Capítulo 20

Superfícies Quádricas

Em capítulos anteriores, estudamos as cônicas, curvas dadas por uma equação de segundo grau nas variáveis x e y.

Uma *quádrica* é uma superfície cuja equação cartesiana é uma equação de segundo grau nas variáveis x, y e z, isto é, uma equação da forma:

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0\,,} \quad (1)$$

onde A, B, C, D, E, F, G, H, I e J são números reais, sendo não nulo pelo menos um dos coeficientes A, B, C, D, E e F.

Além das superfícies quádricas, a equação acima também pode representar:

- o conjunto vazio,
- um ponto,
- uma reta,
- um plano,
- um par de planos paralelos,
- um par de planos concorrentes.

Estes conjuntos são denominados de *quádricas degeneradas*.

Estudaremos apenas as *quádricas na forma canônica*, visto que o estudo geral das superfícies dadas pela equação (1) é mais adequado num curso de Álgebra Linear.

Para estudarmos as superfícies quádricas, determinaremos as seções planas $\mathcal{Q} \cap \pi$ destas superfícies, onde π é um plano paralelo a um dos planos coordenados.

Além disso, analisaremos as simetrias das quádricas em relação aos planos coordenados e em relação à origem.

Sabemos que um conjunto $\mathcal{Q}$ é simétrico em relação:

- ao plano XY quando: $(x, y, z) \in \mathcal{Q} \Longleftrightarrow (x, y, -z) \in \mathcal{Q}$;
- ao plano XZ quando: $(x, y, z) \in \mathcal{Q} \Longleftrightarrow (x, -y, z) \in \mathcal{Q}$;
- ao plano YZ quando: $(x, y, z) \in \mathcal{Q} \Longleftrightarrow (-x, y, z) \in \mathcal{Q}$;
- à origem quando: $(x, y, z) \in \mathcal{Q} \Longleftrightarrow (-x, -y, -z) \in \mathcal{Q}$;

É fácil verificar que se o conjunto $\mathcal{Q}$ é simétrico em relação aos planos XY, XZ e YZ, então é simétrico em relação à origem.

1. Elipsoide

Um *elipsoide* na forma canônica é uma superfície dada por uma equação de segundo grau do tipo:

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

onde a, b e c são números reais positivos.

É fácil verificar que, o elipsoide $\mathcal{Q}$ é uma superfície simétrica em relação aos três planos coordenados e em relação à origem.

Observação 1

A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ é um caso particular de elipsoide no qual $a = b = c = R$.

A interseção do elipsoide $\mathcal{Q}$ com o plano $z = k$, $k \in \mathbb{R}$, paralelo ao plano XY,

$$\mathcal{Q} \cap \{z = k\} : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases},$$

é:

- uma elipse de centro $(0, 0, k)$ se $k \in (-c, c)$;

- o ponto $(0, 0, c)$ se $k = c$;
- o ponto $(0, 0, -c)$ se $k = -c$;
- o conjunto vazio se $|k| > c$.

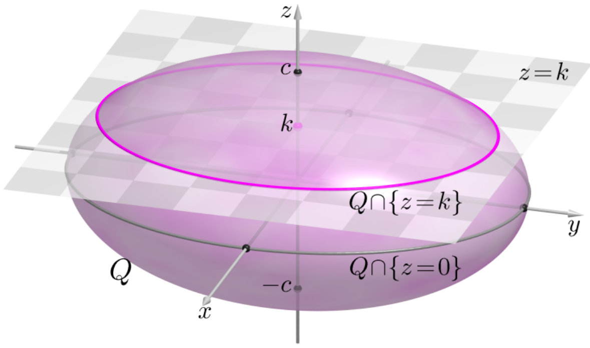

Figura 1: Interseção do plano $\{z = k\}$ com o elipsoide $\mathcal{Q}$

Por outro lado, a interseção do elipsoide $\mathcal{Q}$ com os planos paralelos ao plano XZ,

$$\mathcal{Q} \cap \{y = k\} : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases},$$

é:

- uma elipse de centro $(0, k, 0)$ se $k \in (-b, b)$;
- o ponto $(0, b, 0)$ se $k = b$;
- o ponto $(0, -b, 0)$ se $k = -b$;
- o conjunto vazio se $|k| > b$.

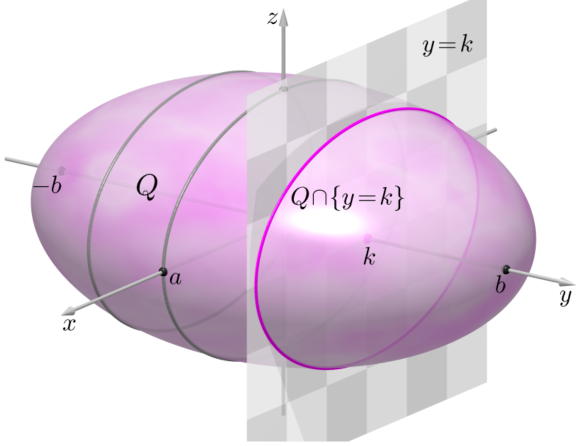

Figura 2: Interseção do plano $\{y = k\}$ com o elipsoide $\mathcal{Q}$

Finalmente, a interseção do elipsoide $\mathcal{Q}$ com os planos paralelos ao plano YZ,

$$\mathcal{Q} \cap \{x = k\} : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases},$$

é:

- $\circ$ uma elipse de centro $(k, 0, 0)$ se $k \in (-a, a)$;
- $\circ$ o ponto $(a, 0, 0)$ se $k = a$;
- $\circ$ o ponto $(-a, 0, 0)$ se $k = -a$;
- $\circ$ o conjunto vazio se $|k| > a$.

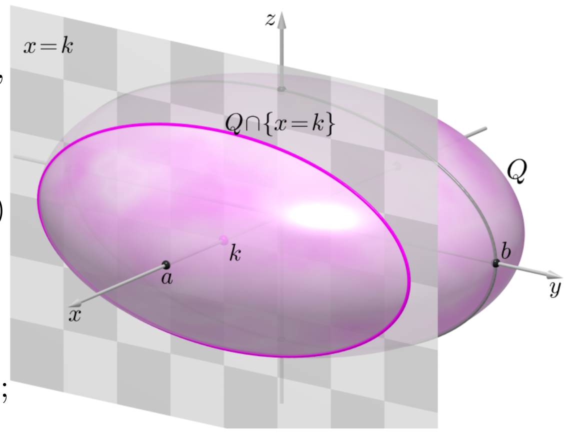

Figura 3: Interseção do plano $\{x = k\}$ com o elipsoide $\mathcal{Q}$

Exemplo 1

Mostre que nenhuma reta está contida num elipsoide.

Solução.
De fato, seja

$$r : \begin{cases} x(t) = \alpha t + x_0 \\ y(t) = \beta t + y_0 \\ z(t) = \gamma t + z_0 \end{cases} ; \, t \in \mathbb{R},$$

uma reta que passa por um ponto (x_0, y_0, z_0) pertencente a $\mathcal{Q}$, e que é paralela ao vetor $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$. Então,

$$\begin{aligned} & (\alpha\, t + x_0, \beta\, t + y_0, \gamma\, t + z_0) \in \mathcal{Q} \\ \Longleftrightarrow\; & \frac{(\alpha\, t + x_0)^2}{a^2} + \frac{(\beta\, t + y_0)^2}{b^2} + \frac{(\gamma\, t + z_0)^2}{c^2} = 1 \\ \Longleftrightarrow\; & \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right) t^2 + 2\left(\frac{\alpha x_0}{a^2} + \frac{\beta y_0}{b^2} + \frac{\gamma z_0}{c^2}\right) t + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1 \\ \Longleftrightarrow\; & \left(\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right) t + 2\left(\frac{\alpha x_0}{a^2} + \frac{\beta y_0}{b^2} + \frac{\gamma z_0}{c^2}\right)\right) t = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

pois $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} + \dfrac{z_0^2}{c^2} = 1$, uma vez que $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{Q}$.

Como

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}>0\,,$$

a equação (2) possui no máximo duas soluções:

$$t=0 \qquad \text{ou} \qquad t=\frac{-2\left(\dfrac{\alpha x_0}{a^2}+\dfrac{\beta y_0}{b^2}+\dfrac{\gamma z_0}{c^2}\right)}{\dfrac{\alpha^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}+\dfrac{\gamma^2}{c^2}}\,.$$

□

Observação 2

Provamos assim ,que nenhuma reta, que passa por um ponto do elipsoide, está inteiramente contida no elipsoide.

2. Hiperboloide de uma Folha

Os *hiperboloides de uma folha* na forma canônica de eixo$-OX$, eixo$-OY$ e eixo$-OZ$ são as superfícies dadas, respectivamente, pelas equações de segundo grau abaixo:

$$\boxed{\begin{aligned} -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} &= 1\,,\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} &= 1\,,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} &= 1\,,\end{aligned}}$$

onde a, b e c são números reais positivos.

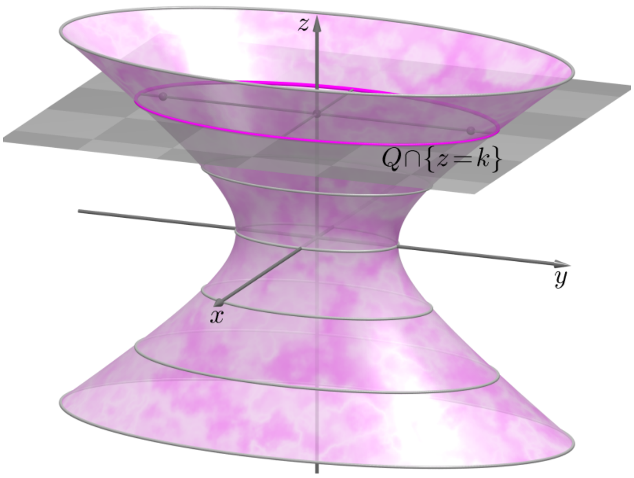

Figura 4: $\mathcal{Q}\cap\{z=k\}$ é uma elipse de centro $(0,0,k)$ no plano $z=k$

É fácil ver que os hiperboloides de uma folha na forma canônica são simétricos em relação aos três planos coordenados e à origem.

Vamos analisar o hiperboloide de uma folha na forma canônica de eixo$-OZ$:

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,.$$

A interseção de $\mathcal{Q}$ com o plano $z = k$, paralelo ao plano XY,

$$\mathcal{Q} \cap \{z = k\} : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{k^2}{c^2} + 1 \\ z = k \end{cases},$$

é uma elipse de centro $(0, 0, k)$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, as seções planas,

$$\mathcal{Q} \cap \{x = k\} : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{a^2} = \dfrac{a^2 - k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases},$$

são, para:

- $k \in (-a, a)$, hipérboles

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(\dfrac{a^2-k^2}{a^2}\right)} - \dfrac{z^2}{c^2\left(\dfrac{a^2-k^2}{a^2}\right)} = 1 \\ x = k \end{cases}$$

de centro no ponto $(k, 0, 0)$, reta focal paralela ao eixo$-OY$ e assíntotas $\begin{cases} z = \pm\dfrac{c}{b}\,y \\ x = k \end{cases}$, pois $\dfrac{a^2 - k^2}{a^2} > 0$;

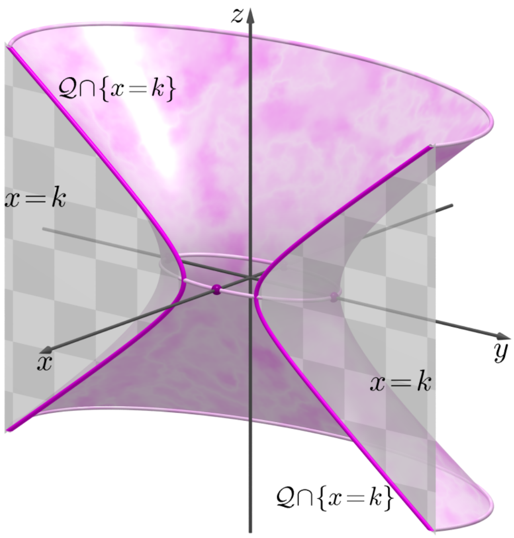

Figura 5: Hipérbole de centro $(k, 0, 0)$ no plano $x = k$, obtida como a interseção $\mathcal{Q} \cap \{x = k\}$

- $k = a$, duas retas $\begin{cases} y = \pm\dfrac{b}{c}\,z \\ x = a \end{cases}$ concorrentes que se intersectam no ponto $(a, 0, 0)$;

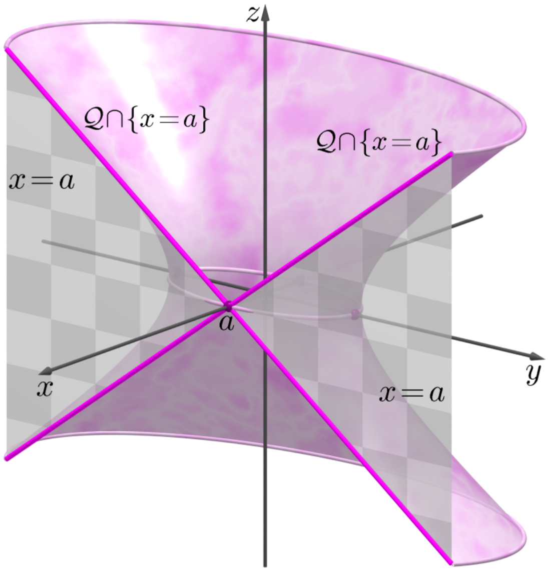

Figura 6: Retas concorrentes no ponto $(a, 0, 0)$, obtidas como a interseção $\mathcal{Q} \cap \{x = a\}$

- $k = -a$, duas retas $\begin{cases} y = \pm\dfrac{b}{c}\,z \\ x = -a \end{cases}$ concorrentes que se intersectam no ponto $(-a, 0, 0)$;

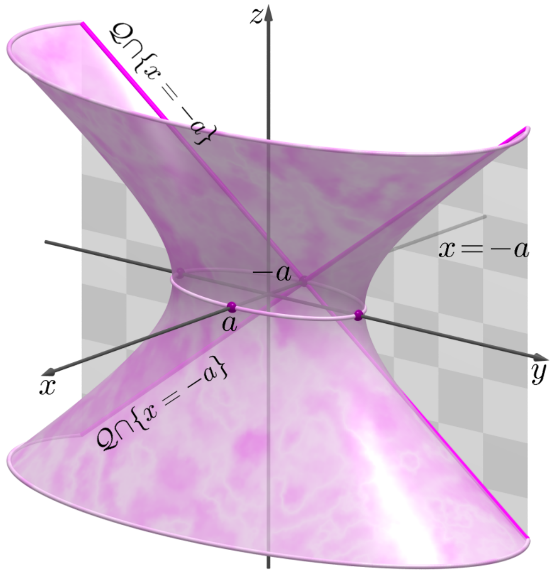

Figura 7: Retas concorrentes no ponto $(-a, 0, 0)$, obtidas como a interseção $\mathcal{Q} \cap \{x = -a\}$

• $|k| > a$, hipérboles

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2\left(\dfrac{k^2-a^2}{a^2}\right)} - \dfrac{y^2}{b^2\left(\dfrac{k^2-a^2}{a^2}\right)} = 1 \\ x = k \end{cases}$$

de centro $(k, 0, 0)$, reta focal paralela ao eixo$-OZ$ e assíntotas $\begin{cases} y = \pm\dfrac{b}{c}\,z \\ x = k \end{cases}$,

pois $\dfrac{k^2-a^2}{a^2} > 0$.

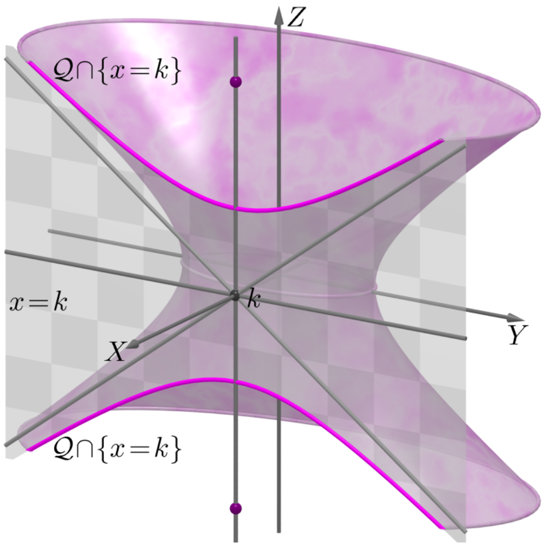

Figura 8: Interseção $\mathcal{Q} \cap \{x = k\}$ para $|k| > a$

Finalmente, a interseção de $\mathcal{Q}$ com os planos $y = k$, paralelos ao plano XZ,

$$\mathcal{Q} \cap \{y = k\} : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{k^2}{b^2} = \dfrac{b^2-k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases},$$

nos dá, para:

• $k \in (-b, b)$, uma hipérbole de centro $(0, k, 0)$, reta focal paralela ao eixo$-OX$ e assíntotas $\begin{cases} z = \pm\dfrac{c}{a}\,x \\ y = k \end{cases}$, uma vez que $\dfrac{b^2-k^2}{b^2} > 0$;

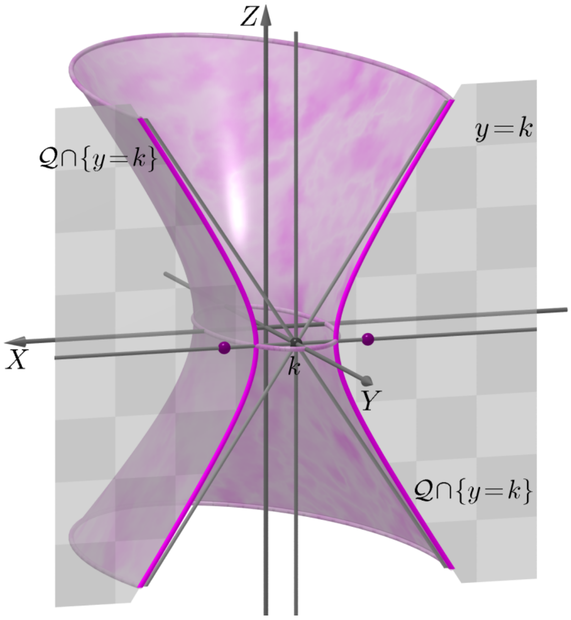

Figura 9: Interseção $\mathcal{Q} \cap \{y = k\}$ para $-b < k < b$

- $k = b$, duas retas $\begin{cases} z = \pm\dfrac{c}{a}\,x \\ y = b \end{cases}$ que se cortam no ponto $(0, b, 0)$;

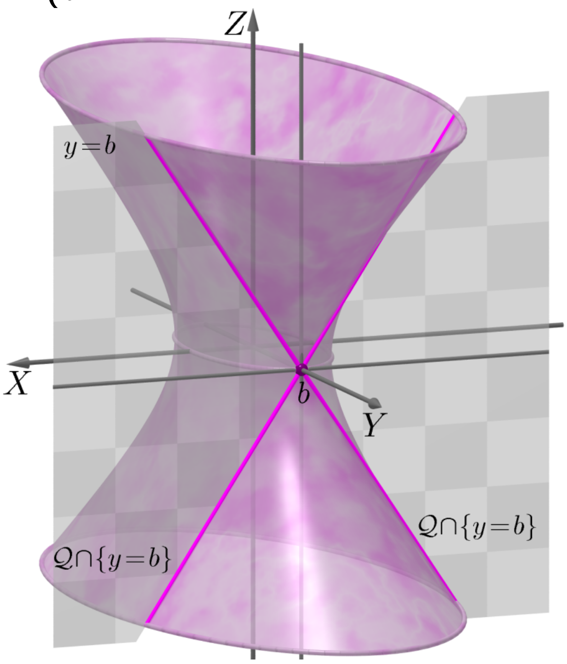

Figura 10: Interseção $\mathcal{Q} \cap \{y = b\}$

- $k = -b$, duas retas $\begin{cases} z = \pm\dfrac{c}{a}\,x \\ y = -b \end{cases}$ que se cortam no ponto $(0, -b, 0)$;

- $|k| > b$, uma hipérbole

$$\mathcal{Q} \cap \{y = k\} : \begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2\left(\dfrac{k^2 - b^2}{b^2}\right)} - \dfrac{x^2}{a^2\left(\dfrac{k^2 - b^2}{b^2}\right)} = 1 \\ y = k \end{cases}$$

de centro $(0, k, 0)$, reta focal paralela ao eixo$-OZ$ e assíntotas $\begin{cases} x = \pm\dfrac{a}{c}\,z \\ y = k \end{cases}$,

pois $\dfrac{k^2 - b^2}{b^2} > 0$.

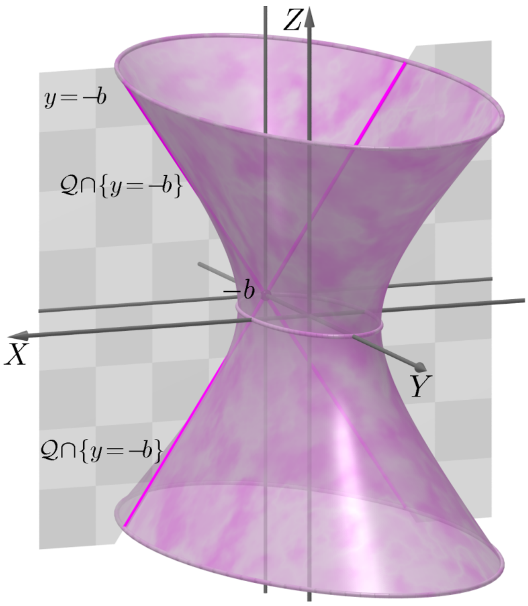

Figura 11: Interseção $\mathcal{Q} \cap \{y = k\}$ para $k = -b$

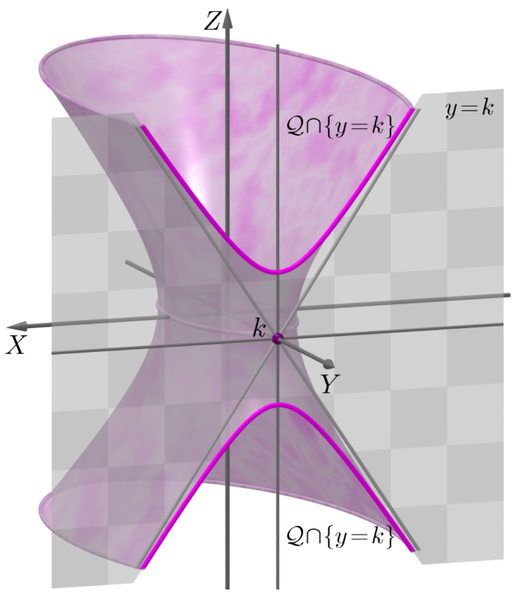

Figura 12: Interseção $\mathcal{Q} \cap \{y = k\}$ para $k > b$

Exemplo 2

Considere o hiperboloide de uma folha de eixo$-OY$:

$$\mathcal{S} : 4x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 4\,.$$

Determine as retas contidas em $\mathcal{S}$ que passam pelo ponto $P = (1, 2, 1) \in \mathcal{S}$.

Solução.

Seja $r = \{(at+1, bt+2, ct+1)\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ uma reta paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ que passa pelo ponto $P = (1, 2, 1)$.

Então $r \in \mathcal{S}$ se, e só se,

$$\begin{aligned}
& 4(at+1)^2 - \frac{(bt+2)^2}{4} + (ct+1)^2 = 4 \\
\iff\ & \left(4a^2 - \frac{b^2}{4} + c^2\right) t^2 + (8a - b + 2c)t + 4 - \frac{4}{4} + 1 - 4 = 0 \\
\iff\ & t\left[\left(4a^2 - \frac{b^2}{4} + c^2\right) t + 8a - b + 2c\right] = 0,
\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Logo,

$$\begin{array}{lllll}
 & 4a^2 - \frac{b^2}{4} + c^2 = 0 & \text{e} & 8a - b + 2c = 0 \\
\iff & 4a^2 - \frac{1}{4}(8a+2c)^2 + c^2 = 0 & \text{e} & b = 8a + 2c \\
\iff & 4a^2 - (4a+c)^2 + c^2 = 0 & \text{e} & b = 8a + 2c \\
\iff & 4a^2 - 16a^2 - 8ac = 0 & \text{e} & b = 8a + 2c \\
\iff & -8a^2 - 8ac = 0 & \text{e} & b = 8a + 2c \\
\iff & ac = -a^2 & \text{e} & b = 8a + 2c \\
\iff & a \neq 0\,,\ c = -a & \text{e} & b = 6a \\
\text{ou} & a = 0 & \text{e} & b = 2c \\
\iff & \overrightarrow{v} \parallel (1, 6, -1) & \text{ou} & \overrightarrow{v} \parallel (0, 2, 1).
\end{array}$$

Assim, $r = \{(t+1, 6t+2, -t+1)\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ e $l = \{(1, 2t+2, t+1)\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ são as retas contidas em $\mathcal{S}$ que passam pelo ponto P. $\square$

Observação 3

É possível provar que, para todo ponto P pertencente a um hiperboloide de uma folha $\mathcal{Q}$, existem exatamente duas retas contidas em $\mathcal{Q}$ que passam por P.

Exemplo 3

Mostre que a interseção do plano $\pi : 4x - 5y - 10z = 20$ com o hiperboloide *de uma folha*

$$\mathcal{S} : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$$

consiste de duas retas, e determine as equações paramétricas destas retas.

Solução.

Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1 &\iff 16x^2 - 4 \times 25z^2 = 25 \times 16 - 25y^2 \\ &\iff (4x - 10z)(4x + 10z) = 25(4 - y)(4 + y)\,. \end{aligned}$$

Logo, $(x, y, z) \in \mathcal{S} \cap \pi$ se, e só se, (x, y, z) satisfizer ao sistema:

$$\begin{cases} 4x - 5y - 10z = 20 \\ (4x - 10z)(4x + 10z) = 25(4 - y)(4 + y) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x - 10z = 20 + 5y \\ (20 + 5y)(4x + 10z) = 25(4 - y)(4 + y) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x - 10z = 20 + 5y \\ (4 + y)(4x + 10z) = 5(4 - y)(4 + y) \end{cases}$$

Portanto, se $y \neq -4$, temos que

$$4x + 10z = 20 - 5y\,,$$

ou seja, (x, y, z) pertence também ao plano $\pi' : 4x + 5y + 10z = 20$.

Assim, (x, y, z) pertence à reta

$$\ell : \begin{cases} 4x - 5y - 10z = 20 \\ 4x + 5y + 10z = 20 \end{cases},$$

que é paralela ao vetor

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 & -10 \\ 4 & 5 & 10 \end{vmatrix} = (0, -80, 40) \parallel (0, -2, 1)$$

e passa pelo ponto $(5, 0, 0)$. Então,

$$\ell = \{\, (5, -2t, t) \mid t \in \mathbb{R} \,\} \subset \mathcal{S} \cap \pi\,.$$

Agora, considere $(x, -4, z) \in \pi$.

Como $4x + 20 - 10z = 20$, obtemos que $x = \frac{5}{2}z$, ou seja, $\pi \cap \{y = -4\}$ é a reta

$$\ell' = \{\,(5t, -4, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\,\}\,.$$

Além disso, a reta ℓ' está contida em $\mathcal{S}$, pois para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{25t^2}{25} + \frac{16}{16} - \frac{4t^2}{4} = 1\,.$$

Logo $\ell' \subset \mathcal{S} \cap \pi$.

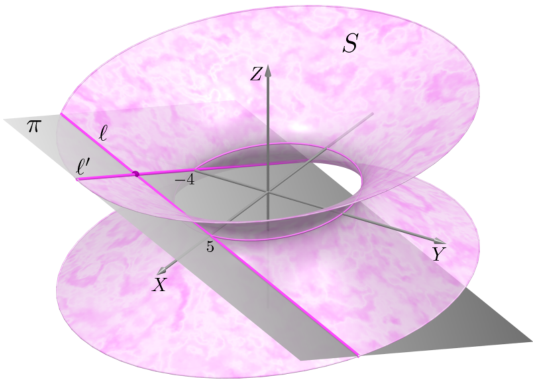

Figura 13: Hiperboloide $\mathcal{S}$, plano π e retas ℓ e ℓ'

Provamos, assim, que $\mathcal{S} \cap \pi = \ell \cup \ell'$ consiste de duas retas. □

3. Hiperboloide de duas folhas

Os *hiperboloides de duas folhas* na forma canônica de eixo$-OX$, eixo$-OY$ e eixo$-OZ$ são as quádricas definidas, respectivamente, pelas seguintes equações de segundo grau:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} & = & 1\,, \\ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} & = & 1\,, \\ -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} & = & 1\,, \end{array}}$$

onde a, b e c são números reais positivos. Estas equações são simétricas em relação aos três planos coordenados e à origem.

Vamos estudar o hiperboloide de duas folhas de eixo$-OZ$:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,.$$

A interseção de $\mathcal{Q}$ com o plano $z = k$, $k \in \mathbb{R}$, paralelo ao plano XY, é:

$$\mathcal{Q} \cap \{z = k\} : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1 = \frac{k^2 - c^2}{c^2} \\ z = k\,, \end{cases}$$

- o conjunto vazio para $k \in (-c, c)$;
- o ponto $(0,0,c)$ para $k = c$;
- o ponto $(0,0,-c)$ para $k = -c$;
- a elipse

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(\dfrac{k^2-c^2}{c^2}\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(\dfrac{k^2-c^2}{c^2}\right)} = 1 \\ z = k\,, \end{cases}$$

de centro $(0,0,k)$ para $k \in (-\infty, c) \cup (c, +\infty)$.

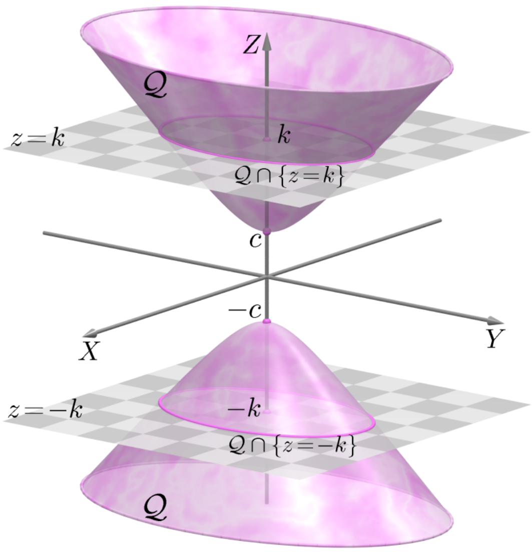

Figura 14: Interseção de $\mathcal{Q}$ com os planos z =cte.

Por outro lado, as seções planas contidas em planos paralelos ao plano XZ,

$$\mathcal{Q}\cap\{y=k\} : \begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 + \dfrac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases}$$

$$\iff \quad \mathcal{Q}\cap\{y=k\} : \begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2\left(1+\dfrac{k^2}{b^2}\right)} - \dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{k^2}{b^2}\right)} = 1 \\ y = k \end{cases},$$

são hipérboles de centro $(0,k,0)$, reta focal paralela ao eixo$-OZ$ e assíntotas

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{a}{c}\,z \\ y = k \end{cases}, \text{ pois } 1 + \frac{k^2}{b^2} > 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{R}\,.$$

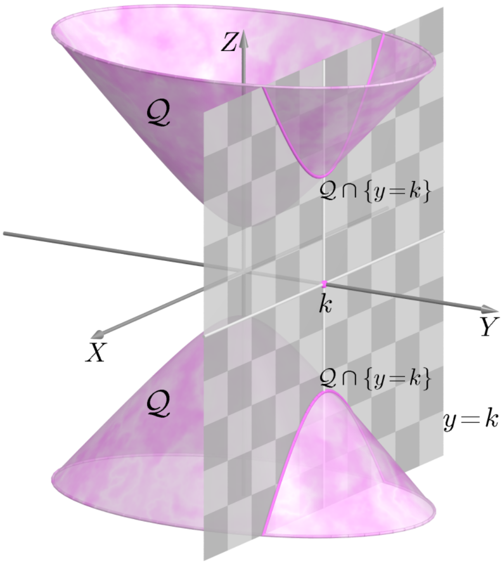

Figura 15: Interseção de $\mathcal{Q}$ com planos y =cte.

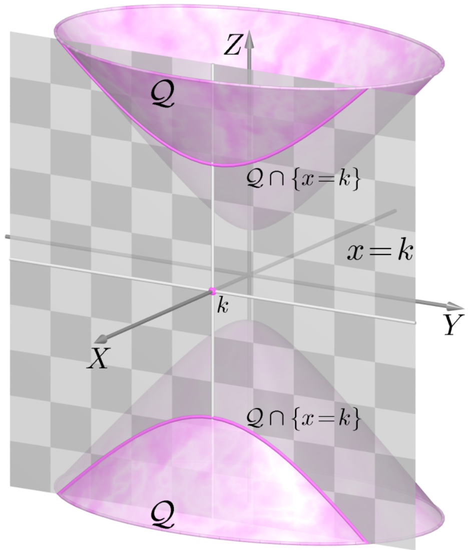

Figura 16: Interseção de $\mathcal{Q}$ com planos x =cte.

Finalmente, a interseção de $\mathcal{Q}$ com o plano $x = k$, $k \in \mathbb{R}$, paralelo ao plano YZ (figura 16),

$$\mathcal{Q} \cap \{x = k\} : \begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases}$$

$$\iff \quad \mathcal{Q} \cap \{x = k\} : \begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2\left(1 + \dfrac{k^2}{a^2}\right)} - \dfrac{y^2}{b^2\left(1 + \dfrac{k^2}{a^2}\right)} = 1 \\ x = k \end{cases},$$

é uma hipérbole de centro $(k, 0, 0)$, reta focal paralela ao eixo$-OZ$ e assíntotas $\begin{cases} y = \pm\dfrac{b}{a}z \\ x = k \end{cases}$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

Exemplo 4

Prove que nenhuma reta está contida em um hiperboloide de duas folhas.

Solução.
De fato, sejam $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{Q}$ e

$$r : \begin{cases} x(t) = \alpha t + x_0 \\ y(t) = \beta t + y_0 \\ z(t) = \gamma t + z_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

uma reta paralela ao vetor $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0).
Como $(\alpha t + x_0, \beta t + y_0, \gamma t + z_0) \in \mathcal{Q}$ se, e só se,

$$\begin{aligned} & -\frac{(\alpha t + x_0)^2}{a^2} - \frac{(\beta t + y_0)^2}{b^2} + \frac{(\gamma t + z_0)^2}{c^2} = 1 \\ \iff \; & t^2 \left(-\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right) + 2t \left(-\frac{\alpha x_0}{a^2} - \frac{\beta y_0}{b^2} + \frac{\gamma z_0}{c^2} \right) = 0\,, \end{aligned}$$

pois $-\dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{b^2} + \dfrac{z_0^2}{c^2} = 1$, obtemos que $r \subset \mathcal{Q}$ se, e só se,

$$-\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 0 \qquad (3)$$

e

$$-\frac{\alpha x_0}{a^2} - \frac{\beta y_0}{b^2} + \frac{\gamma z_0}{c^2} = 0\,.$$

Por (3), vemos que $\gamma \neq 0$. Caso contrário, teríamos $\alpha = \beta = 0$, uma contradição, visto que $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$.
Por outro lado, se $\gamma \neq 0$, a reta r intersectaria o plano XY, uma contradição, pois $r \subset \mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q} \cap$ plano $XY = \varnothing$.
Assim, provamos que uma reta intersecta o hiperboloide de duas folhas em no máximo dois pontos.

□

4. Cone Elíptico

Os cones elípticos na forma canônica de eixo$-OX$, eixo$-OY$ e eixo$-OZ$ são as superfícies dadas, respectivamente, pelas equações de segundo grau:

$$\boxed{\begin{aligned} -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} &= 0\,, \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} &= 0\,, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} &= 0\,, \end{aligned}}$$

onde a, b, c são números reais positivos.

É fácil mostrar que, os cones elípticos na forma canônica são simétricos em relação aos três planos coordenados e à origem.

Vamos analisar as seções planas do cone elíptico de eixo$-OZ$:

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\,.$$

As seções planas de $\mathcal{Q}$ em planos paralelos ao plano XY,

$$\mathcal{Q}\cap\{z=k\} : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{k^2}{c^2} \\ z=k \end{cases},$$

são elipses de centro $(0,0,k)$ se $k\neq 0$, e é a origem $(0,0,0)$ se $k=0$.

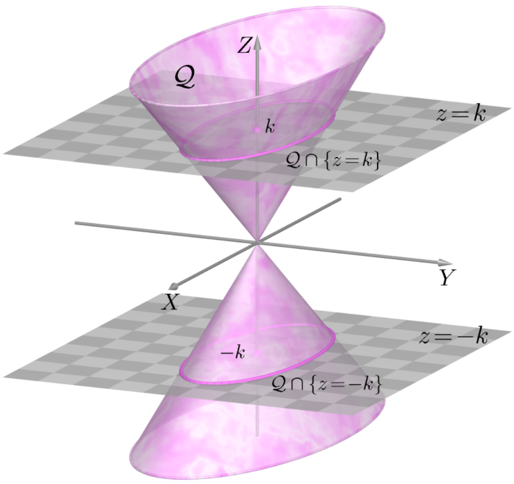

Figura 17: Interseção do cone elíptico $\mathcal{Q}$ com os planos z =cte.

A interseção de $\mathcal{Q}$ com o plano $y=k$, $k\in\mathbb{R}$, paralelo ao plano XZ,

$$\mathcal{Q}\cap\{y=k\} : \begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{k^2}{b^2} \\ y=k \end{cases},$$

é uma hipérbole de centro $(0,k,0)$, reta focal paralela ao eixo$-OZ$ e assíntotas

$$\begin{cases} x=\pm\dfrac{c}{a}\,z \\ y=k\,, \end{cases}$$

se $k\neq 0$, e um par de retas

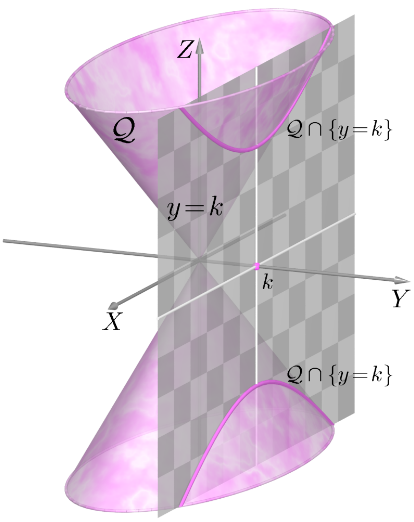

Figura 18: $\mathcal{Q}\cap\{y=k\}$, $k>0$.

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{c}{a}\, z \\ y = 0\,, \end{cases}$$

que se cortam na origem quando $k = 0$.

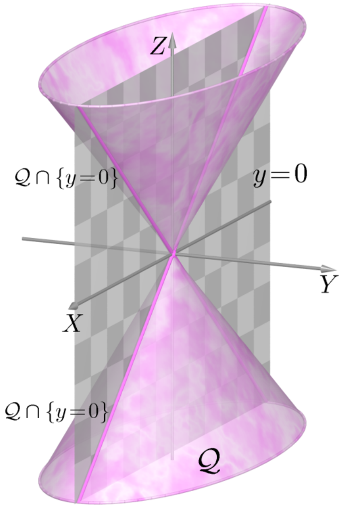

Figura 19: $\mathcal{Q} \cap \{y = 0\}$

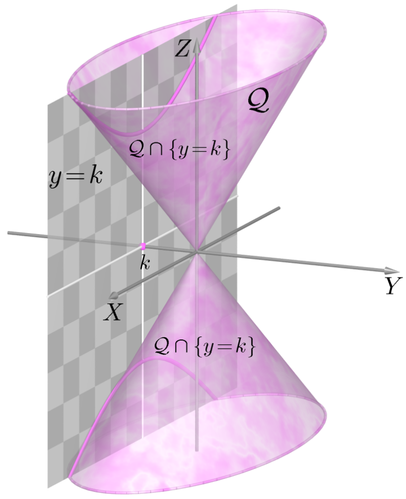

Figura 20: $\mathcal{Q} \cap \{y = k\}$, $k < 0$

Além disso, a seção plana de $\mathcal{Q}$ em um plano paralelo ao plano YZ,

$$\mathcal{C} \cap \{x = k\} : \begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases},$$

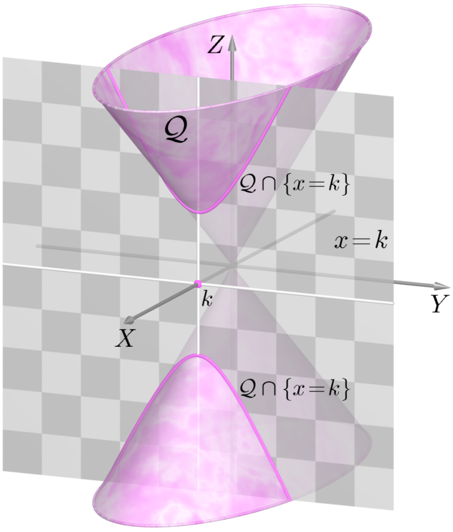

Figura 21: $\mathcal{Q} \cap \{x = k\}$, $k > 0$

é uma hipérbole de centro $(k, 0, 0)$, reta focal paralela ao eixo$-OZ$ e assíntotas

$$\begin{cases} y = \pm\dfrac{c}{b}\, z \\ x = k \end{cases},$$

quando $k \neq 0$, e um par de retas concorrentes

$$\begin{cases} y = \pm\dfrac{c}{b}\, z \\ x = 0 \end{cases},$$

que passam pela origem se $k = 0$.

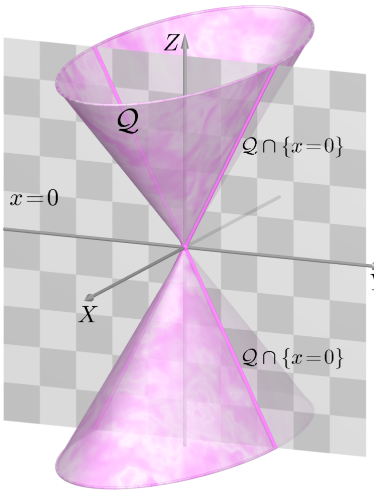

Figura 22: $\mathcal{Q} \cap \{x=0\}$

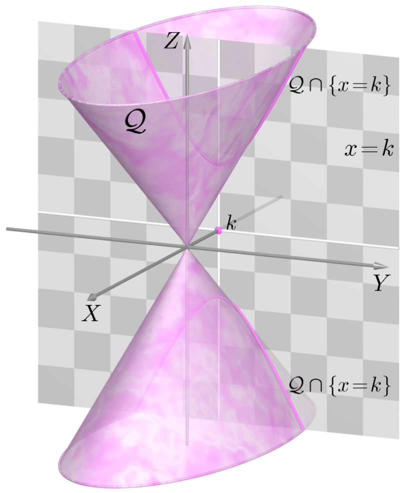

Figura 23: $\mathcal{Q} \cap \{x=k\}$, $k<0$

Exemplo 5

Verifique que, para todo ponto $P=(x_0, y_0, z_0)$ *pertencente ao cone elíptico* $\mathcal{Q} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$, *a reta* r *que passa por* P *e pela origem está contida em* $\mathcal{Q}$.

Solução.
A equação paramétrica de r é dada por:

$$r : \{\,(\,x_0 t, y_0 t, z_0 t\,)\,;\, t \in \mathbb{R}\,\}\,.$$

Como $\dfrac{{x_0}^2}{a^2} + \dfrac{{y_0}^2}{b^2} = \dfrac{{z_0}^2}{c^2}$, pois $P \in \mathcal{Q}$, temos que

$$\frac{{x_0}^2}{a^2}t^2 + \frac{{y_0}^2}{b^2}t^2 = \frac{{z_0}^2}{c^2}t^2 \iff \frac{(x_0 t)^2}{a^2} + \frac{(y_0 t)^2}{b^2} = \frac{(z_0 t)^2}{c^2}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Ou seja, $(x_0 t, y_0 t, z_0 t) \in \mathcal{Q}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. □

Observação 4

Dizemos então que um cone elíptico é gerado por retas concorrentes.

5. Cilindro Elíptico

Os *cilindros elípticos* de eixo$-OX$, eixo$-OY$ e eixo$-OZ$ na forma canônica são as superfícies dadas, respectivamente, pelas seguintes equações de segundo grau nas variáveis x, y z:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1\,, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1\,, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1\,, \end{aligned}}$$

onde a, b, c são números reais positivos.

Estas superfícies são simétricas em relação aos três eixos coordenados e à origem.

Estudaremos as seções planas do cilindro elíptico de eixo$-OZ$:

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Todas as seções planas contidas em planos paralelos ao plano XY,

$$\mathcal{Q} \cap \{z = k\} : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = k \end{cases},$$

são elipses de centro $(0, 0, k)$ pertencentes ao eixo$-OZ$.

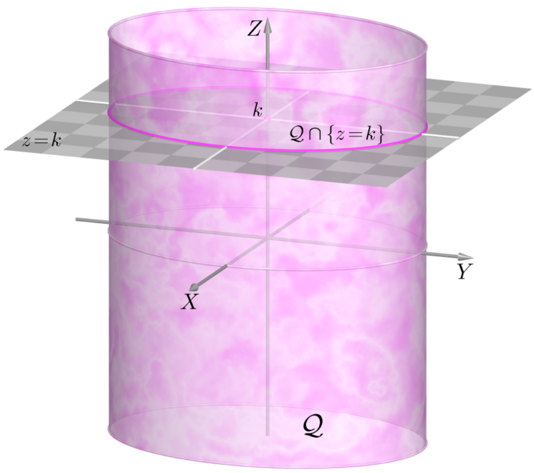

Figura 24: Seções planas de $\mathcal{Q}$ em planos paralelos ao plano XY

A seção plana de $\mathcal{Q}$ no plano $y = k$, $k \in \mathbb{R}$, paralelo ao plano XZ,

$$\mathcal{Q} \cap \{y = k\} : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = 1 - \dfrac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases} ,$$

- são duas retas paralelas ao eixo$-OZ$: $\begin{cases} x = \pm\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2 - k^2} \\ y = k \end{cases}$ se $k \in (-b, b)$;
- é uma reta paralela ao eixo$-OZ$: $\begin{cases} x = 0 \\ y = b \end{cases}$ se $k = b$;
- é uma reta paralela ao eixo$-OZ$: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -b \end{cases}$ se $k = -b$;
- é o conjunto vazio se $|k| > b$.

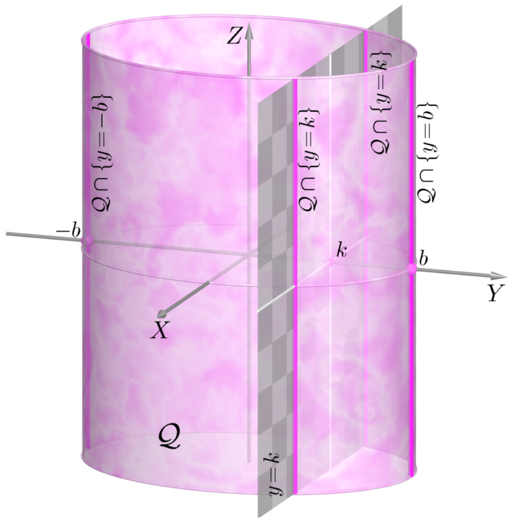

Figura 25: Seções planas de $\mathcal{Q}$ em planos paralelos ao plano XZ

De modo análogo, a seção plana

$$\mathcal{Q} \cap \{x = k\} : \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases}$$

- são duas retas paralelas ao eixo$-OZ$: $\begin{cases} y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - k^2} \\ x = k \end{cases}$ para $k \in (-a, a)$;
- é uma reta paralela ao eixo$-OZ$: $\begin{cases} y = 0 \\ x = a \end{cases}$ para $k = a$;

• é uma reta paralela ao eixo$-OZ$: $\begin{cases} y = 0 \\ x = -a \end{cases}$ para $k = -a$;

• é o conjunto vazio para $k \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$.

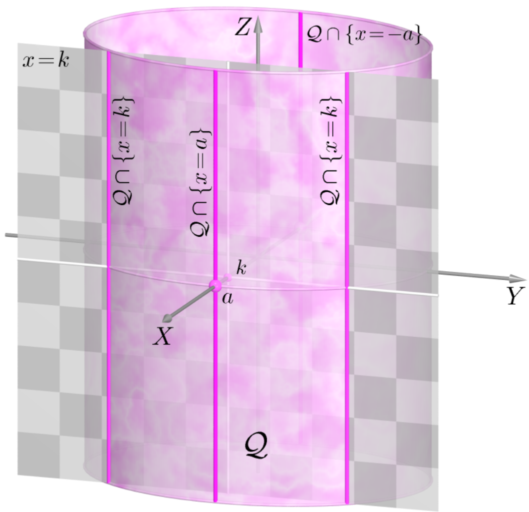

Figura 26: Seções planas de $\mathcal{Q}$ em planos paralelos ao plano YZ

Exemplo 6

Considere o cone elíptico $\mathcal{Q} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *de eixo*$-OZ$ *e* $P = (x_0, y_0, z_0)$ *um ponto pertencente a* $\mathcal{Q}$. *Mostre que a reta* r *que passa por* P *e é paralela ao eixo*$-OZ$ *está contida na superfície* $\mathcal{Q}$.

Solução.

De fato, como $\dfrac{{x_0}^2}{a^2} + \dfrac{{y_0}^2}{b^2} = 1$, pois $P \in \mathcal{Q}$, e $r = \{(x_0, y_0, z_0 + t)\,;\, t \in \mathbb{R}\}$, temos que

$$(x_0, y_0, z_0 + t) \in \mathcal{Q},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Observação 5

Portanto, podemos dizer que que um cilindro elíptico é gerado por retas paralelas ao seu eixo.

6. Cilindro Hiperbólico

Os *cilindros hiperbólicos* de eixo$-OX$, eixo$-OY$ e eixo$-OZ$ na forma canônica são as superfícies definidas, respectivamente, pelas equações de segundo grau abaixo:

$$\boxed{\begin{array}{rclcrcl} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2} & = & 1 & \text{ou} & \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2} & = & 1\,, \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2} & = & 1 & \text{ou} & \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2} & = & 1\,, \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2} & = & 1 & \text{ou} & \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2} & = & 1\,, \end{array}}$$

onde a, b, c são números reais positivos. Estas superfícies são simétricas em relação aos três planos coordenados e à origem.

Vamos estudar o seguinte cilindro hiperbólico de eixo$-OZ$:

$$\mathcal{Q} : \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

Todas as seções planas contidas em planos paralelos ao plano XY,

$$\mathcal{Q}\cap z=k : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=k \end{cases},$$

são hipérboles de centro $(0,0,k)$ sobre o eixo$-OZ$, reta focal paralela ao eixo$-OX$ e assíntotas $\begin{cases} y=\pm\dfrac{b}{a}\,x \\ z=k\,. \end{cases}$

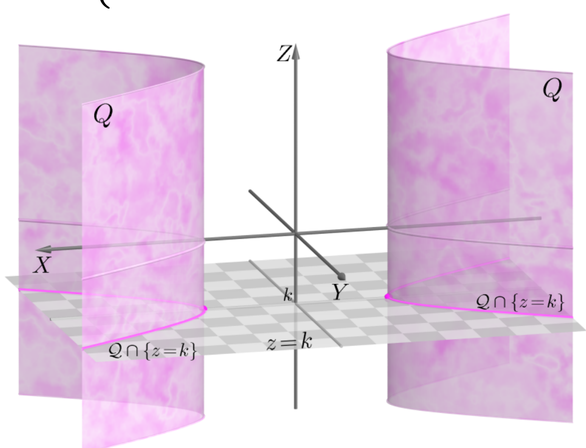

Figura 27: Seções planas do cilindro hiperbólico $\mathcal{Q}$ em planos paralelos ao plano XY