

Lista de Exercícios - Retas no espaço e ângulos

1. Ache o ângulo entre os planos  $-y + 1 = 0$  e  $y + z + 2 = 0$ .
2. Seja  $\alpha$  o plano que passa pelos pontos  $A(1, 1, 1), B(1, 0, 1), C(1, 1, 0)$  e  $\beta$  o plano que passa pelos pontos  $P(0, 0, 1), Q(0, 0, 0)$  e é paralelo ao vetor  $\vec{i} + \vec{j}$ . Ache o ângulo entre  $\alpha$  e  $\beta$ .
3. Encontre o ângulo entre o plano  $2x - y + z = 0$  e o plano que passa pelo ponto  $P(1, 2, 3)$  e é perpendicular ao vetor  $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ .
4. Escreva a equação paramétrica da reta passando por  $P_1(1, 0, 1)$  e  $P_2(2, 1, 0)$ , encontre o ponto médio do segmento e faça um esboço da reta.
5. Mostre que as equações paramétricas  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 6t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$  e  $\begin{cases} x = 2 + s \\ y = 5 + 3s \\ z = 5 + 2s \end{cases}$  com  $t \in \mathbb{R}$  e  $s \in \mathbb{R}$ , parametrizam uma mesma reta.
6. Determine as equações paramétricas da reta definida pelos pontos:  
(a)  $A(2, 1, 3)$  e  $B(1, 3, 7)$ ;      (b)  $A(0, 0, 0)$  e  $B(0, 5, 0)$ ;      (c)  $A(1, 1, 0)$  e  $B(2, 2, 0)$ .
7. Determine as equações paramétricas da reta que contém o ponto  $A(2, 1, 0)$  e é perpendicular ao plano  $2x - y + z = 0$ .
8. Dados  $A(2, 1, 3), B(4, 1, 1)$  e  $C(0, 0, 0)$ , determine as equações paramétricas da reta que contém a mediana, relativa ao lado  $AB$ , do triângulo  $ABC$ .
9. Encontre as equações paramétricas das retas passando por  $P$  e paralela a  $\vec{n}$  :  
(a)  $P(3, -1, 2); \vec{n} = (2, 1, 3)$       (b)  $P(-2, 3, -3); \vec{n} = (6, -6, -2)$   
(c)  $P(2, 2, 6); \vec{n} = (0, 1, 0)$       (d)  $P(0, 0, 0); \vec{n} = (1, -2, 3)$
10. Encontre a representação paramétrica para a interseção dos planos  $x + y + z = 1$  e  $2x - z = 3$ .
11. Seja  $A(1, 0, 2)$  e  $B(2, 1, 0)$ . Qual é o ponto que divide o segmento  $AB$  na razão de 3 para 4.
12. Ache as equações simétricas e paramétricas da reta que passa pelos pontos  $A(0, 1, 2)$  e  $B(1, 2, 1)$ .
13. Encontre a equação da reta que passa pelo ponto  $A(1, 2, 1)$  e é perpendicular ao plano  $x - y + 2z - 1 = 0$ .
14. Encontre a equação do reta que passa por  $A(1, 0, 1)$  e é paralela aos planos  $2x + 3y + z + 1 = 0$  e  $x - y + z = 0$ .
15. Encontre as equações paramétricas para a reta dado pela interseção dos planos:  
(a)  $7x - 2y + 3z = -2$  e  $-3x + y + 2z + 5 = 0$       (b)  $2x + 3y - 5z = 0$  e  $y = 0$ .
16. Calcule o ângulo entre as retas  $r_1 : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$  e  $r_2 : x - 1 = y - 1 = \sqrt{2}z$
17. Determine o ângulo entre as retas  $r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$  e  $s : \begin{cases} x = 4 + k \\ y = 2 + k \\ z = 5 + k \end{cases}$
18. Determine o ângulo da reta  $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$  com o plano  $2x - y + 2z = 1$ .
19. Determine o ângulo entre os planos  $2x - y + 3z = 0$  e  $x + y - 8z = 1$ .

**Respostas de alguns exercícios : Lista de Exercícios Retas no espaço e ângulos**

(01)  $\frac{\pi}{4}$ ; Por quê?

(02)  $\frac{\pi}{4}$ ; Por quê?

(03)  $\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{30}}\right)$ ; Por quê?

(04)  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$  Por quê?

(06) (a)  $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$  Por quê? (b)  $\begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = 0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$  Por quê? (c)  $(1 + t, 1 + t, 0) \quad t \in \mathbb{R}$

Por quê?

(07)  $(2 + 2t, 1 - t, t) \quad t \in \mathbb{R}$  Por quê?

(08)  $(3t, t, 2t) \quad t \in \mathbb{R}$  Por quê?

(09) (a)  $(3 + 2t, -1 + t, 2 + 3t) \quad t \in \mathbb{R}$  Por quê? (b)  $(-2 + 6t, 3 - 6t, -3 - 2t) \quad t \in \mathbb{R}$  Por quê?

(c)  $(2, 2 + t, 6) \quad t \in \mathbb{R}$  Por quê? (d)  $(t, -2t, 3t) \quad t \in \mathbb{R}$ ; Por quê?

Forma simétrica: (a)  $\frac{x-3}{2} = y + 1 = \frac{z-2}{3}$  (b)  $\frac{x+2}{6} = -\frac{y-3}{6} = -\frac{z+3}{2}$  (d)  $x = -\frac{y}{2} = \frac{z}{3}$  Por quê?

(10)  $(\frac{4}{3} - t, 3t, -\frac{1}{3} - 2t) \quad t \in \mathbb{R}$  Por quê?

(11)  $(\frac{7}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ , equação paramétrica da reta:  $(1 + t, t, 2 - 2t) \quad t \in \mathbb{R}$ ; Por quê?

(12)  $x = y - 1 = 2 - z$ ; equação paramétrica  $(t, 1 + t, 2 - t) \quad t \in \mathbb{R}$ ; Por quê?

(13)  $(1 + t, 2 - t, 1 + 2t) \quad t \in \mathbb{R}$ ; Por quê?

(14)  $(1 + 4t, -t, 1 - 5t) \quad t \in \mathbb{R}$ ; Por quê?

(15) (a)  $(-12 - 7t, -41 - 23t, t) \quad t \in \mathbb{R}$  (b)  $(\frac{5}{2}t, 0, t) \quad t \in \mathbb{R}$ ; Por quê?

(16)  $\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ ; Por quê?

(17)  $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ ; Por quê?

(18)  $\arccos\left(\frac{5}{\sqrt{70}}\right)$ ; Por quê?

(19)  $\arccos\left(\frac{23}{\sqrt{924}}\right)$ ; Por quê?

Bibliografia usada:

- Geometria Analítica: Reis/Silva; Ed. LTC, 2ª edição, 1996
- Geometria Analítica: Murdoch, David; Ed. LTC, 1969
- Vetores e Matrizes, Nathan Moreira dos Santos Ed Ao Livro Técnico S.A., 1972.
- Cálculo Diferencial a Várias Variáveis: Uma Introdução à Teoria de Otimização; H. J. Bortolossi, Ed. PUC-Rio, 2002.
- Álgebra Linear com Aplicações; H. Anton e C. Rorres; Ed. Bookman, 8ª edição