

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{n} J(t - t_i)\,\Delta\sigma_i \,. \tag{16.29}$$

1.3.2 Formulação integral sob tensão controlada

Considere-se o carregamento contínuo a partir de $t = t_0$ dado por $\hat{\sigma}(t)$, conforme a Figura 16.6

Figura 16.6: Carregamento contínuo

Considerando-se que o incremento de carregamento no instante τ pode ser dado por

$$d\sigma = \frac{d\hat{\sigma}}{d\tau}(\tau)\,d\tau \,, \tag{16.30}$$

conclui-se que o efeito deste incremento na deformação no instante $t > \tau$ é

$$d\varepsilon = J(t - \tau)\frac{d\hat{\sigma}}{d\tau}(\tau)\,d\tau \,, \quad t \geq \tau \,. \tag{16.31}$$

Integrando-se (16.31), obtém-se

$$\varepsilon(t) = \int_{t_0}^{t} J(t - \tau)\frac{d\hat{\sigma}}{d\tau}(\tau)\,d\tau \,. \tag{16.32}$$

(16.32) é conhecida como *integral hereditária* da fluência. Esta nomenclatura foi cunhada por Volterra[84].

1.3.3 Formulação integral sob deformação controlada

Considere-se o carregamento contínuo a partir de $t = t_0$ dado por $\hat{\varepsilon}(t)$. A contrapartida de (16.32) é

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^{t} J^*(t-\tau)\frac{d\hat{\varepsilon}}{d\tau}(\tau)\,d\tau \,. \tag{16.33}$$

(16.33) é conhecida como *integral hereditária* da relaxação.

Observação 16.7

Os resultados acima em termos das funções de fluência e relaxação foram deduzidos apenas supondo a superposição dos efeitos e valem para qualquer modelo viscoelástico regido por uma equação diferencial ordinária linear. Estes modelos são chamados de viscoelásticos lineares. Na prática estes modelos têm grande importância, pois a função de fluência é facilmente medida enquanto que a determinação do modelo diferencial é bem mais difícil.

1.4 Envelhecimento

Imagine-se, agora, que os parâmetros de um modelo viscoelástico sejam dependentes do tempo. Modelos assim são chamados de modelos viscoelásticos com *envelhecimento* e continuam sendo regidos por equações diferenciais ordinárias lineares e, portanto, a superposição dos efeitos continua valendo.

Observação 16.8

A propriedade da superposição dos efeitos típica da viscoelasticidade linear, no caso do concreto, é conhecida como *hipótese de McHenry*[85].

1.4.1 Formulação integral da viscoelasticidade linear com envelhecimento

Para modelos com envelhecimento, em vez de se trabalhar com a equação diferencial, é usual postular-se diretamente uma função de fluência $J : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de tal forma que, para um carregamento dado por (16.18) a deformação é dada por

$$\varepsilon(t) = J(\zeta_0, t - t_0)\sigma_0 \,, \tag{16.34}$$

onde ζ_0 é a idade do concreto no instante t_0. ζ_0, por sua vez, é expressa por

$$\zeta_0 = t_0 - t_c \,, \tag{16.35}$$

onde t_c é o instante de concretagem. Definindo-se idade do concreto no instante t como

$$\zeta = t - t_c \,, \tag{16.36}$$

verifica-se que

$$t - t_0 = \zeta - \zeta_0 \tag{16.37}$$

e (16.34) torna-se

$$\varepsilon(t) = J(\zeta_0, \zeta - \zeta_0)\sigma_0 \,. \tag{16.38}$$

[84] Vito Volterra (1860-1940)
[85] McHenry, D. "A new aspect of creep in concrete and its applications to design." *Proc. ASTM*, Vol. 43, 1943.

Da mesma forma, para um carregamento dado por $\hat{\sigma}(t)$ da Figura 16.6 a deformação é expressa por

$$\varepsilon(t) = \int_{t_0}^{t} J(\tau - t_c, t - \tau)\frac{d\hat{\sigma}}{d\tau}(\tau)\,d\tau\,. \tag{16.39}$$

Observação 16.9: Decomposição aditiva da função de fluência

É comum expressar-se a função de fluência do concreto com envelhecimento da seguinte forma

$$J(\zeta_0, t - t_0) = \frac{1}{E_0} + H(t - t_0)C(\zeta_0, t - t_0)\,. \tag{16.40}$$

Em (16.40) a parcela elástica, representada por $\dfrac{1}{E_0}$ ficou separada da parcela viscosa.

Exemplos 16.1

a) Veja que, para o material sem envelhecimento com função de fluência dada por (16.13), tem-se

$$C(\zeta_0, t - t_0) = \frac{1}{E_1}\left(1 - e^{-\frac{E_1}{\eta_1}(t - t_0)}\right). \tag{16.41}$$

b) O U.S. Bureau of Reclamation propõe por exemplo

$$C(\zeta_0, t - t_0) = \left(a + \frac{b}{\zeta_0}\right)\log(1 + t - t_0)\,, \tag{16.42}$$

onde a e b são constantes do material.

c) Uma cadeia em série de modelos Kelvin fornece, conforme o Capítulo 9,

$$C(\zeta_0, t - t_0) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{E_i}\left(1 - e^{-\frac{E_i}{\eta_i}(t - t_0)}\right). \tag{16.43}$$

Normalmente $n = 3$ é suficiente para modelar-se os resultados experimentais. No entanto, (16.43) não tem envelhecimento.

d) Dischinger[86] propôs

$$C(\zeta_0, t - t_0) = Ae^{-\frac{1}{\theta}\zeta_0}\left(1 - e^{-\frac{1}{\theta}(t - t_0)}\right), \tag{16.44}$$

onde A e θ são constantes do material. (16.44) tem a seguinte propriedade

$$C(\zeta_0, t - t_0) = A\left(e^{-\frac{1}{\theta}\zeta_0} - e^{-\frac{1}{\theta}\zeta}\right), \tag{16.45}$$

que pode ser demonstrada com a ajuda de (16.36).

e) Pimenta e Santos[87] propuseram em 2000 a seguinte função

$$C(\zeta_0, t - t_0) = \frac{1}{E_0}\sum_{i=1}^{n}\left(A_i + B_i e^{-\frac{1}{\theta_i}\zeta_0}\right)\left(1 - e^{-\frac{1}{\theta_i}(t - t_0)}\right), \tag{16.46}$$

[86] Franz Dischinger (1887-1953)

[87] P.M.Pimenta & H.C. dos Santos: "Análise e retro-análise de estruturas de concreto sujeitas à deformação lenta", IV Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, São Paulo, 2000.

onde A_i, B_i e θ_i, $i = 1,2\ldots n$, são constantes do material. (16.46) tem diversas vantagens teóricas, experimentais e práticas. Ela normalmente aproxima qualquer resultado experimental com muita precisão para $n \leq 6$. O material geral descrito por (16.46) é uma generalização de (16.43) e (16.44).

Definição 16.6: Índice de fluência

É usual também expressar-se $J(\zeta_0, t - t_0)$ da seguinte forma

$$J(\zeta_0, t - t_0) = \frac{1}{E_0}[1 + H(t - t_0)\varphi(\zeta_0, t - t_0)], \tag{16.47}$$

onde a função $\varphi(\zeta_0, t - t_0)$ é conhecida como *índice de fluência*.

Observação 16.10

Logo, tem-se também que

$$\varphi(\zeta_0, t - t_0) = E_0 C(\zeta_0, t - t_0). \tag{16.48}$$

Exemplos 16.2

- Veja que, para o material sem envelhecimento com função de fluência dada pela equação (16.13), tem-se

$$\varphi(\zeta_0, t - t_0) = \frac{E_0}{E_1}\left(1 - e^{-\frac{E_1}{\eta_1}(t - t_0)}\right) \tag{16.49}$$

- Para o material geral com envelhecimento dado por (16.46), tem-se

$$\varphi(\zeta_0, t - t_0) = \sum_{i=1}^{n}\left(A_i + B_i e^{-\frac{1}{\theta_i}\zeta_0}\right)\left(1 - e^{-\frac{1}{\theta_i}(t - t_0)}\right). \tag{16.50}$$

Observação 16.11

Nas normas técnicas de estruturas de concreto é comum utilizar-se $E_0 = E_{c28}$, isto é, o módulo de elasticidade para a idade de 28 dias.

Definição 16.7: Deformação imediata

(16.40) pressupõe, no entanto, que o envelhecimento não afeta a elasticidade. Se este não for o caso, a deformação "elástica" passa a ser denominada *deformação imediata* e é dada pela seguinte expressão

$$\varepsilon^i(t) = \frac{\sigma(t)}{E(\zeta)}, \tag{16.51}$$

onde $E(\zeta)$ é o *módulo de rigidez imediata* na idade ζ. Note-se que a terminologia elástica perdeu o sentido, sendo melhor a terminologia imediata[88].

Observação 16.12

Em normas técnicas de estruturas de concreto uma expressão usual para $E(\zeta)$ é

[88] Algumas normas técnicas ainda utilizam a terminologia elástica, o que é incorreto, pois a elasticidade não pode ser afetada pelo tempo.

$$E(\zeta) = E_{c28}\sqrt{\frac{f_c(\zeta)}{f_{c28}}}\,, \tag{16.52}$$

onde $f_c(\zeta)$ é a resistência à compressão na idade ζ e f_{c28} é a resistência à compressão na idade de 28 dias.

Exemplos 16.3

a) Num ensaio com a tensão expressa por (16.18) a deformação passa a ser dada por

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(\zeta)} + H(t-t_0)C(\zeta_0, t-t_0)\sigma_0\,. \tag{16.53}$$

b) Num ensaio com a tensão expressa por (16.28) a deformação passa a ser dada por

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(\zeta)} + \sum_{i=1}^{n} H(t-t_i)C(t_i - t_c, t-t_i)\Delta\sigma_i\,. \tag{16.54}$$

c) Num ensaio com a tensão expressa por $\hat{\sigma}(t)$ da Figura 16.6 a deformação passa a ser dada por

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(\zeta)} + \int_{t_0}^{t} C(\tau - t_c, t-\tau)\frac{d\hat{\sigma}}{d\tau}d\tau\,. \tag{16.55}$$

Observação 16.13

Veja-se que

$$C(\zeta_0, 0) = \varphi(\zeta_0, 0) = 0\,, \tag{16.56}$$

uma vez que deformações viscosas não podem ser imediatas. Infelizmente a condição (16.56) não é obedecida por alguns índices de fluência dispostos em normas técnicas.

2 Equações Constitutivas Viscoelásticas Lineares

Os modelos viscoelásticos lineares podem ser generalizados para estados multiaxiais de tensão e deformação. Imagine-se, por exemplo, um material viscoelástico em um ensaio de tensão controlada com a tensão dada por

$$\boldsymbol{T} = \hat{\boldsymbol{T}}(t)\,. \tag{16.57}$$

Uma generalização de (16.32) é

$$\boldsymbol{E}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbb{J}(t-\tau)\frac{d\hat{\boldsymbol{T}}}{d\tau}(\tau)\,d\tau\,, \tag{16.58}$$

onde $\mathbb{J}$ é o tensor de quarta ordem das funções de fluência. De forma análoga, uma generalização de (16.33) é

$$\boldsymbol{T}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbb{J}^*(t-\tau)\frac{d\hat{\boldsymbol{E}}}{d\tau}(\tau)\,d\tau\,, \tag{16.59}$$

onde $\mathbb{J}^*$ é o tensor de quarta ordem das funções de relaxação. Note-se que no caso geral são necessárias 21 funções de fluência e de relaxação.

2.1 Materiais viscoelásticos lineares isótropos

No caso de materiais isótropos as relações acima se simplificam. Para isso, lembre-se que, conforme o Capítulo 10, para um material elástico linear isótropo as equações constitutivas podem ser dadas por

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{e}} = 3K\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{T}^{\mathrm{a}} = 2G\boldsymbol{E}^{\mathrm{a}} \ , \tag{16.60}$$

onde K e G são os módulos de compressibilidade e de cisalhamento, respectivamente, e os sobrescritos e e a indicam as parcela esféricas e anti-esféricas dos tensores das tensões e deformações. (16.58) pode ser então escrita como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}(t) &= \int_{t_0}^{t} J^{\mathrm{e}}(t-\tau)\frac{d\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{e}}}{d\tau}(\tau)\,d\tau \qquad \text{e} \\ \boldsymbol{E}^{\mathrm{a}}(t) &= \int_{t_0}^{t} J^{\mathrm{a}}(t-\tau)\frac{d\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{a}}}{d\tau}(\tau)\,d\tau \ . \end{aligned} \tag{16.61}$$

Note-se que apenas duas funções de fluência, uma esférica e outra antiesférica, são necessárias.

2.2 Metais e polímeros

No caso de metais e de polímeros é usual supor-se que não exista viscosidade para a relação entre as componentes esféricas dos tensores das tensões e das deformações, ou seja, que no lugar de (16.61) possa-se usar

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{e}}(t) = \frac{1}{3K}\boldsymbol{T}^{\mathrm{e}}(t) \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{E}^{\mathrm{a}}(t) = \int_{t_0}^{t} J^{\mathrm{a}}(t-\tau)\frac{d\hat{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{a}}}{d\tau}(\tau)\,d\tau \ . \tag{16.62}$$

(16.62) exige apenas a determinação de uma função de fluência (J^{a}).

2.3 Concreto

Já no caso do concreto uma simplificação muito utilizada é obtida com a ajuda da equação constitutiva elástica linear para materiais isótropos escrita da seguinte forma

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{E}\bar{\mathbb{C}}\boldsymbol{T} \ , \tag{16.63}$$

onde

$$\bar{\mathbb{C}} = (1+\nu)\mathbb{I}_S - \nu\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I} \ . \tag{16.64}$$

Uma generalização de (16.32) é então

$$\boldsymbol{E}(t) = \int_{t_0}^{t} J(t-\tau)\bar{\mathbb{C}}\frac{d\hat{\boldsymbol{T}}}{d\tau}(\tau)\,d\tau \ . \tag{16.65}$$

onde J é a função de fluência para o ensaio uniaxial de tensões. Diz-se então que a viscoelasticidade se processa com *coeficiente de Poisson constante*. Esta simplificação é confirmada com razoável precisão em ensaios com o concreto. Uma vantagem de (16.65) é que basta a determinação da função de fluência em ensaios uniaxiais para se descrever o comportamento multiaxial do material.

3 Teoremas de Correspondência

3.1 Decomposição do Problema Estático

Conforme a Teoria Linear da Elasticidade todo problema estático descrito por

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{E} = \mathbb{I}_S \nabla \boldsymbol{u} \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} \quad \text{em } V\,,\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{T} = \mathbb{D}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}_0 \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{em } S_u\,,\\
&\boldsymbol{t} = \overline{\boldsymbol{t}} \quad \text{em } S_t\,,
\end{aligned}
\tag{16.66}
$$

pode ser decomposto nos dois problemas abaixo,

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{E} = \operatorname{Sym}(\nabla \boldsymbol{u})\,, \quad \text{em } V\,, && \boldsymbol{E} = \operatorname{Sym}(\nabla \boldsymbol{u})\,, \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}\,, \quad \text{em } V\,, && \boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n}\,, \quad \text{em } V\,,\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}\,, \quad \text{em } V\,, && \operatorname{div}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{o}\,, \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T, \quad \text{em } V\,, \qquad \text{e} && \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T, \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{T} = \mathbb{D}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{T}_0\,, \quad \text{em } V\,, && \boldsymbol{T} = \mathbb{D}\boldsymbol{E}\,, \quad \text{em } V\,,\\
&\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}, \quad \text{em } S_u\,, && \boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}}, \quad \text{em } S_u\,,\\
&\boldsymbol{t} = \overline{\boldsymbol{t}}\,, \quad \text{em } S_t\,, && \boldsymbol{t} = \boldsymbol{o}, \quad \text{em } S_t\,.
\end{aligned}
\tag{16.67}
$$

Os problemas de (16.67), uma vez resolvidos, podem ser superpostos. $(16.67)_1$ é um problema de forças impostas enquanto que $(16.67)_2$ é um problema de deslocamentos impostos.

3.2 Estruturas de Concreto

Considerando-se apenas materiais isótropos e sólidos homogêneos, o problema $(16.67)_1$ é regido pelas equações de Beltrami-Mitchell, dadas por

$$
\nabla^2 \boldsymbol{T} + \frac{1}{1+\nu}\nabla^2(\operatorname{div}\boldsymbol{T}) + \frac{\nu}{1-\nu}(\operatorname{div}\boldsymbol{b})\boldsymbol{I} + 2\operatorname{Sym}(\nabla \boldsymbol{b}) = 0\,, \quad \text{em } V\,, \tag{16.68}
$$

enquanto que o problema $(16.67)_2$ é regido pelas equações de Lamé-Navier, dadas por

$$
\nabla^2 \boldsymbol{u} + \frac{1}{1-2\nu}\nabla(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) = 0, \quad \text{em } V\,. \tag{16.69}
$$

Observe-se que ambas equações não dependem do módulo de elasticidade, mas somente do coeficiente de Poisson. Isto significa que no problema (16.68) o campo das tensões e que no problema (16.69) os campos dos deslocamentos e das deformações não dependem do módulo de elasticidade. Estes fatos facilitam a solução de problemas da teoria da viscoelasticidade para materiais como o concreto, nos quais a viscoelasticidade se processa aproximadamente com coeficiente de Poisson constante.

3.2.1 Problema quase-estático de esforços impostos

Supondo-se, agora, que os carregamentos externos $\boldsymbol{b}$ e $\bar{\boldsymbol{t}}$, assim como os deslocamentos impostos $\bar{\boldsymbol{u}}$, sejam dados por

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{b}(t) = \gamma(t)\boldsymbol{b}_0 \quad \text{em } V\,, \\ &\bar{\boldsymbol{t}}(t) = \gamma(t)\bar{\boldsymbol{t}}_0 \quad \text{em } S_t \quad \text{e} \\ &\bar{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{o} \quad \text{em } S_u\,, \end{aligned} \tag{16.70}$$

onde

$$\gamma(t) = H(t - t_0)\,. \tag{16.71}$$

Como, em um problema quase-estático da Teoria Linear da Elasticidade para sólidos isótropos e homogêneos, o campo de tensões não depende de E e como a viscoelasticidade com coeficiente de Poisson constante afeta somente este parâmetro, pode-se concluir que o campo de tensões é dado por

$$\boldsymbol{T}(t) = \gamma(t)\boldsymbol{T}_0\,, \tag{16.72}$$

onde $\boldsymbol{T}_0$ é o campo de tensões calculado através da Teoria Linear da Elasticidade para os carregamentos $\boldsymbol{b}_0$ e $\bar{\boldsymbol{t}}_0$ de (16.70) com qualquer módulo de elasticidade, inclusive com $E = 1$. Logo cada ponto do sólido estará submetido a um carregamento dado por (16.72), ou seja, um carregamento semelhante a de um ensaio de fluência. Assim pode-se concluir que as deformações serão dadas por

$$\boldsymbol{E}(t) = J(\zeta_0, t - t_0)\boldsymbol{E}_0\,, \tag{16.73}$$

onde $\boldsymbol{E}_0$ são as deformações calculadas pela Teoria Linear da Elasticidade para os carregamentos $\boldsymbol{b}_0$ e $\bar{\boldsymbol{t}}_0$ de (16.70) com o módulo de elasticidade unitário $E = 1$. Os deslocamentos seguem (16.73) e serão dados por

$$\boldsymbol{u}(t) = J(\zeta_0, t - t_0)\boldsymbol{u}_0\,, \tag{16.74}$$

onde $\boldsymbol{u}_0$ são deslocamentos calculados pela Teoria Linear da Elasticidade para os carregamentos $\boldsymbol{b}_0$ e $\bar{\boldsymbol{t}}_0$ de (16.70) com o módulo de elasticidade unitário.

Exemplo 16.4: Viga em balanço

Considere-se a viga em balanço de concreto com um carregamento na extremidade mostrada na Figura 16.7.

Figura 16.7: Viga em balanço

Suponha-se que a função de fluência do material seja dada por

$$J(\zeta, \zeta_0, t - t_0) = \frac{1}{E(\zeta)} + C(\zeta_0, t - t_0)\,. \tag{16.75}$$

Suponha-se, também, que o carregamento seja dado por $\gamma(t)P_0$ com

$$\gamma(t) = H(t - t_1) - H(t - t_2)\,, \tag{16.76}$$

ou seja, que a viga seja carregada no instante t_1 e descarregada no instante t_2. Lembrando-se que o deslocamento na extremidade da viga para um material elástico linear com módulo de elasticidade unitário é dado por $\dfrac{P\ell^3}{3I}$, pode-se concluir do raciocínio acima que o deslocamento na extremidade da viga ao longo do tempo é dado por

$$\begin{aligned} d(t) = \frac{P\ell^3}{3I} H(t-t_1)\left(\frac{1}{E(t-t_c)} + C(t_1-t_c, t-t_1)\right) + \\ - \frac{P\ell^3}{3I} H(t-t_2)\left(\frac{1}{E(t-t_c)} + C(t_2-t_c, t-t_1)\right). \end{aligned} \tag{16.77}$$

Note-se que no instante t_1, logo após o carregamento, e observando-se (16.56), o deslocamento é dado por

$$d(t_1^+) = \frac{P\ell^3}{3I} \frac{1}{E(t_1-t_c)}. \tag{16.78}$$

No instante t_2, logo antes e logo após o descarregamento, o deslocamento é dado, respectivamente, por

$$\begin{aligned} d(t_2^-) &= \frac{P\ell^3}{3I}\left(\frac{1}{E(t_2-t_c)} + C(t_1-t_c, t_2-t_1)\right) \quad \text{e} \\ d(t_2^+) &= \frac{P\ell^3}{3I} C(t_1-t_c, t_2-t_1). \end{aligned} \tag{16.79}$$

Figura 16.8: Deslocamento da extremidade da viga em balanço

Um longo tempo após o descarregamento $(t = \infty)$, tem-se

$$d(\infty) = \frac{P\ell^3}{3I}(C(t_1-t_c, \infty) - C(t_2-t_c, \infty)). \tag{16.80}$$

Este deslocamento é chamado de *deslocamento viscoso irreversível*. O comportamento de d ao longo do tempo pode ser qualitativamente visto na Figura 16.8: Deslocamento da extremidade da viga em balanço.

3.2.2 Problema quase-estático de deslocamentos impostos

Supondo-se, de forma similar, que os carregamentos externos $\boldsymbol{b}$ e $\bar{\boldsymbol{t}}$, assim como os deslocamentos impostos $\bar{\boldsymbol{u}}$, sejam dados por

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{o} \quad \text{em } V\ , \\ &\overline{\boldsymbol{t}}(t) = \boldsymbol{o} \quad \text{em } S_t \quad \text{e} \\ &\overline{\boldsymbol{u}}(t) = \gamma(t)\boldsymbol{u}_0 \quad \text{em } S_u\ , \end{aligned} \tag{16.81}$$

onde

$$\gamma(t) = H(t - t_0)\ . \tag{16.82}$$

Como num problema quase-estático da Teoria Linear da Elasticidade para sólidos isótropos e homogêneos o campo de deformações e deslocamentos não depende de E e como a viscoelasticidade com coeficiente de Poisson constante afeta somente este parâmetro, pode-se concluir que estes campos são dados por

$$\boldsymbol{E}(t) = \gamma(t)\boldsymbol{E}_0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u}(t) = \gamma(t)\boldsymbol{u}_0\ , \tag{16.83}$$

onde $\boldsymbol{E}_0$ e $\boldsymbol{u}_0$ são calculado através da Teoria Linear da Elasticidade para os carregamentos de (16.81) com qualquer módulo de elasticidade, inclusive, por exemplo, com $E = 1$. Logo cada ponto do sólido estará submetido a um carregamento semelhante ao de um ensaio de relaxação. Assim pode-se concluir que as tensões serão dadas por

$$\boldsymbol{T}(t) = J^*(\zeta_0, t - t_0)\boldsymbol{T}_0\ , \tag{16.84}$$

onde $\boldsymbol{T}_0$ são as deformações calculadas pela Teoria Linear da Elasticidade para os carregamentos de (16.81) com o módulo de elasticidade unitário, ou seja, $E = 1$.

Observação 16.14

Os resultados acima podem ser generalizados para carregamentos em degrau ou contínuos, como feito na seção anterior.

Exemplo 16.5: Recalque de viga hiperestática

Considere-se a viga biengastada da Figura 16.9, que sofre um recalque d no instante t_1. No instante $t_2 > t_1$, aplica-se com um macaco hidráulico um recalque em sentido oposto, anulando-o.

Figura 16.9: Recalque de viga biengastada

Figura 16.10: Momento no engaste

Supondo-se que a função de relaxação do material seja dada por (16.24), e sabendo-se que o momento fletor no engaste para uma viga elástica com módulo de elasticidade unitário é dado por

$$M = \frac{6Id}{\ell^2}\,, \tag{16.85}$$

onde I é o momento de inércia da seção transversal da viga e ℓ é o seu vão, conclui-se que o momento fletor no engaste da viga viscoelástica ao longo do tempo é dado por

$$\begin{aligned} M(t) &= \frac{6Id}{\ell^2}[J^*(t-t_1) - J^*(t-t_2)] = \\ &= \frac{6E_0Id}{\ell^2}H(t-t_1)\left(1 - \frac{E_0}{E_0+E_1}\left(1 - e^{-\frac{E_0+E_1}{\eta_1}(t-t_1)}\right)\right) + \\ &\quad - \frac{6E_0Id}{\ell^2}H(t-t_2)\left(1 - \frac{E_0}{E_0+E_1}\left(1 - e^{-\frac{E_0+E_1}{\eta_1}(t-t_2)}\right)\right). \end{aligned} \tag{16.86}$$

Na Figura 16.10 mostra-se o comportamento deste momento ao longo do tempo.

Observação 16.15

Estes resultados são chamados de *Teoremas de Correspondência,* pois associam a solução de um problema da teoria da viscoelasticidade com um problema correspondente da Teoria da Elasticidade. Teoremas de Correspondência podem ser deduzidos também para o caso de isotropia ou mesmo para o caso geral. Mas para isso é necessário recorrer à transformada de Laplace, ficando além dos objetivos deste texto.

Observação 16.16

Para sólidos heterogêneos, no entanto, não existem teoremas equivalentes. No caso de estruturas de concreto os Teoremas de Correspondência acima dependem da validade da hipótese de coeficiente de Poisson constante, de se desprezar a presença da armadura ativa e passiva, de não haver fissuração e de todo o concreto ter sido fabricado na mesma data. Em casos gerais é necessária uma solução numérica ao longo do tempo com a ajuda de Métodos Numéricos de Integração de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias, conforme mostrado no Capítulo 4.

Exercícios 16.1

- Considere uma viga em balanço de comprimento ℓ e inércia I. Suponha que o concreto obedeça ao modelo dos três parâmetros com

$$E_0 = 20.000\,\text{MPa},\ E_1 = 40.000\,\text{MPa}\ \text{e}\ \frac{E_1}{\eta_1} = 200\,\text{dias}.$$

- Faça o gráfico do deslocamento na extremidade da viga em função do tempo, submetendo a viga a uma carga na extremidade P no instante 10 dias e mantendo esta carga por 90 dias para depois retirá-la.
- Faça o mesmo supondo que

$$E(t) = 20.000\left(1 - e^{-\frac{1}{20}t}\right).$$

- Faça o mesmo para um material que obedeça ao modelo de Dischinger de (16.44) com

$$A^{-1} = 40.000\,\text{MPa} \quad \text{e} \quad \theta = 200\,\text{dias}\,.$$

- Considere uma viga em balanço de comprimento ℓ e inércia I. Suponha que o concreto obedeça ao modelo dos três parâmetros com

$$E_0 = 20.000\,\text{MPa},\ E_1 = 40.000\,\text{MPa}\ \text{e}\ \frac{E_1}{\eta_1} = 200\,\text{dias}.$$

- Faça o gráfico do deslocamento na extremidade da viga em função do tempo, submetendo a viga a um deslocamento na extremidade d no instante 10 dias e mantendo-o por 90 dias para depois retirá-lo.
- Faça o mesmo supondo que

$$E(t) = 20.000\left(1 - e^{-\frac{1}{20}t}\right).$$

- Faça o mesmo para um material que obedeça o modelo de Dischinger de (16.44) com

$$A^{-1} = 40.000\,\text{MPa} \quad \text{e} \quad \theta = 200\,\text{dias}\,.$$

17

Introdução à Teoria da Estabilidade

Volta-se a considerar neste Capítulo a Não-linearidade Geométrica. Este Capítulo restringe-se a uma introdução à Teoria da Estabilidade para sólidos e estruturas conservativas.

1 Estabilidade de Sólidos Conservativos

1.1 Configuração de Equilíbrio Estável

A energia potencial de um sólido conservativo foi definida no Capítulo 12 e é dada por

$$U(\boldsymbol{u}) = U_{\text{ext}}(\boldsymbol{u}) + U_{\text{int}}(\boldsymbol{u}) , \tag{17.1}$$

com as energias potenciais, interna e externa, dadas por

$$\begin{aligned} U_{\text{int}}(\boldsymbol{u}) &= \int_{V^r} \psi \circ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) dV^r \quad \text{e} \\ U_{\text{ext}} &= \int_{V^r} \psi_V(\boldsymbol{u}) dV^r + \int_{S^r} \psi_S(\boldsymbol{u}) dS^r , \end{aligned} \tag{17.2}$$

respectivamente. Numa configuração de equilíbrio o funcional da energia potencial tem um ponto estacionário, fato este conhecido como teorema da energia potencial e também visto no Capítulo 12. Portanto, numa configuração de equilíbrio descrita pelo campo de deslocamentos $\boldsymbol{u}_0$, tem-se que

$$\delta U(\boldsymbol{u}_0, \delta\boldsymbol{u}) = 0 , \quad \forall \delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1^{E=0}(V^r) . \tag{17.3}$$

Num sólido conservativo, a energia mecânica que é dada por

$$E(\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}) = U(\boldsymbol{u}) + T(\dot{\boldsymbol{u}}) \tag{17.4}$$

conserva-se, onde

$$T = \int_{V^r} \frac{1}{2} \rho^r \dot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} dV^r \tag{17.5}$$

é a energia cinética. Logo E é constante para sólidos conservativos.

Considera-se que uma configuração de equilíbrio de um sólido é estável se pequenas perturbações provocarem pequenos efeitos. Por pequenas perturbações entende-se a introdução de pequenos des-

locamentos e de pequenas velocidades. Normalmente estas pequenas perturbações são introduzidas por pequenos impulsos, o que corresponde a fornecer ao sólido uma pequena quantidade de energia mecânica na forma de energia cinética. Logo, se na configuração de equilíbrio a energia mecânica do sólido era dada por

$$E(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{o}) = U(\boldsymbol{u}_0)\,, \tag{17.6}$$

após a perturbação ela passa a ser dada por

$$E(\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}) = U(\boldsymbol{u}_0) + T_0\,, \tag{17.7}$$

onde T_0 é a energia cinética fornecida ao sólido a título de perturbação. Assim, após a perturbação, o sólido passa a realizar um movimento respeitando a seguinte lei de conservação

$$U(\boldsymbol{u}) + T(\dot{\boldsymbol{u}}) = U(\boldsymbol{u}_0) + T_0\,. \tag{17.8}$$

1.1.1 Teorema de Lagrange-Dirichlet

Imagine agora que U tenha um mínimo local estrito em $\boldsymbol{u}_0$. Logo

$$U(\boldsymbol{u}) > U(\boldsymbol{u}_0) \tag{17.9}$$

numa vizinhança de $\boldsymbol{u}_0$. Nesta mesma vizinhança então

$$T(\dot{\boldsymbol{u}}) < T_0 \tag{17.10}$$

por causa de (17.8). Conclui-se então que o sólido tem o seu movimento restrito a uma vizinhança da configuração de equilíbrio descrita por

$$\boldsymbol{u} \mid U(\boldsymbol{u}) < U(\boldsymbol{u}_0) + T_0\,, \tag{17.11}$$

ou seja, o sólido é estável.

Portanto, uma condição suficiente para que uma configuração de equilíbrio de um sólido conservativo seja estável é que a segunda variação da energia potencial seja positivo-definida nesta configuração. Este resultado é conhecido como Teorema de Lagrange-Dirichlet.

1.1.2 Segunda Variação da Energia Potencial

A primeira variação da energia potencial é dada por

$$\delta U(\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u}) = \int_{V^r} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{F}} : \delta\boldsymbol{F} dV^r + \int_{V^r} \frac{\partial \psi_V}{\partial \boldsymbol{u}} \cdot \delta\boldsymbol{u} dV^r + \int_{S^r} \frac{\partial \psi_S}{\partial \boldsymbol{u}} \cdot \delta\boldsymbol{u} dS^r \tag{17.12}$$

enquanto que a segunda variação da energia potencial é dada por

$$\begin{aligned} \delta^2 U(\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u}) = \int_{V^r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{F}^2} \delta\boldsymbol{F} \right) : \delta\boldsymbol{F} dV^r + \int_{V^r} \left(\frac{\partial^2 \psi_V}{\partial \boldsymbol{u}^2} \delta\boldsymbol{u} \right) \cdot \delta\boldsymbol{u} dV^r + \\ + \int_{S^r} \left(\frac{\partial^2 \psi_S}{\partial \boldsymbol{u}^2} \delta\boldsymbol{u} \right) \cdot \delta\boldsymbol{u} dS^r\,. \end{aligned} \tag{17.13}$$

Já foi visto no Capítulo 11 que

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{F}^2} = \mathbb{G}\,, \tag{17.14}$$

onde

$$\mathbb{G} = (\boldsymbol{I} \underline{\otimes} \boldsymbol{S}) + \left(\boldsymbol{F}^T \underline{\otimes} \boldsymbol{I}\right) \mathbb{D} (\boldsymbol{F} \underline{\otimes} \boldsymbol{I})\,. \tag{17.15}$$

Logo, com (17.14), e introduzindo-se os tensores de segunda ordem

$$\boldsymbol{L}_V = -\frac{\partial^2 \psi_V}{\partial \boldsymbol{u}^2} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{L}_S = -\frac{\partial^2 \psi_S}{\partial \boldsymbol{u}^2}\,, \tag{17.16}$$

pode-se escrever (17.13) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \delta^2 U\,(\,\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u}\,) = \int_{V^r} (\,\mathbb{G}\delta\boldsymbol{F}\,) : \delta\boldsymbol{F} dV^r + \int_{V^r} (\,\boldsymbol{L}_V \delta\boldsymbol{u}\,) \cdot \delta\boldsymbol{u} dV^r + \\ + \int_{S^r} (\,\boldsymbol{L}_S \delta\boldsymbol{u}\,) \cdot \delta\boldsymbol{u} dS^r\,. \end{aligned} \tag{17.17}$$

Note-se que (17.17) é uma forma quadrática em $\delta\boldsymbol{u}$.

Observação 17.1

A segunda variação da energia potencial é positivo-definida na configuração de equilíbrio definida por $\boldsymbol{u}_0$ se

$$\delta^2 U\,(\,\boldsymbol{u}_0, \delta\boldsymbol{u}\,) > 0\,, \quad \forall \delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1^{E=0}\,(\,V^r\,) \mid \delta\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}\,. \tag{17.18}$$

Logo, se (17.18) for satisfeita, a configuração de equilíbrio é estável.

1.2 Configuração de Equilíbrio Crítica

Definição 17.1: Configuração crítica

Se

$$\delta^2 U\,(\,\boldsymbol{u}_0, \delta\boldsymbol{u}\,) \geq 0\,, \quad \forall \delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1^{E=0}\,(\,V^r\,) \quad \text{e} \quad \exists \delta\boldsymbol{u}_{\text{cr}} \neq \boldsymbol{o} \mid \delta^2 U\,(\,\boldsymbol{u}_0, \delta\boldsymbol{u}_{\text{cr}}\,) = 0\,, \tag{17.19}$$

diz-se que a configuração de equilíbrio é uma *configuração crítica*.

Definição 17.2: Carregamento crítico

O carregamento correspondente a uma configuração crítica é denominado *carregamento crítico*.

Observação 17.2

Os sólidos ou as estruturas podem tornar-se instáveis em configurações críticas. Como o campo $\delta\boldsymbol{u}_{\text{cr}}$ de (17.19) representa um modo de deformação, para o qual o sólido não possui rigidez, as configurações críticas indicam, em geral, mudanças bruscas de comportamento do sólido ou da estrutura.

Definição 17.3: Modo crítico

O campo $\delta\boldsymbol{u}_{\text{cr}}$ de (17.19) é denominado *modo crítico*.

Observação 17.3

Quando os carregamentos $\boldsymbol{b}$ e $\overline{\boldsymbol{t}}$ não dependem dos deslocamentos, como é o caso de carregamentos devidos à gravidade, tem-se

$$\boldsymbol{L}_V = \boldsymbol{L}_S = \boldsymbol{O}\,. \tag{17.20}$$

Logo, de (17.17) vem

$$\delta^2 U\,(\,\boldsymbol{u}, \delta\boldsymbol{u}\,) = \int_{V^r} (\,\mathbb{G}\delta\boldsymbol{F}\,) : \delta\boldsymbol{F} dV^r\,. \tag{17.21}$$

Recordando-se de (17.15), tem-se

$$\delta^2 U(\boldsymbol{u},\delta\boldsymbol{u}) = \int_{V^r} \left[\boldsymbol{S} : \left(\delta\boldsymbol{F}^T\delta\boldsymbol{F}\right) + \left(\mathbb{D}\boldsymbol{F}^T\delta\boldsymbol{F}\right) : \left(\boldsymbol{F}^T\delta\boldsymbol{F}\right)\right] dV^r \ . \tag{17.22}$$

Lembrando-se das simetrias menores de $\mathbb{D}$ dadas por $\mathbb{D} = \mathbb{I}_S\mathbb{D} = \mathbb{D}\mathbb{I}_S$, pode-se escrever

$$\left(\mathbb{D}\boldsymbol{F}^T\delta\boldsymbol{F}\right) : \left(\boldsymbol{F}^T\delta\boldsymbol{F}\right) = \mathbb{D}\mathbb{I}_S\left(\boldsymbol{F}^T\delta\boldsymbol{F}\right) : \mathbb{I}_S\left(\boldsymbol{F}^T\delta\boldsymbol{F}\right). \tag{17.23}$$

De (17.22) decorre então

$$\delta^2 U(\boldsymbol{u},\delta\boldsymbol{u}) = \int_{V^r} \left[\boldsymbol{S} : \left(\delta\boldsymbol{F}^T\delta\boldsymbol{F}\right) + (\mathbb{D}\delta\boldsymbol{E}) : \delta\boldsymbol{E}\right] dV^r \ , \tag{17.24}$$

onde

$$\delta\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^T\delta\boldsymbol{F} + \delta\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}\right). \tag{17.25}$$

2 Análise de Euler

A análise de Euler é um método aproximado para a determinação do carregamento crítico de um sólido conservativo. Para a formulação da Análise de Euler são feitas as seguintes hipóteses:

- O sólido está sob carregamento proporcional, ou seja, a intensidade do carregamento pode ser descrita por um fator de carregamento γ, tal que

  $$\boldsymbol{b}(t) = \gamma(t)\boldsymbol{b}_0 \text{ em } V, \quad \overline{\boldsymbol{t}}(t) = \gamma(t)\overline{\boldsymbol{t}}_0 \text{ em } S_t \quad \text{e} \quad \overline{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{o} \quad \text{em } S_u \ , \tag{17.26}$$

  onde $\gamma(t)$ é uma função monotônica. Em particular, o carregamento crítico é descrito por um fator de carregamento γ_{fl}. Por simplificação, admite-se aqui que o carregamento externo é tal que (17.20) possa ser considerada válida. Assim a segunda variação da energia potencial pode ser então expressa por (17.24).
- O gradiente dos deslocamentos na configuração crítica é tão pequeno que nela

  $$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} \ . \tag{17.27}$$

- Na configuração crítica $\boldsymbol{S}$ é dado pela Teoria Linear da Elasticidade. Isto significa que, se $\boldsymbol{T}_0$ é a solução do problema estático da Teoria Linear da Elasticidade para o carregamento $\boldsymbol{b}_0$ e $\overline{\boldsymbol{t}}_0$ de (17.26), então, na configuração crítica,

  $$\boldsymbol{S} = \gamma_{fl}\boldsymbol{T}_0 \ . \tag{17.28}$$

Com as hipóteses acima, de (17.24) obtém-se

$$\delta^2 U(\boldsymbol{u},\delta\boldsymbol{u}) = \int_{V} \left[\gamma_{fl}\boldsymbol{T}_0 : \left(\delta\boldsymbol{L}^T\delta\boldsymbol{L}\right) + (\mathbb{D}\delta\boldsymbol{E}) : \delta\boldsymbol{E}\right] dV \ , \tag{17.29}$$

onde $\delta\boldsymbol{L} = \nabla\delta\boldsymbol{u}$, $\delta\boldsymbol{E} = \mathbb{I}_S\delta\boldsymbol{L}$ é a deformação virtual da Linearidade Geométrica e $\mathbb{D}$ é o tensor dos módulos elásticos de rigidez da Teoria Linear da Elasticidade. Conforme (17.19) e (17.29), os possíveis fatores de carregamento crítico são dados aproximadamente pelo seguinte problema

$$\int_{V^r} (\mathbb{D}\delta\boldsymbol{E}) : \delta\boldsymbol{E} dV + \gamma_{fl}\int_{V^r} \boldsymbol{T}_0 : \left(\delta\boldsymbol{L}^T\delta\boldsymbol{L}\right) dV = 0 \ , \quad \delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1^{E=0}(V) \mid \delta\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o} \ . \tag{17.30}$$

Definição 17.4: Autoproblema da Análise de Euler

Retirando-se de (17.30) o símbolo das variações, tem-se o seguinte autoproblema

$$\int_V (\mathbb{D}\boldsymbol{E}) : \boldsymbol{E} dV + \gamma_{\text{cr}} \int_V \boldsymbol{T}_0 : \left(\boldsymbol{L}^T \boldsymbol{L}\right) dV = 0 \,, \quad \boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1^{E=0}(V) \mid \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o} \,, \tag{17.31}$$

onde $\boldsymbol{L} = \nabla \boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{E} = \mathbb{I}_S \boldsymbol{L}$. O par $\{\gamma_{fl}, \boldsymbol{u}_{fl}\}$ com os valores de γ_{fl} e com os campos vetoriais $\boldsymbol{u}_{fl}$ associados, que satisfazem o problema acima, contém, respectivamente, um autovalor e um autovetor do autoproblema.

Definição 17.5: Fator, carregamento e modo de flambagem

O autovalor de (17.31), γ_{fl}, é chamado de *fator de flambagem*. O carregamento correspondente é chamado de *carregamento de flambagem*. Quando o carregamento é uma carga, ele é chamado de *carga de flambagem*. O autovetor $\boldsymbol{u}_{fl}$ associado é denominado *modo de flambagem*.

Observação 17.4

Se $\boldsymbol{u}_{fl}$ é autovetor de (17.31), então $\alpha \boldsymbol{u}_{fl}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, também é. Portanto, o modo de flambagem não tem amplitude.

Observação 17.5

O carregamento

$$\boldsymbol{b} = \gamma_{fl} \boldsymbol{b}_0 \quad \text{em } V \quad \text{e} \quad \bar{\boldsymbol{t}} = \gamma_{fl} \bar{\boldsymbol{t}}_0 \quad \text{em } S_t \,, \tag{17.32}$$

é uma aproximação do carregamento crítico. O modo de flambagem associado é uma aproximação do modo crítico.

Observação 17.6

Note-se que (17.31) também pode ser escrita como

$$U_{\text{int}}(\boldsymbol{u}) - \gamma_{fl} U_{\text{geo}}(\boldsymbol{u}) = 0 \,, \quad \gamma_{fl} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1^{E=0}(V) \mid \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o} \,, \tag{17.33}$$

onde $U_{\text{int}}(\boldsymbol{u})$ é a energia de deformação da Teoria Linear da Elasticidade e

$$U_{\text{geo}}(\boldsymbol{u}) = -\frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{T}_0 : \left(\boldsymbol{L}^T \boldsymbol{L}\right) dV \,. \tag{17.34}$$

Observação 17.7

Na prática, interessa-se, freqüentemente, apenas pelo menor fator positivo de flambagem. Quando valores negativos do fator de carregamento fizerem sentido, interessa-se também pelo maior valor negativo do fator de flambagem. O problema (17.33) é denominado *Análise de Euler* ou *Análise Linear de Estabilidade* ou, ainda, *Análise Linear de Flambagem*[89] e fornece uma aproximação do carregamento crítico e do modo crítico. Esta aproximação será tão melhor quanto melhor forem atendidas as três hipóteses acima. Quando isto não acontece, a Análise de Euler pode fornecer carregamentos críticos totalmente contra a segurança. Isto ocorre freqüentemente em estruturas abatidas de arcos e cascas.

Observação 17.8

Quando (17.34) é positivo-semidefinida, isto é, quando $U_{\text{geo}}(\boldsymbol{u}) \geq 0, \forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1^{E=0}(V)$, tem-se de (17.33) o seguinte Problema Variacional

[89] "Linear Buckling" em ingles.

$$\gamma_{fl} = \min \frac{U_{\text{int}}(\boldsymbol{u})}{U_{\text{geo}}(\boldsymbol{u})}, \quad \boldsymbol{u} \in \mathcal{H}_1^{E=0}(V) \mid \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}. \tag{17.35}$$

Exemplo 17.1: Coluna de Euler

Para o caso de um pilar de comprimento ℓ, engastado na base, com uma carga unitária de compressão no topo e considerando-se a teoria de Bernoulli-Euler para barras retas mas restrita ao plano (x, y), com x sendo o eixo dos centros de gravidade das seções do pilar, de (17.35) resulta em notação técnica

$$\gamma_{fl} = \min \left[\frac{\int_0^\ell \left[\frac{1}{2} EA(u')^2 + \frac{1}{2} EI(v'')^2 \right] dx}{\int_0^\ell \frac{1}{2}(v')^2 \, dx} \right], \tag{17.36}$$

onde u é o deslocamento longitudinal e v é o deslocamento transversal do eixo do pilar. Admitindo-se que na solução de (17.36) o pilar comporte-se como inextensível, ou seja, que $u = 0$, tem-se

$$\gamma_{fl} = \min \left[\frac{\int_0^\ell \frac{1}{2} EI(v'')^2 \, dx}{\int_0^\ell \frac{1}{2}(v')^2 \, dx} \right], \tag{17.37}$$

que é o funcional utilizado nas aplicações do Capítulo 13 nas aplicações do Método de Ritz. O autovalor e o autovetor que formam a solução de (17.37) são, respectivamente,

$$\gamma_{fl} = \frac{\pi^2 EI}{\ell_{fl}^2} \quad \text{e} \quad v_{fl}(x) = A \sin \frac{\pi x}{\ell_{fl}}, \tag{17.38}$$

onde $\ell_{fl} = 2\ell$. (17.38) também é a solução de (17.36).

3 Modelos Unidimensionais

Nesta seção alguns exemplos de modelos unidimensionais são elaborados como ilustração da teoria da estabilidade apresentada.

Exemplo 17.2: Bifurcação em garfo estável

Considere-se a barra rígida de comprimento ℓ da Figura 17.1, suportada por uma mola de rotação com rigidez k, de modo que o momento que ela oferece contra a rotação da barra é dado por

$$M_{\text{int}} = k\theta. \tag{17.39}$$

Em uma configuração deformada a barra inclina-se com o ângulo θ. O momento que a carga externa P aplica sobre a mola é dado por

$$M_{\text{ext}} = P\ell \,\text{sen}\theta. \tag{17.40}$$

Logo, a equação de equilíbrio da barra é

$$M_{\text{int}} - M_{\text{ext}} = k\theta - P\ell \,\text{sen}\theta = 0. \tag{17.41}$$

Outra forma de se obter (17.41) é escrever a energia potencial da barra. A energia potencial interna é a energia de deformação da mola, ou seja,

$$U_{\text{int}} = \frac{1}{2} k\theta^2, \tag{17.42}$$

enquanto que a energia potencial externa é dada por

$$U_{\text{ext}} = -Pv\,, \tag{17.43}$$

onde

$$v = \ell(1-\cos\theta) \tag{17.44}$$

é o deslocamento vertical da extremidade da barra. Portanto, a energia potencial é dada por

$$U = \frac{1}{2}k\theta^2 - P\ell(1-\cos\theta)\,. \tag{17.45}$$

Figura 17.1: Barra do Exemplo 17.2

O equilíbrio da barra caracteriza um ponto estacionário de (17.45). Logo

$$\frac{dU}{d\theta} = k\theta - P\ell\,\text{sen}\theta = 0\,, \tag{17.46}$$

que é idêntica a (17.41). As soluções de (17.41), ou de (17.46), definem as configurações de equilíbrio da barra. (17.41) é uma equação transcendental. No entanto, pode-se verificar que

$$\overline{\theta} = 0 \tag{17.47}$$

é uma solução. (17.47) é chamada de *solução trivial* ou *fundamental* do problema.

A energia potencial (17.45) pode ser expandida em séries de Taylor, como se segue

$$\begin{aligned} U(\theta) = U(0) + \frac{dU}{d\theta}(0)\theta + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{d\theta^2}(0)\theta^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3U}{d\theta^3}(0)\theta^3 + \\ + \frac{1}{4!}\frac{d^4U}{d\theta^4}(0)\theta^4 + \frac{1}{5!}\frac{d^5U}{d\theta^5}(0)\theta^5 + O\left(\theta^6\right). \end{aligned} \tag{17.48}$$

Logo, introduzindo-se (17.45) em (17.48), tem-se, em até 5ª ordem em θ,

$$U(\theta) \approx \frac{1}{2}\ell(P_{\text{cr}} - P)\theta^2 + \frac{1}{4!}P\ell\theta^4\,, \tag{17.49}$$

onde

$$P_{\text{cr}} = \frac{k}{\ell}\,. \tag{17.50}$$

(17.46) pode então ser escrita da seguinte forma

$$\frac{dU}{d\theta} = \ell\theta\left(P_{\text{cr}} - P\left(1 - \frac{1}{6}\theta^2\right)\right) = 0\,. \tag{17.51}$$

A segunda derivada da energia potencial pode, da mesma forma, ser expressa por

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = \ell\,(P_{\text{cr}} - P) + \frac{1}{2}P\ell\theta^2 \ . \tag{17.52}$$

As soluções da equação do terceiro grau dada por (17.51) são

$$\theta = \begin{cases} \overline{\theta} = 0\,; \\ \tilde{\theta}_s = \pm\sqrt{6\left(1 - \dfrac{P_{\text{cr}}}{P}\right)}\,. \end{cases} \tag{17.53}$$

(17.53) confirma a existência da solução trivial e mostra a existência de uma outra solução θ_s, dita *secundária*, cuja aproximação é dada por $\tilde{\theta}_s$ em (17.53). Esta solução existe somente para $P \geq P_{\text{cr}}$. As soluções $\overline{\theta}$ e θ_s, assim como a sua aproximação $\tilde{\theta}_s$, estão grafadas na Figura 17.2. A solução geometricamente exata θ_s de (17.46) pode ser obtida numericamente, resolvendo-a de forma iterativa através do método de Newton, por exemplo.

O gráfico de uma solução é chamado de *trajetória de equilíbrio*. Note-se que para o carregamento P_{cr} existe uma bifurcação das trajetórias de equilíbrio, bifurcação esta chamada de *bifurcação em garfo*[90]. A configuração onde esta bifurcação ocorre é uma configuração crítica e o carrgamento associado é um carregamento crítico.

Figura 17.2: Bifurcação em garfo estável

Introduzindo-se as soluções (17.53) em (17.52), tem-se para a segunda derivada da energia potencial

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}\left(\overline{\theta}\right) = \ell\,(P_{\text{cr}} - P) \quad \text{e} \quad \frac{d^2U}{d\theta^2}\left(\tilde{\theta}_s\right) = 2\ell\,(P - P_{\text{cr}})\,. \tag{17.54}$$

Logo

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}\left(\overline{\theta}\right)\begin{cases} > 0 & \text{se } P < P_{\text{cr}}\ ; \\ = 0 & \text{se } P = P_{\text{cr}}\ ; \\ < 0 & \text{se } P > P_{\text{cr}}\ ; \end{cases} \tag{17.55}$$

e

[90] "Pitch-fork bifurcation" em inglês.

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}\left(\tilde{\theta}_s\right)\begin{cases} > 0 & \text{se } P > P_{\text{cr}} \ ; \\ = 0 & \text{se } P = P_{\text{cr}} \ . \end{cases} \tag{17.56}$$

Portanto a solução trivial é estável para $P < P_{\text{cr}}$ e instável para $P > P_{\text{cr}}$. Para a configuração crítica

$$\frac{d^3U}{d\theta^3}(\theta_{\text{cr}}) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^4U}{d\theta^3}(\theta_{\text{cr}}) = P_{\text{cr}}\ell > 0 \ . \tag{17.57}$$

Logo a configuração crítica caracteriza um mínimo local da energia potencial e é, portanto, estável. Daí a nomenclatura bifurcação em garfo estável. A estabilidade desta configuração é representada graficamente por círculos preenchidos. Já a solução não-trivial é sempre estável. Na Figura 17.2 as trajetórias estáveis são representadas com linha sólida e as instáveis com linha tracejada. Como as trajetórias secundárias são estáveis e simétricas em relação à trajetória fundamental, esta bifurcação é também chamada de *simétrica estável*.

Considere-se que a barra da Figura 17.1 tenha sido montada com uma imperfeição traduzida por um pequeno ângulo inicial θ_0. Neste caso, a energia potencial passa a ser dada por

$$U = \frac{1}{2}k(\theta - \theta_0)^2 - P\ell(\cos\theta - \cos\theta_0) \ . \tag{17.58}$$

Derivando-se (17.58), obtém-se a seguinte equação de equilíbrio

$$\frac{dU}{d\theta} = k(\theta - \theta_0) + P\ell\text{sen}\theta = 0 \ . \tag{17.59}$$

A solução geometricamente exata de (17.59) é

$$P = P_{\text{cr}}\frac{\theta - \theta_0}{\text{sen}\theta} \tag{17.60}$$

e está grafada na Figura 17.2 com a notação θ_i. Esta solução não apresenta bifurcação e é sempre estável. Diz-se que a imperfeição erodiu ou destruiu a bifurcação. Uma aproximação de quarta ordem em θ de (17.59) leva a

$$P = P_{\text{cr}}\frac{\theta - \theta_0}{\theta - \frac{1}{6}\theta^3} \tag{17.61}$$

e está grafada na Figura 17.2 com a notação $\tilde{\theta}_4$. Uma aproximação de segunda ordem de (17.59) leva a

$$P = P_{\text{cr}}\frac{\theta - \theta_0}{\theta} \tag{17.62}$$

e também está representada na Figura 17.2 com a notação $\tilde{\theta}_2$. Note-se que nesta solução $P \to P_{\text{cr}}$ quando $\theta \to \infty$.

A análise de Euler deste modelo consiste em utilizar na segunda diferencial da energia potencial

$$dU = \frac{d^2U}{d\theta^2}d\theta^2 = \ell(P_{\text{cr}} - P\cos\theta)d\theta^2 \tag{17.63}$$

as hipóteses do item 2, o que resulta em

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}d\theta^2 = \ell(P_{\text{cr}} - P)d\theta^2 \ . \tag{17.64}$$

(17.64), igualada a zero, fornece o autovalor

$$P = P_{\text{cr}} \ . \tag{17.65}$$

Neste caso, a análise de Euler fornece exatamente a carga crítica da barra perfeita. Este exemplo assemelha-se qualitativamente com um pilar engastado na base e livre no topo, sujeito a uma carga P.

Exemplo 17.3: Bifurcação em garfo instável

Considere-se a barra da Figura 17.3, desta vez com uma mola linear sempre horizontal com rigidez dada por k. A energia potencial deste modelo é dada por

$$U = \frac{1}{2}ku^2 - P\ell v = \frac{1}{2}k\ell^2 \text{sen}^2\theta - P\ell(1-\cos\theta) \ . \tag{17.66}$$

Figura 17.3: Barra do Exemplo 17.3

A equação de equilíbrio é obtida por diferenciação de (17.66). O resultado é

$$\frac{dU}{d\theta} = \ell \text{sen}\theta\,(P_{\text{cr}}\cos\theta - P) \ , \tag{17.67}$$

onde

$$P_{\text{cr}} = k\ell \ . \tag{17.68}$$

As trajetórias de equilíbrio da barra perfeita e imperfeita estão grafadas na Figura 17.4. Configurações estáveis correspondem a linhas sólidas e as instáveis a linhas tracejadas. Pontos críticos instáveis são indicados por um círculo vazio. Veja que há uma bifurcação em garfo instável na barra perfeita para o carregamento crítico $P_{\text{cr}} = k\ell$.

Figura 17.4: Bifurcação em garfo instável

A trajetória secundária desta vez é totalmente instável e existe somente para $P \leq P_{\text{cr}}$. Esta bifurcação é qualificada também de *simétrica instável*. A trajetória da barra imperfeita apresenta desta vez um ponto crítico, que é denominado *ponto limite*, que representa um máximo para a carga. Após este ponto crítico a barra torna-se instável e a carga diminui.

Observe-se que o ponto crítico da barra imperfeita apresenta uma carga crítica menor que a carga crítica da barra perfeita. Este fato mostra que é importante a consideração de imperfeições na modelação da instabilidade. Observe-se que a carga crítica da barra perfeita é um limite superior para as cargas críticas das barras imperfeitas. Isto significa que (17.68) está contra a segurança para barras imperfeitas. Outro fato importante é que, ao contrário do exemplo anterior, para cargas acima de (17.68) não existe uma configuração de equilíbrio estável. É importante também notar que a análise de Euler neste caso fornece apenas a carga crítica da barra perfeita.

As bifurcações estão associadas a simetrias do problema estático. Arcos simétricos sob carregamento simétrico, por exemplo, podem apresentar bifurcações ditas simétricas instáveis que estão associadas a modos críticos assimétricos, ou podem apresentar pontos limites que estão associados a modos críticos simétricos. Neste aspecto a nomenclatura bifurcação simétrica é confusa e recomenda-se o seu desuso.

Exercícios 17.1

- Complemente o Exemplo 17.3. Faça a Análise de Euler.
- Repita o Exemplo 17.2 com uma mola de rotação tal que

$$M_{\text{int}} = k\theta\left(1 - \theta^2\right). \tag{17.69}$$

- Refaça o Exemplo 17.3, supondo que existam duas molas, uma de rotação com rigidez k_θ e uma linear com rigidez k_u. Para que valores de rigidez a bifurcação em garfo instável passa a ser estável?
- Faça a análise da estabilidade do modelo da Figura 17.5.

Figura 17.5: Reversão de configuração[91]

[91] "snap-through" em inglês.