Geometria Analítica e Cálculo Vetorial
Geometria Analítica Básica

Dirce Uesu Pesco

Superfícies

21/02 e 26/02

SUPERFÍCIES

O conjunto de pontos que satisfazem a equação de três variáveis: $F(x, y, z) = 0$

é denominado superfície.

SUPERFÍCIES

O conjunto de pontos que satisfazem a equação de três variáveis: $F(x, y, z) = 0$

é denominado superfície.

Exemplos:

1) A equação do plano: $F(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0$

SUPERFÍCIES

O conjunto de pontos que satisfazem a equação de três variáveis: $F(x,y,z)=0$

é denominado superfície.

Exemplos:

1) A equação do plano: $F(x,y,z)=ax+by+cz+d=0$

2) $F(x,y,z)=x-4=0$

SUPERFÍCIES

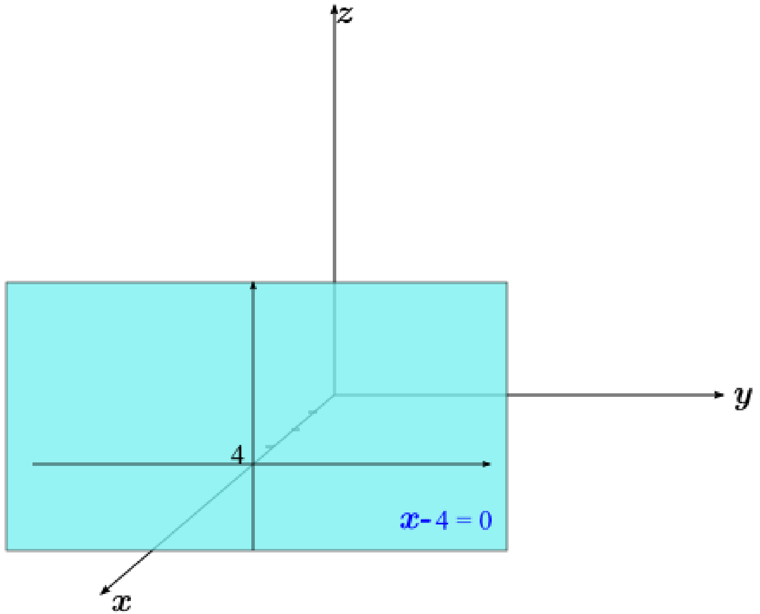
O conjunto de pontos que satisfazem a equação de três variáveis: $F(x,y,z)=0$

é denominado superfície.

Exemplos:

1) A equação do plano: $F(x,y,z)=ax+by+cz+d=0$

2) $F(x,y,z)=x-4=0$

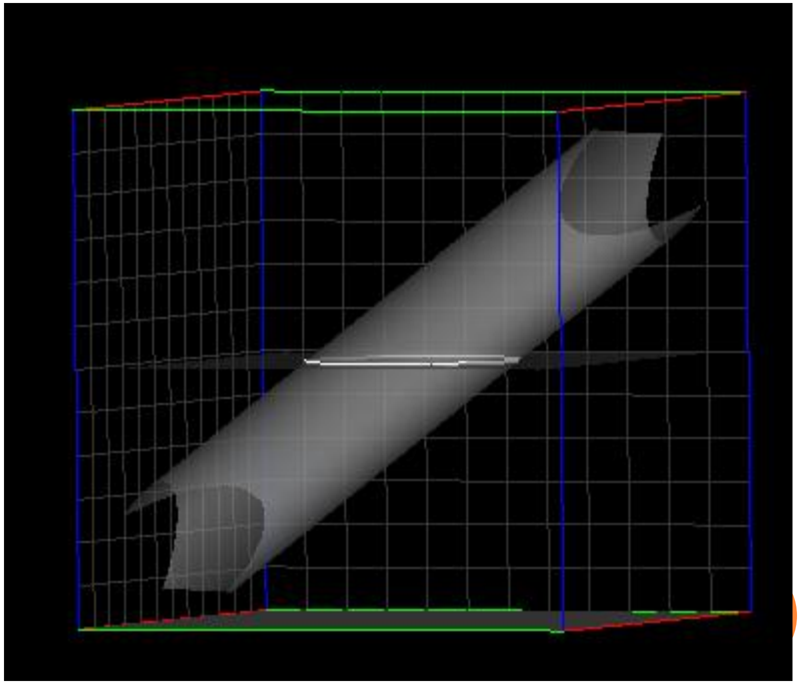


Superfícies

Exemplos:

3) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2yz - 1 = 0$

Superfície cilíndrica

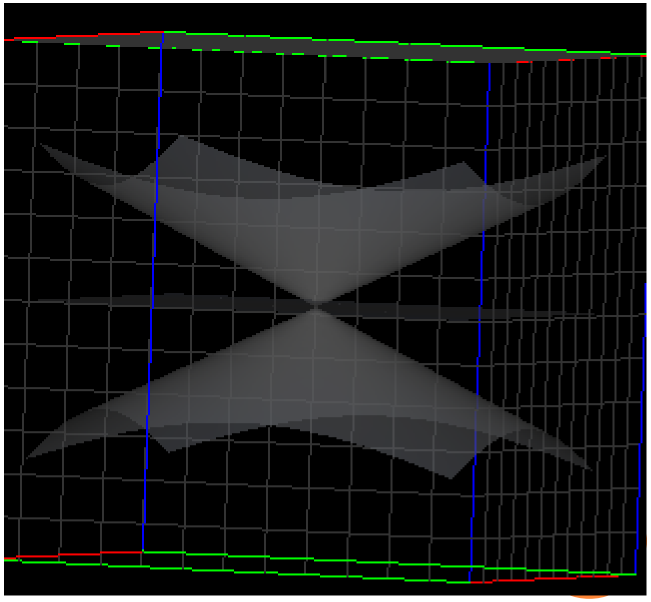


Superfícies

Exemplos:

3) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2yz - 1 = 0$ Superfície cilíndrica

4) $x^2 + y^2 = 4z^2$ Superfície cônica



Superfícies

Exemplos:

3) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2yz - 1 = 0$ Superfície cilíndrica

4) $x^2 + y^2 = 4z^2$ Superfície cônica

5) $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$

Superfície quádrica ou simplesmente Quádrica

6) Superfície de revolução

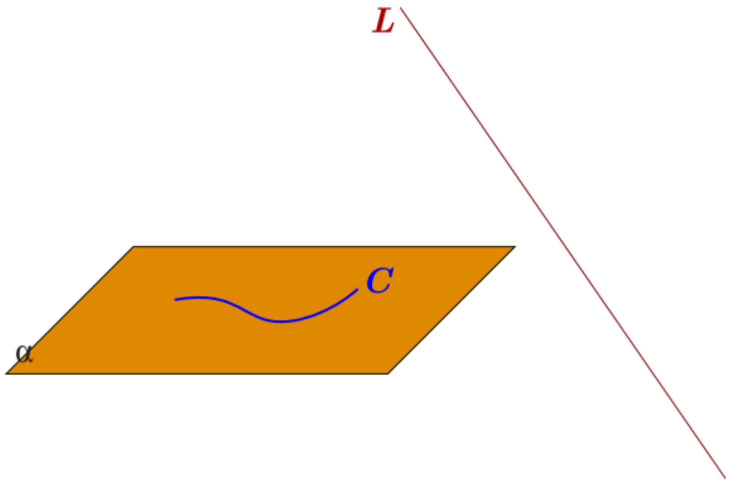
7) Superfície regrada

A SUPERFÍCIE CILÍNDRICA

Considere C uma curva plana e L uma reta não paralela ao plano de C , o plano α.

A figura geométrica o espaço gerada por uma reta que se move paralelamente a L,

com pontos em C é a superfície cilíndrica.

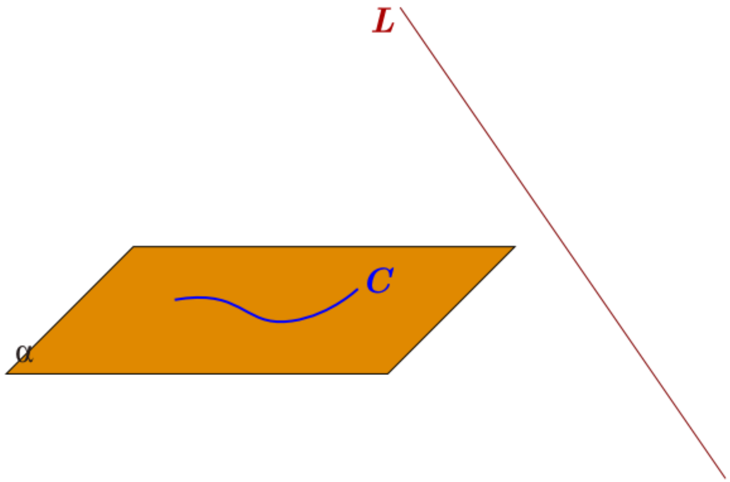


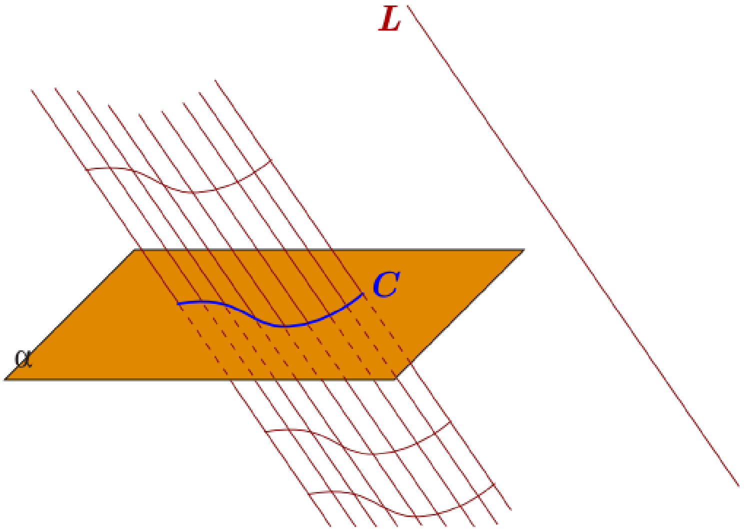
A Superfície Cilíndrica

Considere C uma curva plana e L uma reta não paralela ao plano de C , o plano α.

A figura geométrica o espaço gerada por uma reta que se move paralelamente a L,

com pontos em C é a superfície cilíndrica.



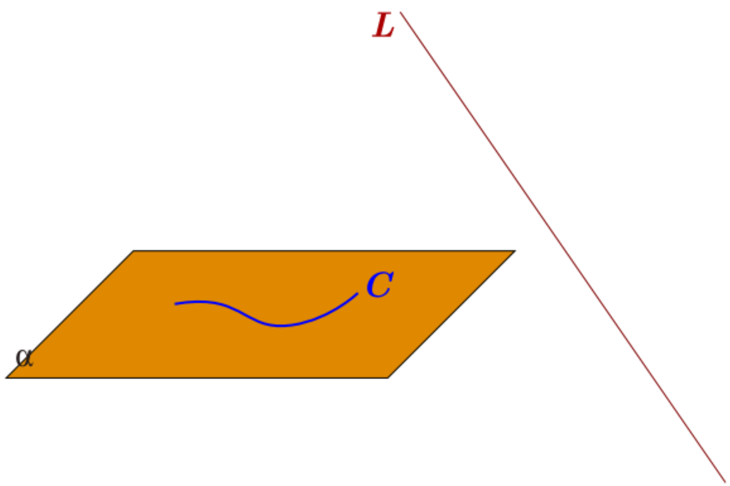


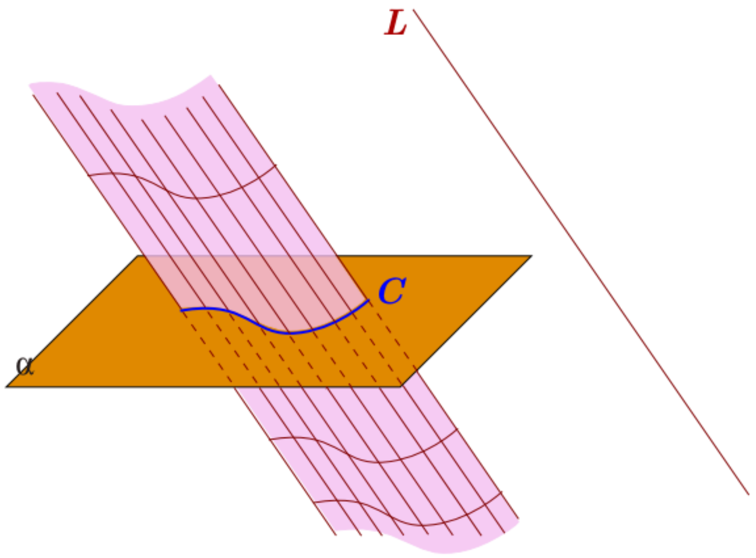
A Superfície Cilíndrica

Considere C uma curva plana e L uma reta não paralela ao plano de C , o plano α.

A figura geométrica o espaço gerada por uma reta que se move paralelamente a L,

com pontos em C é a superfície cilíndrica.



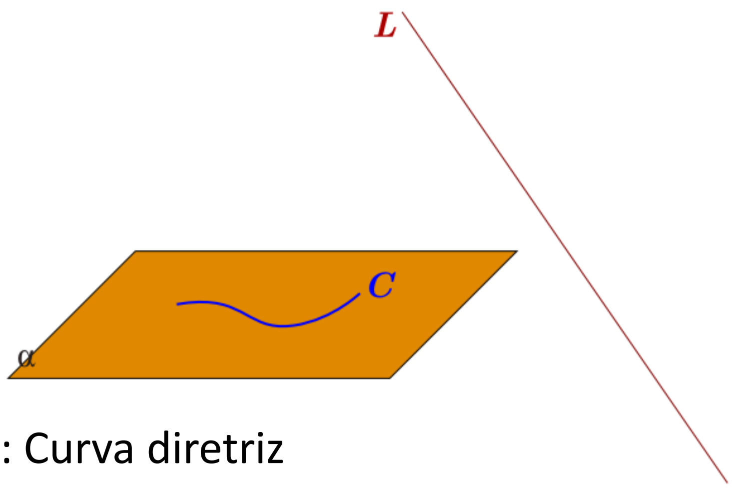


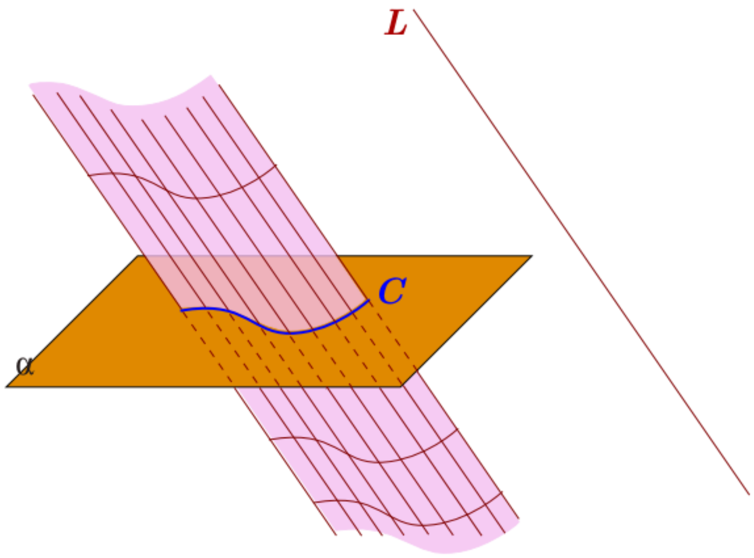
A SUPERFÍCIE CILÍNDRICA

Considere C uma curva plana e L uma reta não paralela ao plano de C , o plano α.

A figura geométrica o espaço gerada por uma reta que se move paralelamente a L,

com pontos em C é a superfície cilíndrica.





C: Curva diretriz

L : reta geratriz

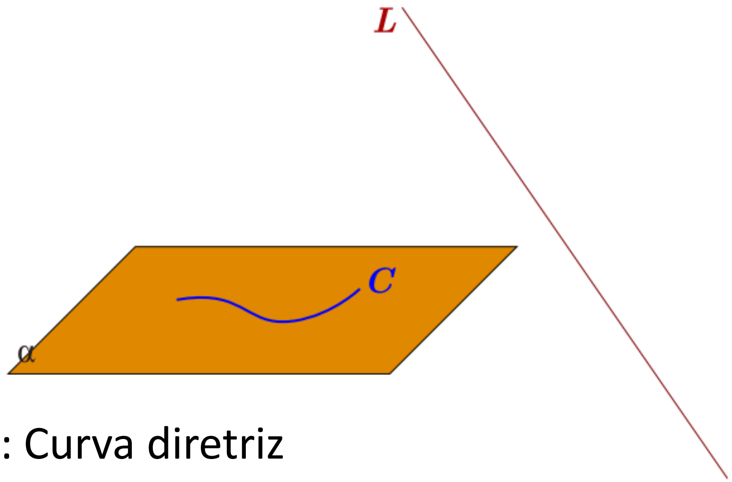
OBS

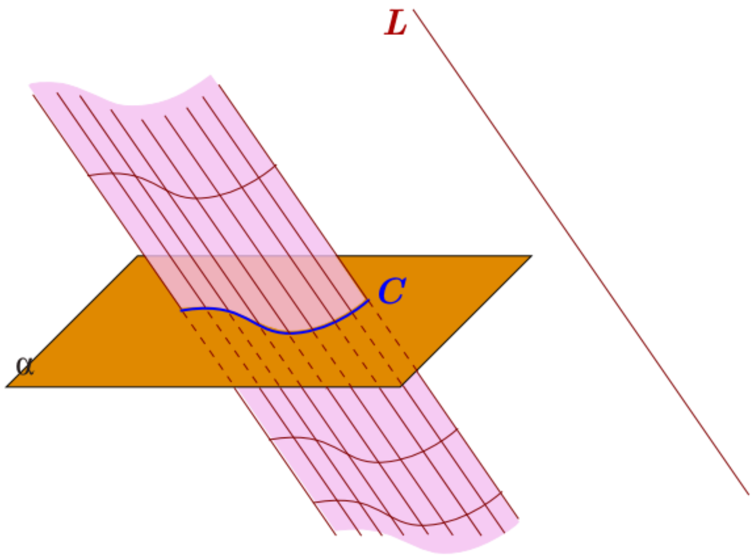
A Superfície Cilíndrica

Considere C uma curva plana e L uma reta não paralela ao plano de C , o plano α.

A figura geométrica o espaço gerada por uma reta que se move paralelamente a L,

com pontos em C é a superfície cilíndrica.





C: Curva diretriz

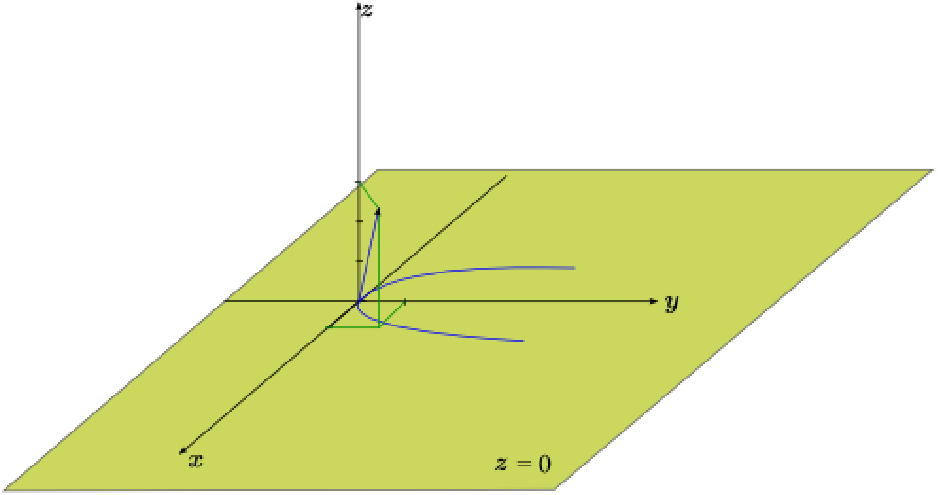
L : reta geratriz

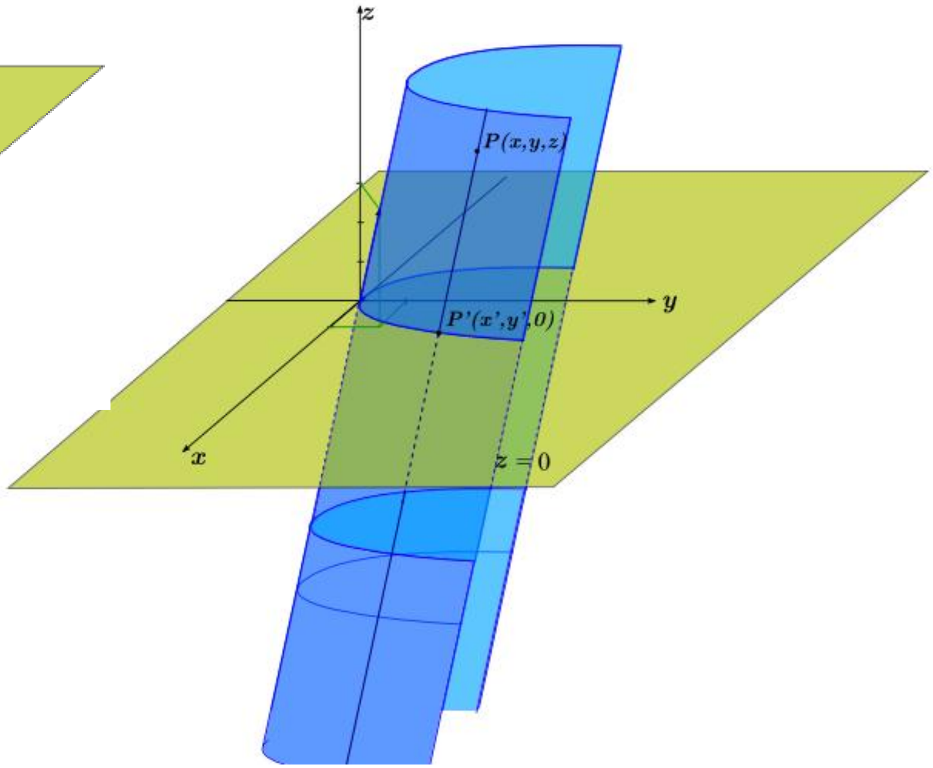
OBS: Em **superfícies cilíndricas** estamos considerando a curva diretriz em um plano coordenado, ou seja, plano xy, plano xz ou plano yz.

A SUPERFÍCIE CILÍNDRICA

A equação cilíndrica cuja diretriz é a parábola $x^2 - 4y = 0$ e $z = 0$

(situado no planos xy), cuja geratriz tem os parâmetros diretores (1,1,3).





A equação da superfície é:

$$9x^2 + z^2 - 6xz - 36y + 12z = 0$$

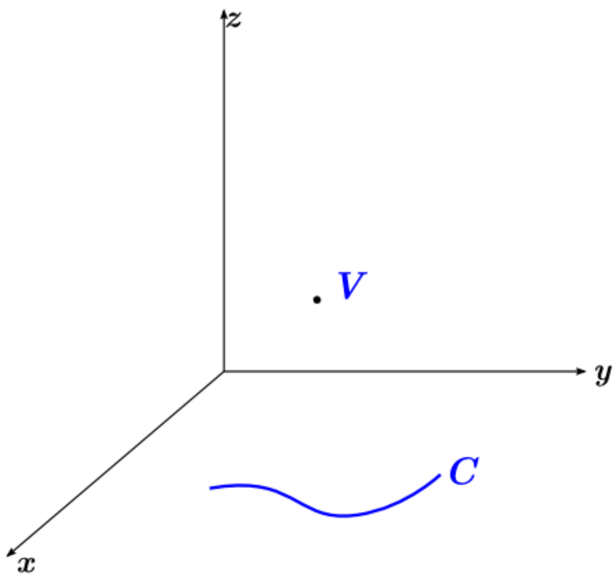
A Superfície Cônica

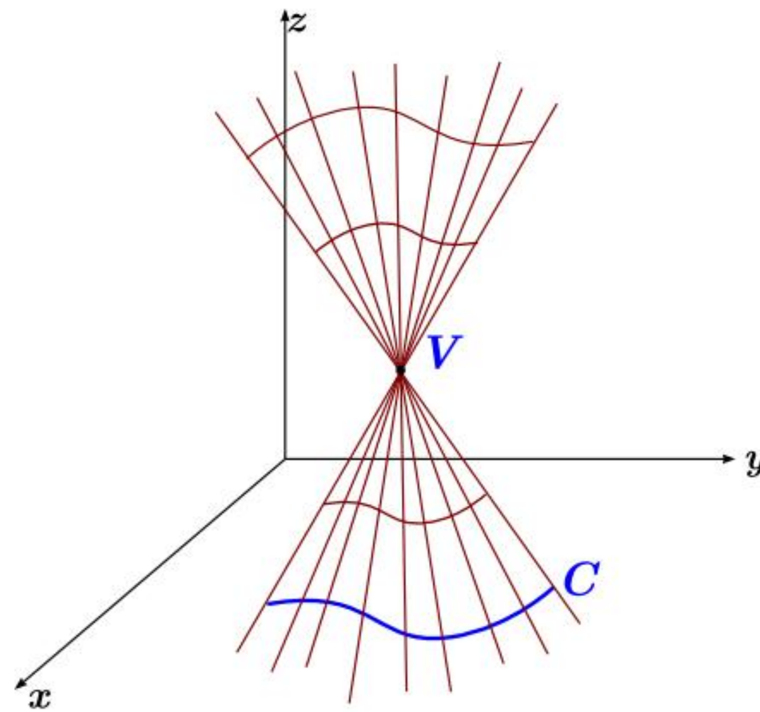
Uma superfície cônica é a superfície gerada por uma reta que se move de maneira que sempre passa por uma curva fixa dada e também por um ponto fixo dado não situado no plano da referida curva.

A reta que se desloca é denominada geratriz.

A curva fixa dada é a diretriz.

O ponto fixo dado é o vértice.





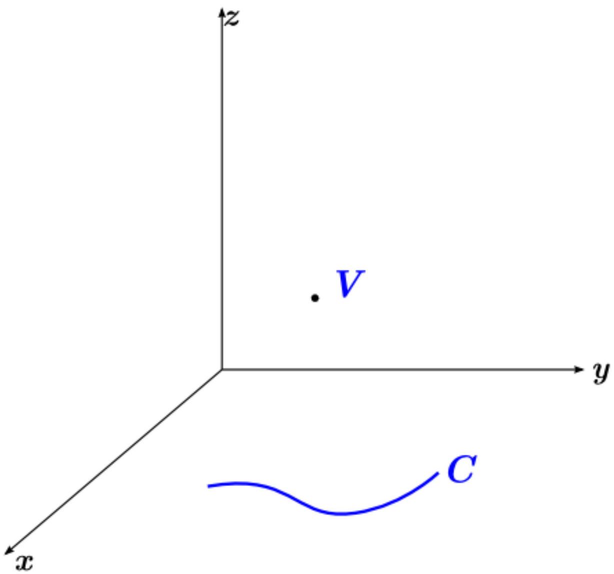
A Superfície Cônica

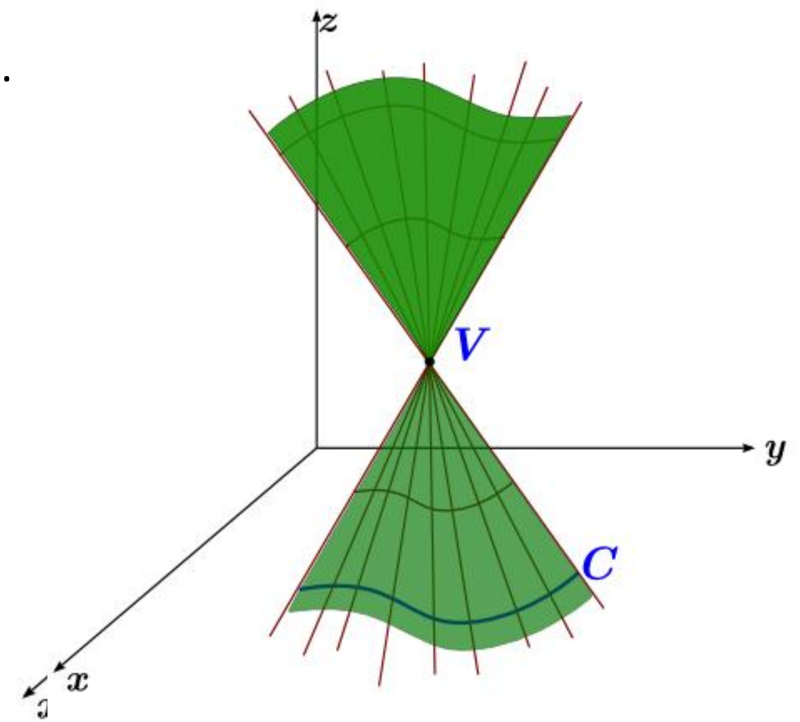
Uma superfície cônica é a superfície gerada por uma reta que se move de maneira que sempre passa por uma curva fixa dada e também por um ponto fixo dado não situado no plano da referida curva.

A reta que se desloca é denominada geratriz.

A curva fixa dada é a diretriz.

O ponto fixo dado é o vértice.



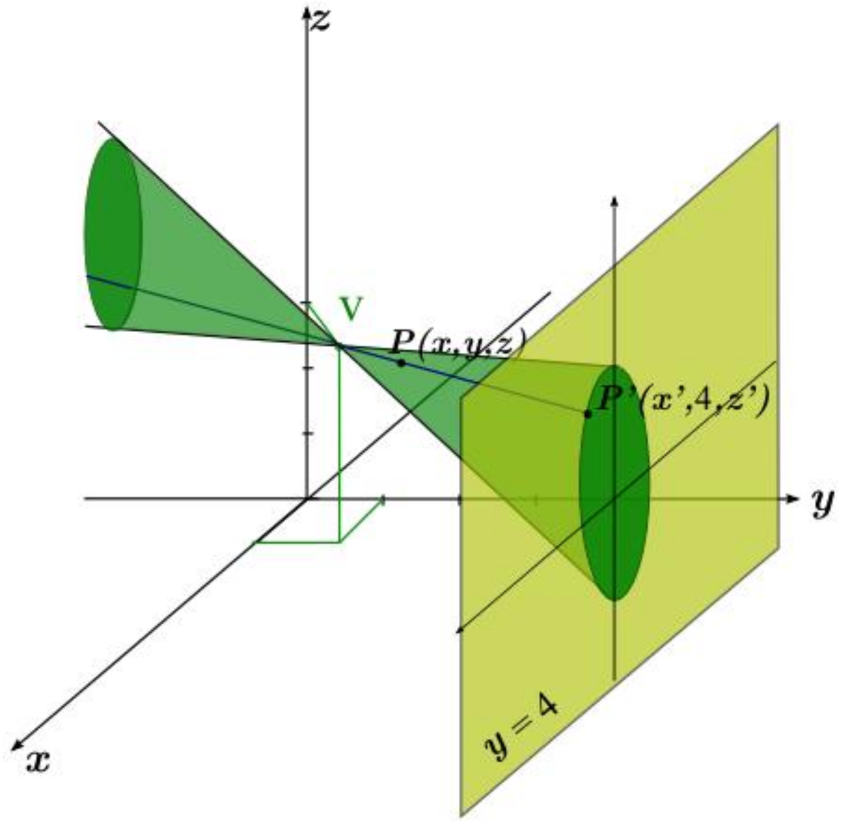


Superfície Cônica

A equação da superfície cônica cuja diretriz é a elipse

$$4x^2 + z^2 = 1 \quad \text{e} \quad y = 4$$

e cujo vértice é o ponto V(1,1,3).



A equação da superfície é:

$$36x^2 + 12y^2 + 9z^2 + 24xy + 18yz - 96x - 102y - 72z + 207 = 0$$

QUÁDRICAS

Vimos que as seções cônicas são representadas por equação do segundo grau nas variáveis x e y (parábola, hipérbole, elipse e casos degenerados como pontos, um par de retas, retas e o conjunto vazio)

QUÁDRICAS

Vimos que as seções cônicas são representadas por equação do segundo grau nas variáveis x e y (parábola, hipérbole, elipse e casos degenerados como pontos, um par de retas, retas e o conjunto vazio)

No espaço tridimensional a equação geral do segundo grau é:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (*)$$

onde pelo menos um dos coeficientes A, B, D, E ou F é não nulo.

Uma superfície cuja equação é da forma (*) é denominada superfície quádrica ou simplesmente quádrica.

QUÁDRICAS

Vimos alguns exemplos:

$x^2 + z^2 - 9 = 0$ cilindro circular reto,

$9x^2 + z^2 - 6xz - 36y + 12z = 0$ superfície cilíndrica obliqua,

$36x^2 + 12y^2 + 9z^2 + 24xy + 18yz - 96x - 102y - 72z + 207 = 0$ superfície cônica

QUÁDRICAS

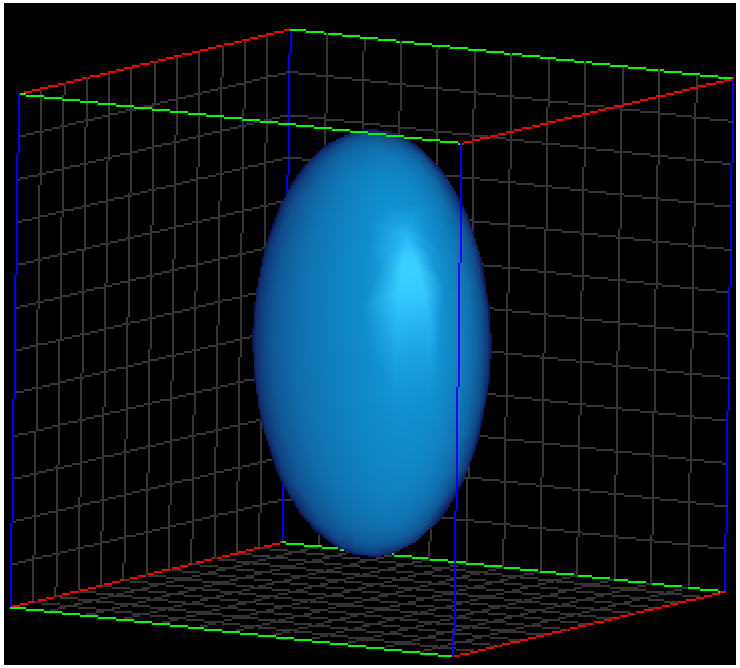
Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Forma canônica do elipsóide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

Exemplo:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$$



QUÁDRICAS

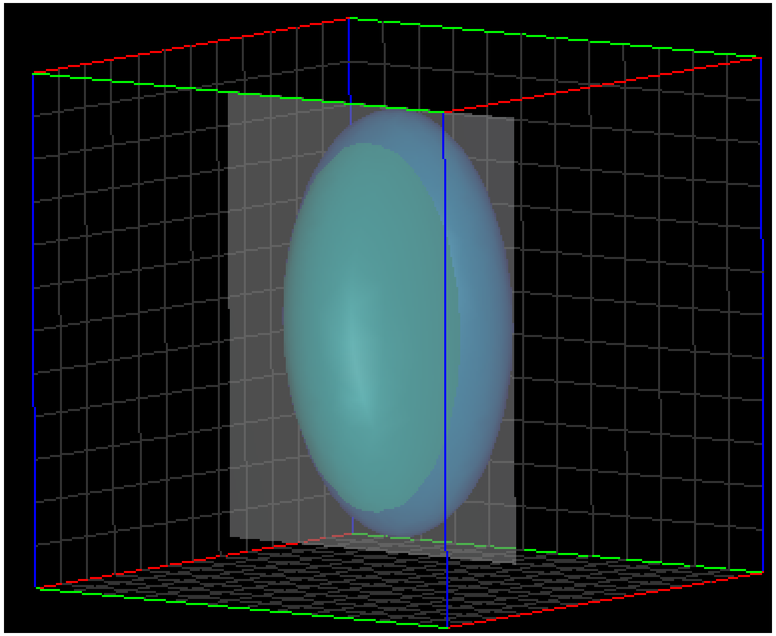
Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Forma canônica do elipsóide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \ a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

Exemplo:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$$



Observe na figura o plano: $x = 1$

A curva de interseção é a elipse:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{25} = 1 - \dfrac{1}{4} \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{25} = \dfrac{3}{4} \\ x = 1 \end{cases}$$

QUÁDRICAS

Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Forma canônica do elipsóide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

Exemplo:

Se $a = b = c = R$

temos a esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Exercício: Faça a esboço da superfície da esfera.

QUÁDRICAS

Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Forma canônica do elipsóide:

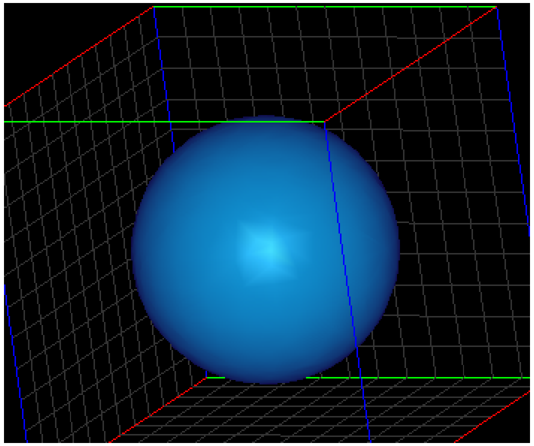
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \; a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

Exemplo:

Se $a = b = c = R$

temos a esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



Exercício: Faça a esboço da superfície da esfera.

Quádricas

Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Forma canônica do hiperbolóide de uma folha :

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad , \quad a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad , \quad a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad , \quad a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

Quádricas

Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Forma canônica do hiperbolóide de uma folha :

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \; a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

Exemplo:

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$$

QUÁDRICAS

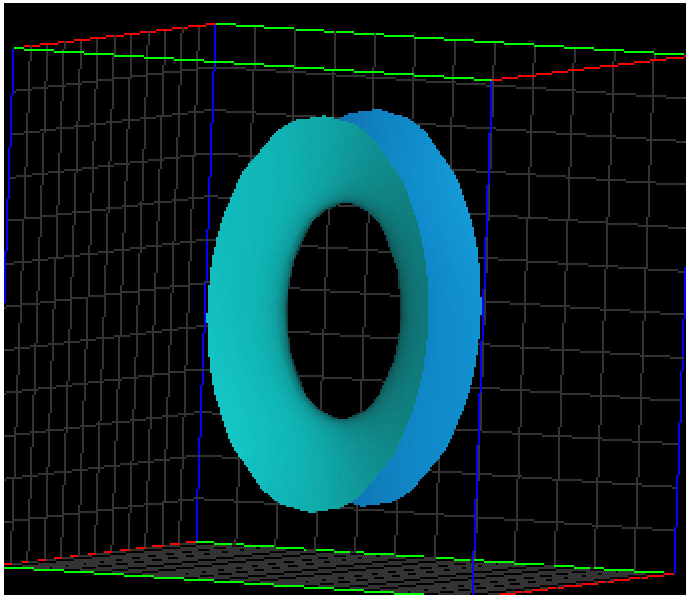
Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Forma canônica do hiperbolóide de uma folha :

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \ a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

Exemplo:

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$$



Quádricas

Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Forma canônica do hiperbolóide de uma folha :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

Exemplo:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$$

Quádricas

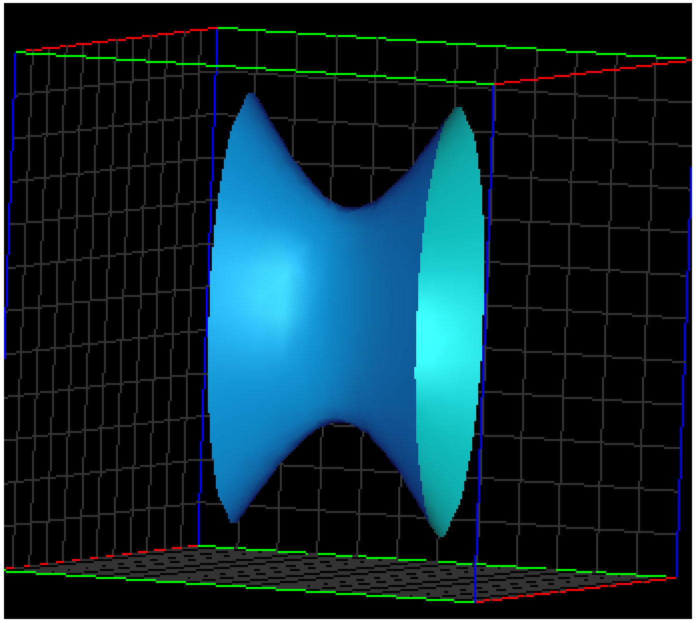
Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Forma canônica do hiperbolóide de uma folha :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \; a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

Exemplo:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$$



QUÁDRICAS

Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Forma canônica do hiperbolóide de uma folha :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

Exemplo:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1$$

QUÁDRICAS

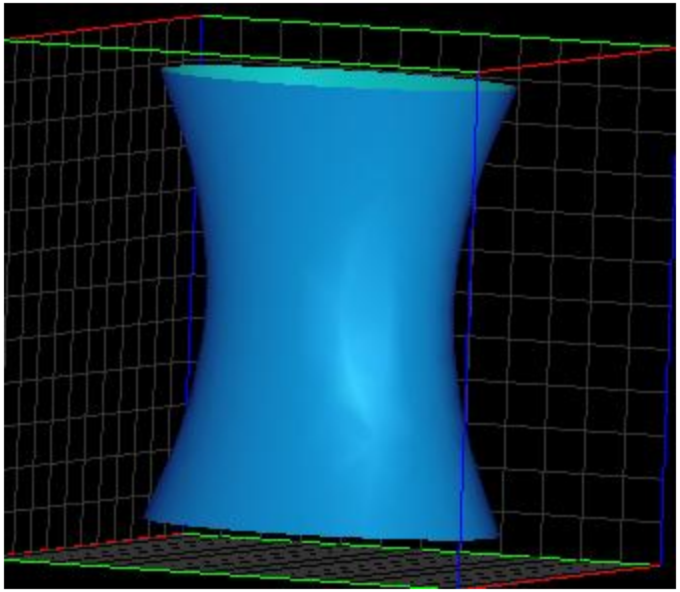
Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Forma canônica do hiperbolóide de uma folha :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

Exemplo:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1$$



QUÁDRICAS

Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Forma canônica do hiperbolóide de duas folhas :

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

QUÁDRICAS

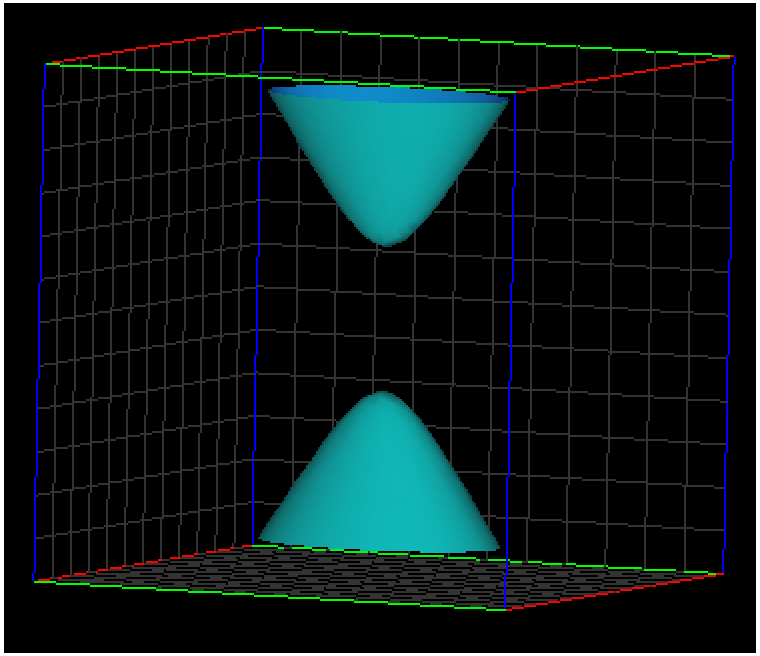
Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Forma canônica do hiperbolóide de duas folhas :

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \; a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

Exemplo:

$$-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$$



QUÁDRICAS

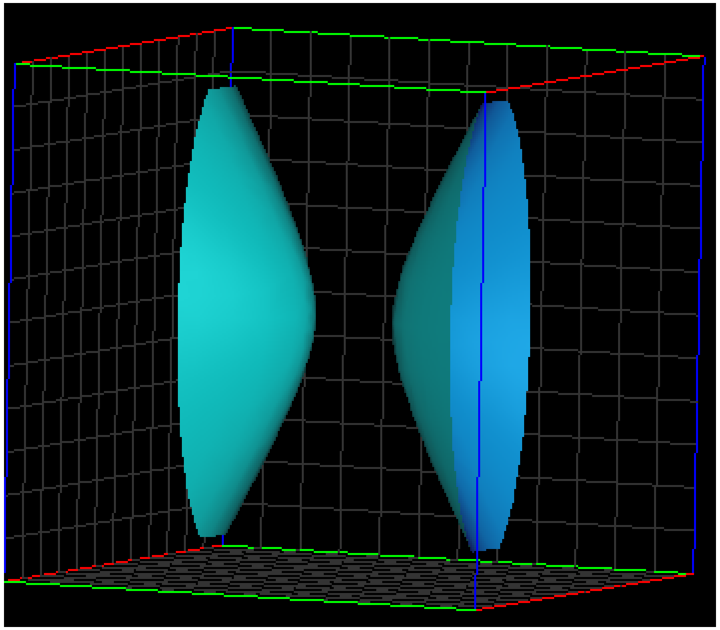
Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Forma canônica do hiperbolóide de duas folhas :

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \; a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

Exemplo:

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1$$



QUÁDRICAS

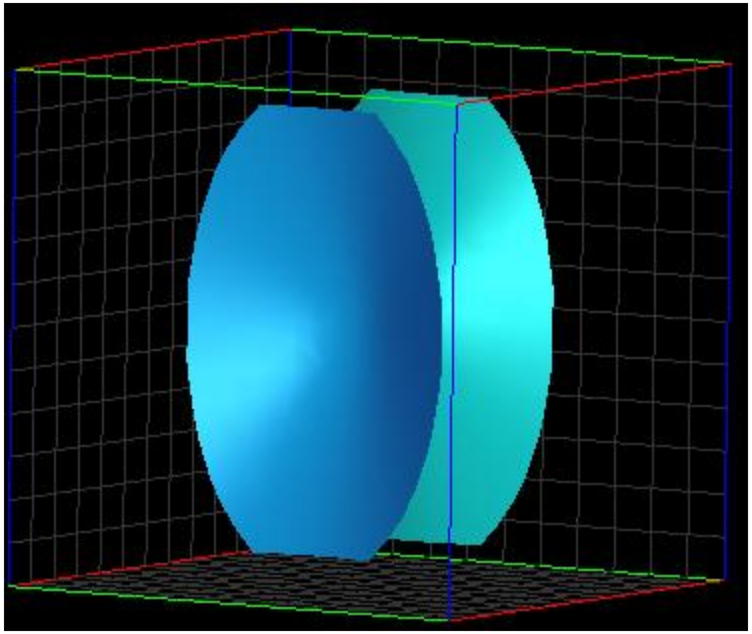
Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Forma canônica do hiperbolóide de duas folhas :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \; a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

Exemplo:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 1$$



Quádricas

Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Forma canônica do cone elíptico ou superfície cônica reta:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad , \quad a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad , \quad a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad , \quad a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

Quádricas

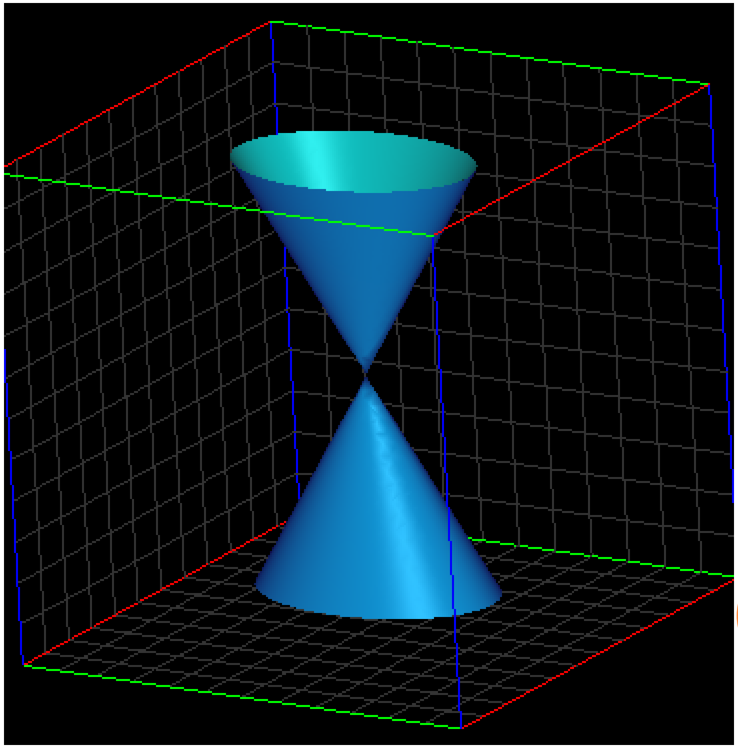
Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Forma canônica do cone elíptico ou superfície cônica reta:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad , \quad a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

Exemplo:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 0$$



QUÁDRICAS

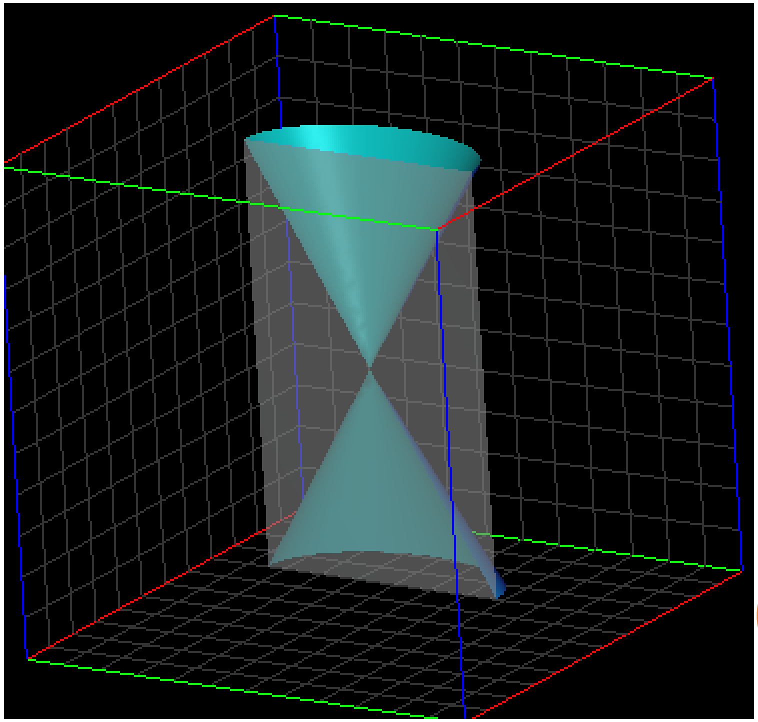
Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Forma canônica do cone elíptico ou superfície cônica reta:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad , \quad a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

Exemplo:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} = 0$$



Observe que a interseção do plano x=0

com a superfície resulta nas retas:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{25} = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3z}{5} \text{ e } y = -\dfrac{3z}{5} \\ x = 0 \end{cases}$$

Quádricas

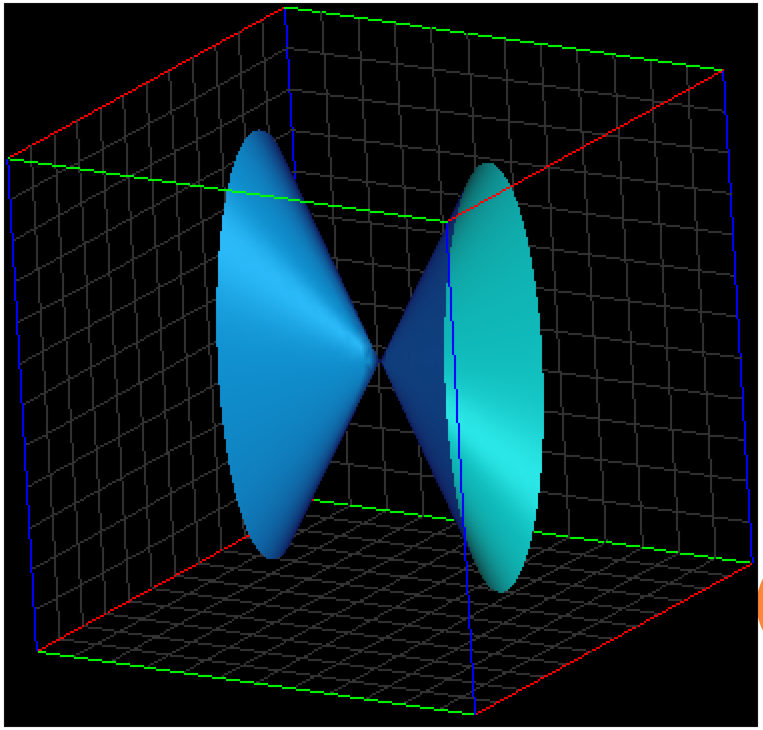
Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Forma canônica do cone elíptico ou superfície cônica reta:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad , \quad a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

Exemplo:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 0$$



QUÁDRICAS

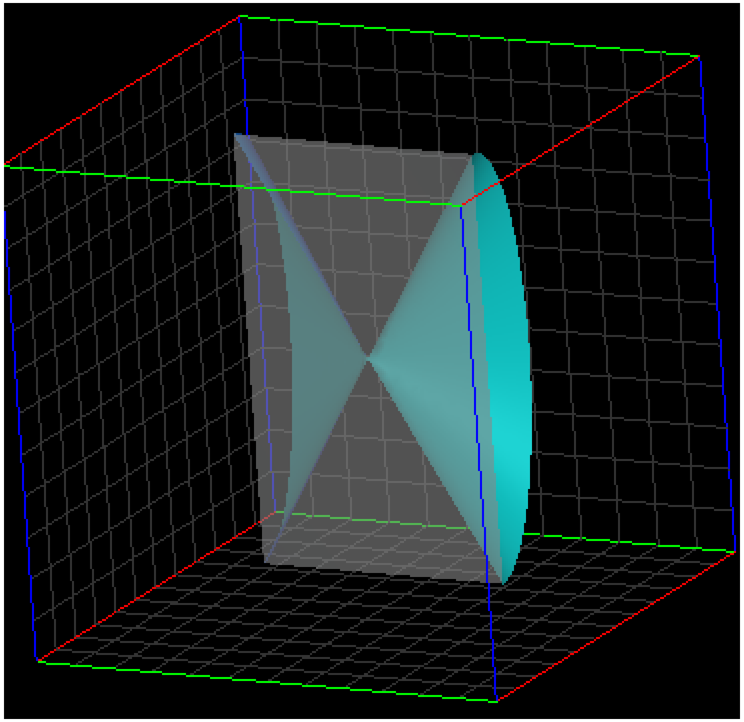
Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Forma canônica do cone elíptico ou superfície cônica reta:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad , \quad a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

Exemplo:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 0$$



Observe que a interseção do plano x=0 com a superfície resulta nas retas:

$$\begin{cases} -\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3z}{5} \text{ e } y = -\frac{3z}{5} \\ x = 0 \end{cases}$$

QUÁDRICAS

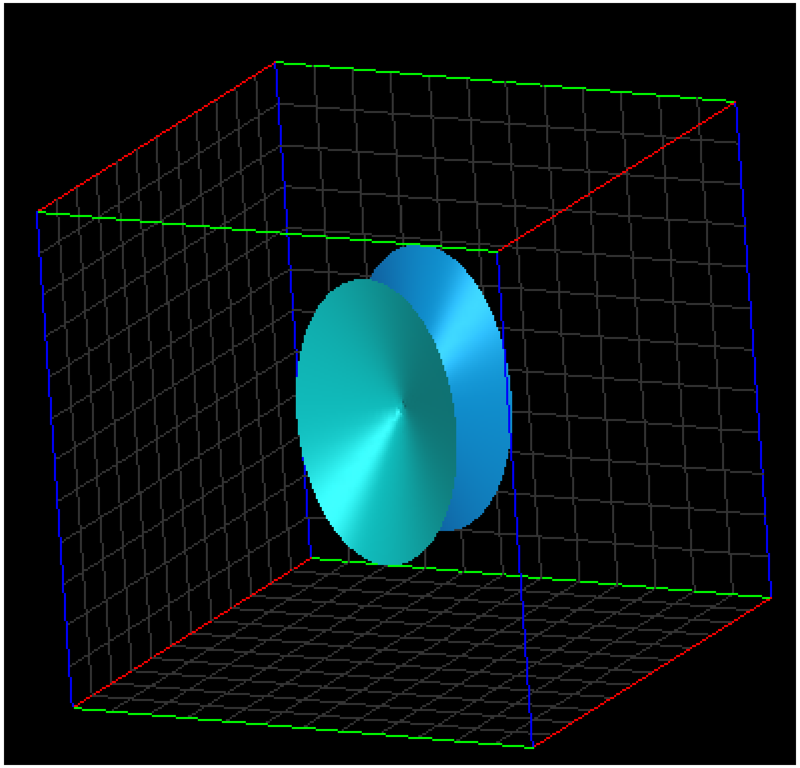
Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Forma canônica do cone elíptico ou superfície cônica reta:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad , \quad a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

Exemplo:

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 0$$



QUÁDRICAS

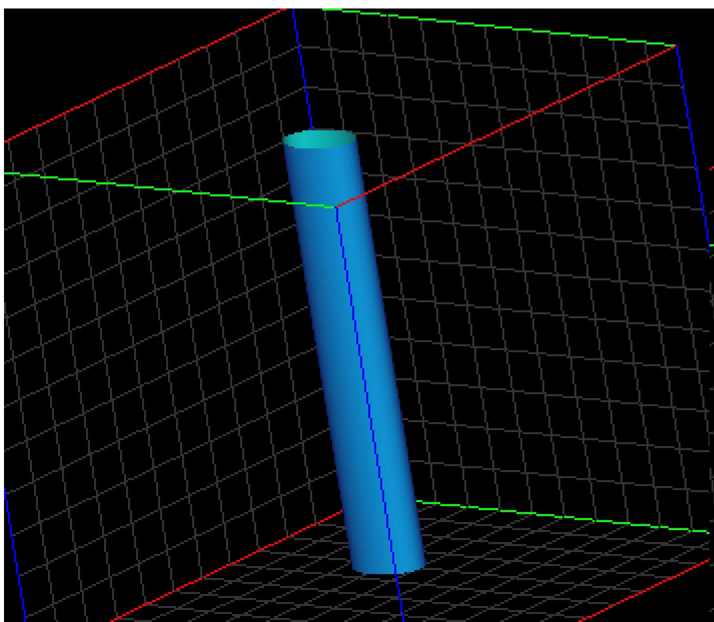
Superfícies quádricas cêntricas : $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$$

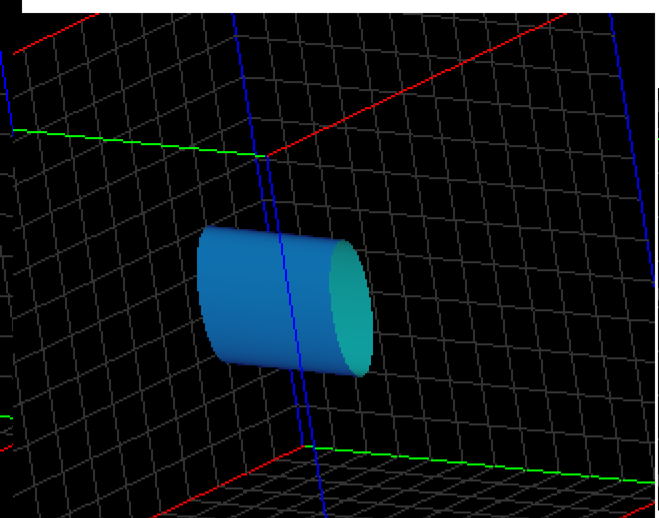
1) superfície cilíndrica elíptica reta :

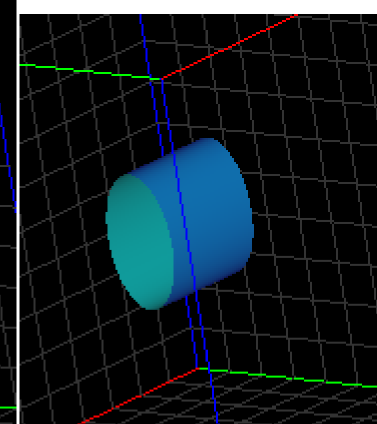
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, a e b não nulos

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, a e c não nulos

$\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, b e c não nulos





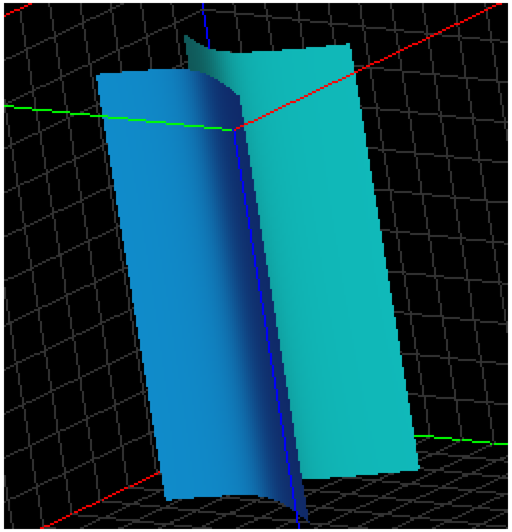


QUÁDRICAS

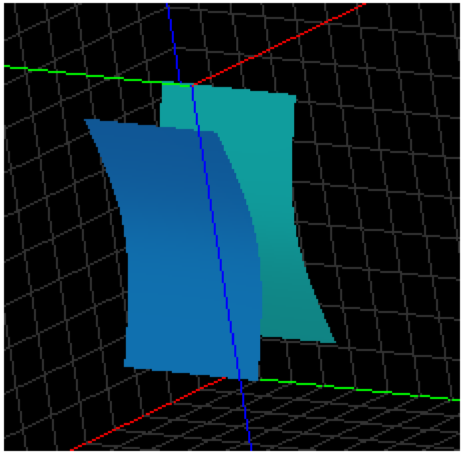
Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) superfície cilíndrica hiperbólica reta :

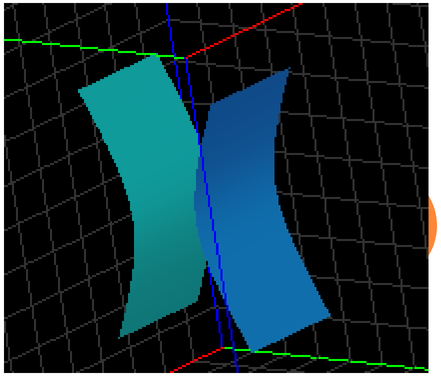
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, a e b não nulos



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, a e c não nulos



$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, b e c não nulos

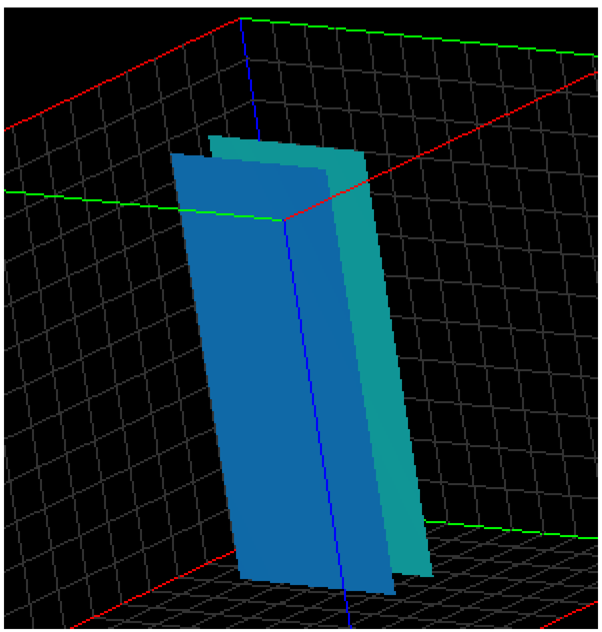


Quádricas

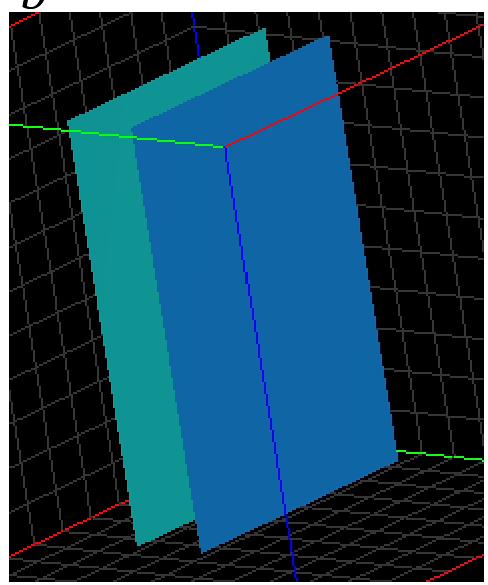
Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Dois planos distintos paralelos:

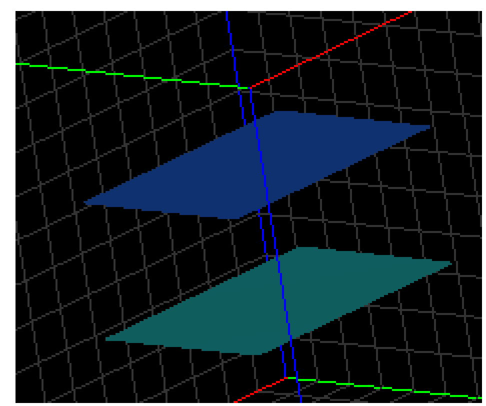
$\dfrac{x^2}{a^2} = 1$, a não nulo



$\dfrac{y^2}{b^2} = 1$, c não nulo



$\dfrac{z^2}{c^2} = 1$, b não nulo

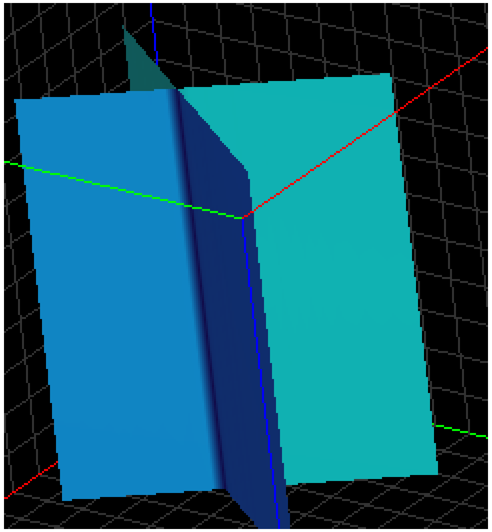


Quádricas

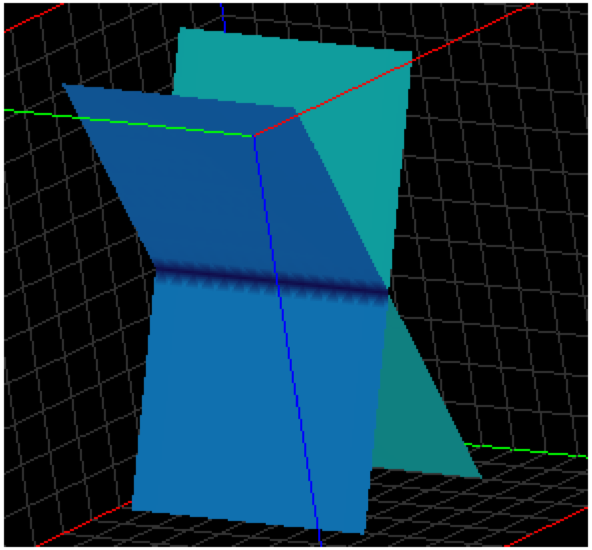
Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Dois planos que se interceptam:

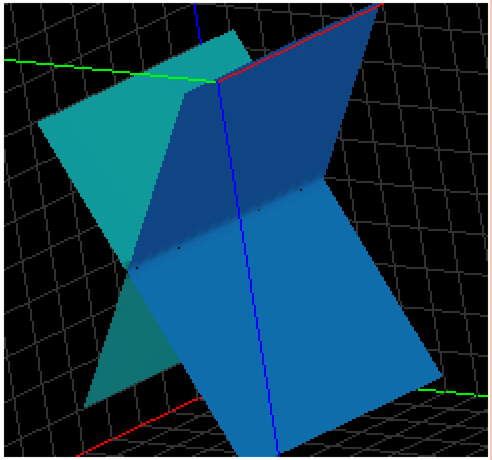
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,\ a$ e b não nulos



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,\ a$ e c não nulos



$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,\ b$ e c não nulos



QUÁDRICAS

Superfícies quádricas cêntricas : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = R$

1) Não há solução: alguns exemplos

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad a, b \text{ e } c \text{ não nulos}$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad a \text{ e } b \text{ não nulos}$$

$$-\frac{z^2}{c^2} = 1 \quad , \quad c \text{ não nulo}$$

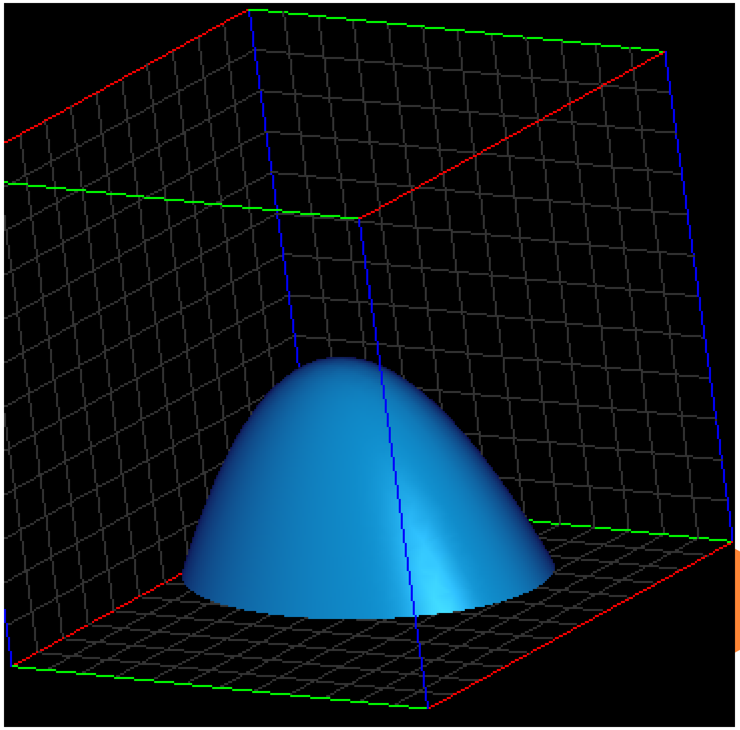
QUÁDRICAS

Superfícies quádricas não cêntricas : $Ax^2 + By^2 = Sz$

1) Forma canônica do parabolóide elíptico:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = Sz \quad , \quad a, b \text{ e } S \text{ não nulos}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 4z$$



QUÁDRICAS

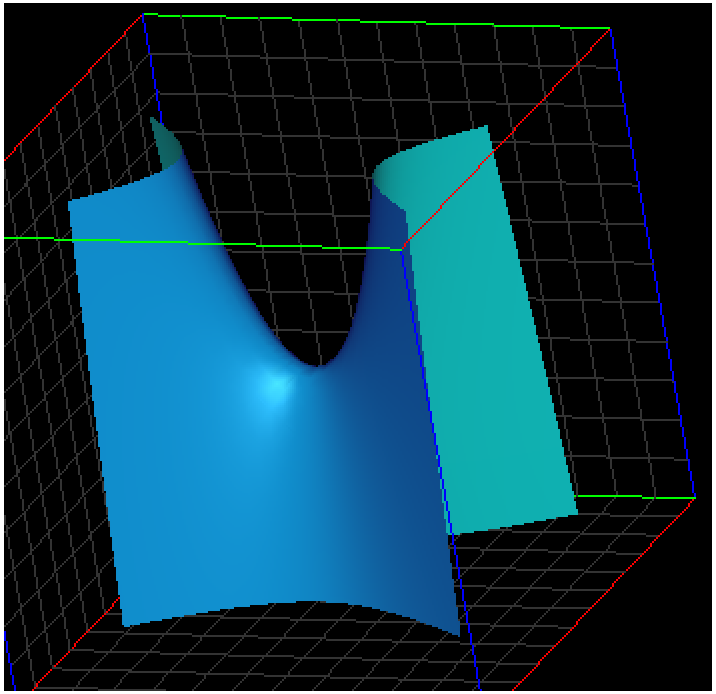
Superfícies quádricas não cêntricas : $Ax^2 + By^2 = Sz$

1) Forma canônica do parabolóide hiperbólico:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = Sz \quad , \quad a, b \text{ e } S \text{ não nulos}$$

Exemplo:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 2z$$



QUÁDRICAS

Superfícies quádricas não cêntricas : $Ax^2 + By^2 = Sz$

1) Forma canônica do parabolóide hiperbólico:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = Sz \quad , \quad a, b \text{ e } S \text{ não nulos}$$

Exemplo:

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{z}{3}$$